

## Chapitre IV : Ecoulement des fluides à travers un milieu poreux

### IV.1. Introduction

Les milieux poreux sont des **milieux hétérogènes diphasiques ou polyphasiques** qui possèdent une microstructure qui rend difficile l'étude des phénomènes de transport. Aussi, les milieux poreux sont généralement **le siège de processus de transfert de matière, de chaleur et parfois même de réactions chimiques et biochimiques**, ces phénomènes pouvant provoquer des modifications de la structure (chimique, cristalline) et de la texture du solide poreux. Ces applications aussi complexes que variées des milieux poreux peuvent être classées en 4 groupes :

- Écoulement d'un seul fluide à travers un milieu poreux à texture invariable ;
- Écoulement de deux fluides à travers un milieu poreux à texture invariable ;
- Écoulement des suspensions ;
- Réactions chimiques des lits de solides poreux.

Dans de nombreuses opérations industrielles un fluide s'écoule à travers une couche de particule solide (catalyseur, garnissage) ces milieux poreux sont généralement le siège de transfert de matière pour avoir une réaction chimique ou bien séparatrice des produits. On trouve leur application dans les opérations suivantes :

- Purification des fluides sur un lit adsorbant (Adsorption).
- Fractionnement des vapeurs organiques (Cracking).
- Réaction chimique (Catalyseur).

L'équation de continuité et l'équation de Bernoulli sont deux principes fondamentaux en mécanique des fluides

#### a- Équation de Continuité

L'équation de continuité exprime la conservation de la masse d'un fluide incompressible en écoulement permanent :

$$A_1 U_1 = A_2 U_2$$

où :

$A_1, A_2$  sont les sections transversales aux points 1 et 2,

$U_1, U_2$  sont les vitesses du fluide aux points 1 et 2.

Cela signifie que le débit volumique reste constant :

$$Q=AU=\text{constante}$$

### b- Équation de Bernoulli

L'équation de Bernoulli découle du principe de conservation de l'énergie appliqué à un fluide en mouvement :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho_f U_1^2 + \rho_f g h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho_f U_2^2 + \rho_f g h_2$$

Où :

$P_1, P_2$  : Pressions aux points 1 et 2 (Pa),

$U_1, U_2$  : Vitesses du fluide aux points 1 et 2 (m/s),

$\rho_f$  : Masse volumique du fluide (kg/m<sup>3</sup>),

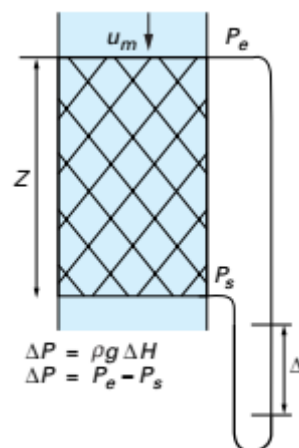
$g$  : Accélération de la pesanteur (9,81 m/s<sup>2</sup>),

$h_1, h_2$  : Hauteurs (m).

L'énergie totale (pression + énergie cinétique + énergie potentielle) reste constante le long d'une ligne de courant si le fluide est parfait (sans viscosité) et en écoulement stationnaire

## IV.2. Lois expérimentales de Darcy 1856

Soit une conduite de section ( $\Omega$ ) contenant un lit poreux de hauteur  $L$  à travers lequel circule un débit  $Q_v$  de viscosité  $\mu$ .



**Figure IV.1 :** Écoulement d'un fluide à travers un lit de particules.

Darcy a observé que le débit volumique est proportionnel à la section de la conduite et à la différence entre les hauteurs piézométriques et inversement proportionnelle à la hauteur de la conduite c.-à-d. :

L'unité de la perméabilité est le darcy, **D** et  $\text{m}^2$  où **1 Darcy = 0.9869 10<sup>-12</sup> m<sup>2</sup>**.

$-\Delta P/Z$  est proportionnelle avec  $V_s$ . ( $V_s$  : vitesse superficielle).

Et le signe (-) indique qu'il y a une perte de d'énergie.

