جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية
وعلوم التسيير

السداسي الثاني

المجموعات: 2 و 3 و 4

السنة الأولى جذع مشترك LMD

رياضيات 02

من مطبوعة :

الرياضيات للتخصصات الاقتصادية

المحور الثالث:

ملخص درس : المصفوفات والتطبيقات الخطية

1. عموميات على المصفوفات
2. فضاء المصفوفات
3. جداء مصفوفتين
4. مقلوب مصفوفة
5. مصفوفات وتطبيقات
6. أمثلة وتمارين محلولة

السنة الجامعية 2023- 2024

1. عموميات حول المصفوفات

1.1 تعريف

مصفوفة أعداد حقيقية من النمط (n,p) حيث $n,p\in\mathbb{N}^*$ هي التطبيق المعرف كما يلي:

$$\{1,2,\dots,n\}\times\{1,2,\dots,p\}\to\mathbb{R}$$
$$(i,j)\mapsto a_{ij}$$

a_{ij} هي معاملات المصفوفة التي نرمز لها بالرمز A وتكتب: $(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$

أو اختصارا $A=(a_{ij})$، ونكتب أيضا

$$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}$$

"المستطيل" الأخير يعبر أيضا عن المصفوفة $A=(a_{ij})$.

المعامل الحقيق a_{ij} في المصفوفة A ، يقع في "تقاطع" السطر رقم i مع العمود رقم j .

الدليل الأيمن مخصص لترقيم الأعمدة والدليل الأيسر مخصص لترقيم الأسطر.

مثال

المصفوفة $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$ بسطرين وثلاثة أعمدة. $a_{23}=3$ يقع في السطر الثاني والعمود الثالث، بينما $a_{1.3}$ غير موجود.

نرمز بـ $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$ لمجموعة المصفوفات من النمط $(n.p)$ ذات n سطر و p عمود

$$A\in\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}$$

أية مصفوفة M من $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$ هي جدول (مستطيل) من المعاملات (a_{ij})، حيث يتغير الدليل i من 1 إلى p، ويتغير j من 1 إلى n. وبذلك تتشكل M من p شعاع عمودي و n شعاع سطر.

2.1 مصفوفات خاصة

- تكون المصفوفة A من $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$ معدومة إذا تحقق $\forall i\ ,\ \forall j \quad a_{ij}=0$
- **المصفوفة المربعة:** $n=p$، نضع $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})=\mathcal{M}_{n}(\mathbb{R})$

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

تكون المصفوفة المربعة $A=(a_{ij})$ مثلثية من الأعلى $a_{ij}=0 \quad \forall i>j$

- **مصفوفة الوحدة :** مصفوفة الوحدة من الرتبة n، هي مصفوفة مربعة نرمز لها بـ I_n تتشكل من 1 على القطر الرئيسي و 0 على البقية .

مثلا

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

- **مصفوفة قطرية:** تكون من الشكل

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda_n\end{pmatrix} \quad \text{،} \quad \left(\lambda_j \neq 0 \quad j \in \{1,\dots,n\}\right)$$

- **مصفوفة سطر:** كل عنصر من $\mathcal{M}_{1.p}(\mathbb{R})$ هو مصفوفة بسطر واحد و p عمود، يمكن مطابقته بشعاع من $\mathbb{R}^p$ بالشكل : $(a_{1p},a_{1p},\dots,a_{1p})$

- **مصفوفة عمود:** كل عنصر من $\mathcal{M}_{n.1}(\mathbb{R})$ هو مصفوفة من عمود واحد و n عمود يمكن مطابقته بالشعاع من $\mathbb{R}^n$ بالشكل : $\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$

- **منقول مصفوفة**

لتكن المصفوفة $M=(a_{ij})$ ذات n سطر و p عمود من عناصر من $\mathbb{R}$.

نسمي منقول M، المصفوفة ${}^tM$ من $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ التي أعمدتها هي صفوف M حيث ${}^tM=(a_{ji})$

ولدينا أيضا ${}^t({}^tM)=M$

وكذلك ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$ حيث A و B من $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$

مثلا

$$A=\begin{pmatrix}2&-5&1\\3&4&0\end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA=\begin{pmatrix}2&3\\-5&4\\1&0\end{pmatrix}$$

- **نظير مصفوفة**

لتكن المصفوفة A من $\mathcal{M}_{np}(K)$. نظير المصفوفة $A=(a_{ij})$ هو $-A=(-a_{ij})$.