$V = \frac{Q}{\Omega}$  ( $Q$  : débit volumique et  $\Omega$  : section transversale du lit).

$$\frac{Q}{\Omega} = K_1 \left| -\frac{\Delta P}{Z} \right|$$

$K_1$  : coefficient de perméabilité (conductivité hydraulique). On définit la **conductivité hydraulique  $K_1$ , ou coefficient de perméabilité**, s'exprime en  $(\text{LT}^{-1}) \text{ m s}^{-1}$ .

$$K_1 = \frac{k}{\mu}$$

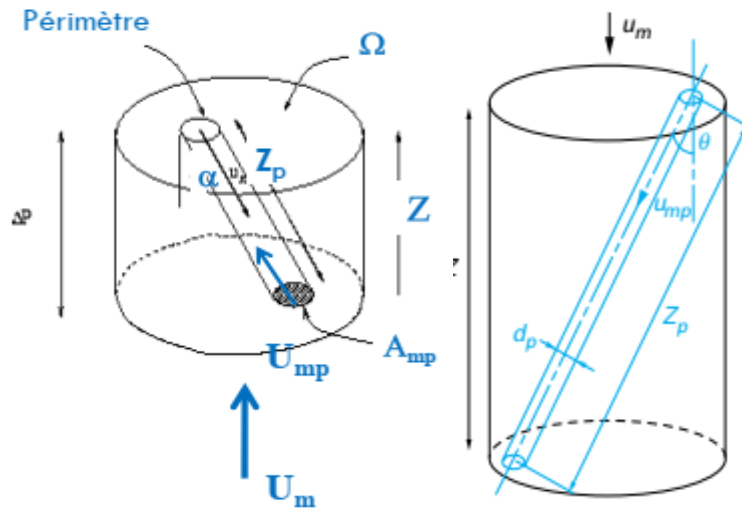
**La perméabilité  $k$  est une caractéristique physique qui représente la facilité qu'a un matériau à permettre le transfert de fluide au travers d'un réseau connecté.** Le darcy est la perméabilité d'un échantillon de 1 cm de côté avec une section de  $1 \text{ cm}^2$  et où la différence de pression est  $1 \text{ dyne/cm}^2$  ( $9,8710^{-7} \text{ atm} = 0,1 \text{ pascal}$ ) entre les extrémités de l'échantillon avec une  $\mu$  du fluide de 1 poise qui s'écoule avec 1 débit volumique de  $1 \text{ cm}^3/\text{s}$

#### **IV.3. Modèle de Kozeny (Kozeny et Carman - 1927 et 1937 respectivement)**

##### **Description du modèle**

Soit un lit de particules en contact ou encore un réseau de passages tortueux formés par des espaces entre des particules, avec un fluide s'écoulant sous l'influence de pression par unité de longueur du lit.

Le modèle proposé consiste à assimiler **un volume poreux à un faisceau de  $N$  pores cylindriques droits indépendants et non interconnectés**, présentant la même porosité et la même surface spécifique  $a_g$ , toutefois, on introduit un paramètre supplémentaire  $Z_p$ , ainsi les pores auront la même longueur avec  $Z_p > Z$  ( $Z_p = \tau Z$ ).



**Figure IV.2 :** Milieu poreux. Modèle de Kozeny

Soit une colonne de diamètre  $D$  et de section  $\Omega$  contenant un lit de particules dont le vide est assimilé aux pores avec:

$Z$  = Épaisseur de l'empilement de grains de diamètre  $d$

$V$  = Volume du fût/colonne

$A$  = Aire de la surface solide contenue dans le volume  $V$

$Z_p$  : longueur du pore

$\Omega_{mp}$ : section du pore

$U_{mp}$  : vitesse au sein du pore

$\alpha$  : angle moyen formé par capillaire avec l'axe du tube

$\tau$  : Facteur de tortuosité du lit =  $\frac{1}{\cos \alpha}$

Alors l'aire spécifique  $a_g$  du lit est égale à

$$a_g = \frac{\text{Surface des grains}}{\text{Volume des grains}} = \frac{\text{Surface}}{\text{Volume}(1-\varepsilon)}$$

Les deux hypothèses importantes sont :

- 1. La surface interne du milieu réel** est celle de  $N_p$  pores.

$$S = N \pi d_p Z_p = N \pi d_p Z \frac{1}{\cos \alpha} \quad (*)$$

- 2. Le volume poreux de la couche** est celui de  $N_p$  pores indépendants et de diamètre  $d_p$

$$\varepsilon V = N \frac{\pi d_p^2}{4} Z_p = N \frac{\pi d_p^2}{4} Z \frac{1}{\cos \alpha} \quad (**)$$