في حالة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، تكون A تناظرية إذا تحقق: $a_{ij}=a_{ji}$ $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$ ، أي $A={}^tA$.

وتكون المصفوفة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ضد تناظرية إذا كان $A=-{}^tA$.

ملاحظة : كل مصفوفة مربعة A يمكن كتابتها بالشكل : $A=\frac{1}{2}(A+{}^tA)+\frac{1}{2}(A-{}^tA)$.

مثلا إذا اعتبرنا المصفوفتين :

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\0&5\\1&4\end{pmatrix}\text{،}\quad B=\begin{pmatrix}-1&1\\5&4\\-3&0\end{pmatrix}$$

يكون لدينا:

$$A+B=\begin{pmatrix}1&4\\5&9\\-2&4\end{pmatrix},\quad 3\cdot A=\begin{pmatrix}6&9\\0&15\\3&12\end{pmatrix},\quad 2A+3B=\begin{pmatrix}1&9\\15&22\\-7&8\end{pmatrix}$$

2. جداء مصفوفتين

1.2 تعريف جداء مصفوفتين

نعتبر المصفوفتين $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ و $B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$.

إن جداء المصفوفتين $C=A\cdot B$، (الذي لا يكون معرفا إلا إذا كان عدد أسطر B مساويا لعدد أعمدة A).

هو المصفوفة $C=(c_{ij})$ من $\mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$.

مثلا إذا كانت لدينا المصفوفات :

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&5\\3&0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&2&7\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

تكون $A\cdot B$.، $A\cdot C$ معرفتين ، أما $B\cdot A$ و $C\cdot A$ فهما غير موجودتين .

- جداء مصفوفة سطر بمصفوفة عمود :

$$A\cdot B=\underbrace{(a_1,a_2,\dots,a_p)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_p\end{pmatrix}}_{B}$$

المصفوفة $A\cdot B$ من النمط $(1,1)$: $A\cdot B=(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_pb_p)$ مصفوفة سطر واحد وعمود واحد

- الحالة العامة

$$A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}),\ B=(b_{ij})\in\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$$

حينما يتعرف الجداء $C = A \cdot B$ ، يكون :

$$C = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le q}} = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le q}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

ملاحظة

إذا تحقق الجداء $A.B$ فإن $B.A$ بصورة عامة غير معرف، وحتى عندما يتعرف $B.A$ فإنه بصورة عامة $B.A \neq A.B$.

مثلا في المصفوفتين $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

الجداء $A.B$ ممكن لأن عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B :

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} c_{11} = (2)(1) + (1)(-2) & c_{12} = (2)(2) + (1)(3) & c_{13} = (2)(0) + (1)(1) \\ c_{21} = (-1)(1) + (1)(-2) & c_{22} = (-1)(2) + (1)(3) & c_{23} = (-1)(0) + (1)(1) \\ c_{31} = (1)(1) + (3)(-2) & c_{32} = (1)(2) + (3)(3) & c_{33} = (1)(0) + (3)(1) \end{array}$$

ومنه $$A\,B = C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -5 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

4. مقلوب مصفوفة

1.4 تعريف ونتائج

- من أجل كل مصفوفة A من $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ ، يكون لدينا : $I_n \cdot A = A \cdot I_p = A$
- نقول عن مصفوفة مربعة A من الرتبة n بأنها قابلة للقلب، إذا وجدت مصفوفة مربعة B من الرتبة n :

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

نرمز لـ B بالرمز A^{-1} ، ونسميها بمقلوب A .