D'où

$$\frac{(*)}{(**)} = \frac{S}{\varepsilon V} = \frac{4}{d_p}$$

$$\text{Or } a_g = \frac{S}{V(1-\varepsilon)} \text{ d'ou } d_p = \frac{4\varepsilon}{(1-\varepsilon)a_g}$$

Si le théorème de Duput s'applique au milieu, on aura :

$$\varepsilon = \frac{\text{Volume poreux}}{\text{Volume total}} = \frac{N \left( \frac{\pi d_p^2}{4} \right) \tau Z}{Z \Omega}$$

$$\varepsilon = N \pi \frac{d_p^2}{4} \frac{\tau}{\Omega}$$

$$N = \frac{4 \varepsilon \Omega}{\pi d_p^2 \tau} = \frac{4 \varepsilon \Omega}{\pi \left( \frac{4\varepsilon}{(1-\varepsilon)a_g} \right)^2 \tau}$$

$$N = \frac{a_g^2 (1-\varepsilon)^2 \Omega}{4 \pi \varepsilon \tau}$$

Dans un milieu homogène et isotrope  $\alpha=45^\circ$ . Pour un empilage désordonné de gains isométriques  $1,3 < \tau < 1,7$ .

**Kozeny-Carman** appliquent à chacun des pores **l'équation de Poiseuille** donnant la perte de charge dans une conduite cylindrique (à section circulaire) en Régime Laminaire soit

$$\Delta P = \frac{32 \gamma \mu U_{mp}}{d_p^2} Z p$$

$\gamma$  : Facteur de circularité du pore = 1 conduite circulaire, = 0.83 section équilatérale, =1.5 section allongée.

Si  $V_0$  : vitesse en fut vide alors :

$$Q = \Omega V_0 = \Omega_p U_{mp}$$

$$\text{Avec } \Omega_p \text{ surface des pores} = \pi \frac{d_p^2}{4} N$$

D'où

$$\Omega V_0 = N\pi \frac{d_p^2}{4} U_{mp} = \frac{\Omega a_g^2 (1-\varepsilon)^2}{4\pi\varepsilon\tau} \frac{\pi}{4} \left( \frac{4\varepsilon}{(1-\varepsilon)a_g} \right)^2 U_{mp}$$

$$U_{mp} = \frac{V_0}{\varepsilon} \tau$$

Pour des capillaires cylindriques, en tenant compte des expressions de  $V_{mp}$ ,  $Z_p$  et  $d_p$ , on aboutit à

$$\frac{\Delta P}{Z} = h_K \mu a_g^2 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} U_0 \text{ Equation de Kozeny- Carman en régime laminaire (RL).}$$

Avec  $h_K = 2 \gamma \tau^2$  constante de Kozeny =  $4,5 \pm 1,5$

La constante de Kozeny  $h_K$  vaut :

- Pour des empilages de grains isométriques avec des porosités ( $\varepsilon$ ) n'excédant pas 0,7 à 0,8,  $h_K = 4,5 \pm 1,5$  et en pratique 5 ;
- Pour des empilages de fibres à porosité plus élevée,  $h_K = 9$  pour  $\varepsilon = 0,94$  et  $h_K = 22$  pour  $\varepsilon = 0,99$ .

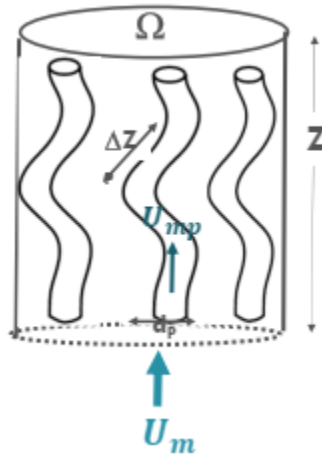
**La relation de Kozeny-Carman** peut s'exprimer en fonction du diamètre  $d=6/a_g$ , diamètre de la sphère possédant la même surface spécifique que le grain. Et dans le cas :  $h_K=5$ .

$$-\frac{\Delta P}{Z} = 180 \frac{\mu}{d_p^2} \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} U_0 \quad \text{Equation de Kozeny-Carman}$$

#### IV.4. Modèle de Burke-Plummer (Régime Turbulent, $Rep > 1000$ )

**Burke** et **Plummer** considèrent un faisceau de pores avec un diamètre équivalent au diamètre des grains empilés ou encore du diamètre des pores pour les milieux de porosité moyenne, soit  $\Delta Z_p = \lambda d_p$ ,  $\lambda \geq 1$ .

$$\text{Nombre de coudes par pores, } n_C = \frac{Z_p}{\lambda d_p}$$



**Figure IV.3 :** L'écoulement du fluide dans le milieu poreux selon Burke-Plummer.

Chaque coude est le siège d'un remous dans lequel une certaine fraction de l'énergie cinétique du fluide est convertie en chaleur. En plus, de la chute de pression par glissement visqueux représentée par l'équation de Kozeny-Carman, il existe donc une seconde chute de pression, que nous exprimons comme une fraction  $\beta$  de l'énergie cinétique du fluide soit :

$$\frac{\Delta P}{Z} = \beta n_c \rho_f \frac{U_{mp}^2}{2}$$

En remplaçant  $U_{mp}$ ,  $n_c$ ,  $Z_p$ ,  $d_p$  par leur expression, on aurait :

$$\frac{\Delta P}{Z} = \frac{\beta \tau^3}{8\lambda} \rho_f a_g \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} V_0^2$$

Avec  $h_B = \frac{\beta \tau^3}{8\lambda}$

$h_B$  est constante de Burke et Plummer  $\approx 0,3$ .

La relation de Burke-Plummer peut s'exprimer en fonction du diamètre  $d=6/a_g$ , diamètre de la sphère possédant la même surface spécifique que le grain.

$$\frac{\Delta P}{Z} = 1,75 \frac{\rho_f}{d_p} \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} U_0^2 \quad \text{Equation de Burke-Plummer}$$

#### IV.5. Module d'Ergun 1952

Cette relation est obtenue en additionnant les deux termes de chute de pression

$$-\frac{\Delta P}{H} = \underbrace{h_{K-C} \frac{a_g^2 \mu (1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3}}_{RL} U + \underbrace{h_{B-P} \frac{a_g \rho_f (1-\varepsilon)}{\varepsilon^3}}_{RT} U^2$$

Pour Ergun  $h_{K-C}=4.16$  et  $h_{B-P}=0.29$

Pour les particules sphériques de diamètre  $d$   $a_g = \frac{6}{d_p}$

$$-\frac{\Delta P}{Z} = 150 \frac{\mu}{d^2} \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} U + 1,75 \frac{\rho_f}{d} \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} U^2 \text{ Équation d'Ergun}$$

L'équation générale est sous forme  $-\frac{\Delta P}{H} = A U + B U^2$

Le terme laminaire de Kozney–Carman et d'Ergun sont identique, sauf dans le 150 et 180, c'est dû aux conditions expérimentales des deux auteurs. Cela est liée à la forme des particules utilisées, la densité et la porosité des milieux poreux (ne sont pas prise en considération).

Le régime d'écoulement est donné par le nombre de Reynolds de particules :

$$\text{Re } p^* = \frac{\rho_f d U}{\mu(1-\varepsilon)}$$

Pour  $\text{Re } p^* \leq 10$  : Régime laminaire.

Pour  $\text{Re } p^* > 1000$  : Régime turbulent.

Ergun fait introduire un facteur de fiction ( $f^*$ ) qui exprime les frottements (perte de pression, perte de charge, perte d'énergie...), qui s'écrit encore sous forme adimensionnelle :

$$\text{Facteur de friction : } f^* = \frac{-\Delta P}{H} \frac{d}{\rho_f U^2} \frac{\varepsilon^3}{(1-\varepsilon)^2}$$

$$\text{Où : } f^* = \frac{150}{\text{Re } p^*} + 1,75$$

Si on veut comparer deux milieux poreux, il suffit de comparer leur coefficient de friction :

$$\text{Si } f^* \leq 10 \quad f^* = \frac{150}{\text{Re } p^*} : \text{Régime laminaire.}$$

$$\text{Pour } \text{Re } p^* > 1000 \quad f^* = 1,75 : \text{Régime turbulent.}$$

#### **IV.6. Conclusion**

- Une partie de la perte de charge provient de la friction du fluide sur la surface des particules. Cette perte de charge est proportionnelle à la viscosité et à sa vitesse.
- Une partie de la perte de charge provient des virages et expositions et contractions auxquelles le fluide est exposé. Lors de son écoulement à travers le lit de l'énergie est dégradée dans les tourbillons qui en résultent. La perte de charge de traînée est proportionnelle à l'énergie cinétique du fluide  $\rho_f U_0^2$ .