عندئذ يكون $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

وكذلك ، إذا كانت A قابلة للقلب فإن $A \cdot X = B \iff X = A^{-1} \cdot B$

- إذا كانت A قابلة للقلب، فإن A^{-1} تكون أيضا قابلة للقلب: $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$
- إذا كانت A قابلة للقلب فإن A^{-1}، ${}^{t}A$ قابلتين للقلب ولدينا: $({}^{t}A)^{-1}={}^{t}(A^{-1})$ $\quad (A^{-1})^{-1}=A$
- إذا بالإضافة إذا كانت B قابلة للقلب فإن : $(AB)^{-1}=B^{-1}.A^{-1}$ و $A^{-1}=M(f^{-1})=M^{-1}(f)$

تمرين رقم 1

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ مصفوفته في الأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ ، هي :

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 14 & -11 & 10 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

1. بين أن $A^2-2A=-I_3$ ، واستنتج أن A قابلة للقلب . عين A^{-1} ؟ (I_3 هي مصفوفة الوحدة)
2. حل في $\mathbb{R}^3$، جملة المعادلات ذات المجاهيل x و y و z الآتية :

$$\begin{cases} 8x-6y+5z=1 \\ 14x-11y+10z=2 \\ 7x-6y+6z=1 \end{cases}$$

الحل

1. مصفوفة التطبيق الخطي f في الأساس القانوني، هي :

$$A=\begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 14 & -11 & 10 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

حساب A^2 و A^{-1}

$$A^2=\begin{pmatrix} 15 & -12 & 10 \\ 28 & -23 & 20 \\ 14 & -12 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^2-2A+I_3=$$

$$\begin{pmatrix} 15 & -12 & 10 \\ 28 & -23 & 20 \\ 14 & -12 & 11 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 8 & -6 & 5 \\ 14 & -11 & 10 \\ 7 & -6 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-A^2+2A=I_3$$

ومنه $A\cdot\underbrace{(-A+2I_3)}_{A^{-1}}=\underbrace{(-A+2I_3)}_{A^{-1}}\cdot A=I_3$ (I_3 هي مصفوفة الوحدة)

ومنه A قابلة للقلب ومقلوبها A^{-1} :

$$A^{-1}=-A+2I_3=-\begin{pmatrix}8&-6&5\\14&-11&10\\7&-6&6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6&6&-5\\-14&13&-10\\-7&6&-4\end{pmatrix}$$

2. حل الجملة:

$$\begin{cases}8x-6y+5z=1\\14x-11y+10z=2\\7x-6y+6z=1\end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{cases}8x-6y+5z=1\\14x-11y+10z=2\\7x-6y+6z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}8&-6&5\\14&-11&10\\7&-6&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

ومنه الحل

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&6&-5\\-14&13&-10\\-7&6&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

2.4 خواص جداء المصفوفات

C,B,A مصفوفات ، في حالة الجداءات الممكنة، يكون لدينا :

- $A(B\cdot C)=(A\cdot B)C$
- $A(B+C)=A.B+BC$
- $(A+B)C=A\cdot C+B\cdot C$
- $A\cdot O=O$
- $\forall A\in A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\quad A\cdot I_n=I_n\cdot A=A\ ,\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad I_n^n=I_n$

ملاحظة

يمكن أن تنعدم $A.B$ من غير أن تكون A و B معدومتين معا.

مثلا الجداء AB حيث $B=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ هو:

$$A.B=\begin{pmatrix}2-2&-2+2\\2-2&-2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

لنجري الجداء AX حيث $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&5&2\\-1&1&1\end{pmatrix}$

$$A\cdot X=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&5&2\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+4z\\3x+5y+2z\\-x-y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\quad:\quad\begin{cases}P_1=2x+4z\\P_2=3x+5y+2z\\P_3=-x-y-z\end{cases}$$

5. مصفوفات وتطبيقات

1.5 الفضاء الشعاعي

نقول عن مجموعة غير خالية E مزودة بعمليتين $(+)$ و $(\cdot)$ بإنها فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$ إذا تحقق:

- $(E,+)$ زمرة تبديلية،
- العملية الخارجية $(\cdot)$ على $\mathbb{R}$ تحقق :

$$\forall\alpha\in K\quad\forall x,y\in E\quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$
$$\forall\alpha,\beta\in K\quad\forall x\in E\quad(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$
$$\forall\alpha,\beta\in K\quad\forall x\in E\quad\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$$
$$\forall x\in E\quad 1\cdot x=x$$

(1 هو عنصر الوحدة في $\mathbb{R}^*$، تَسمى عناصر ف.ش **أشعة،** وتَسمى عناصر الحقل **سلميات**).

مثلا $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ هما فضائين شعاعيين على $\mathbb{R}$. وكذلك $\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\,\text{fois}}$ هو ف.ش على $\mathbb{R}$

ملاحظة

إذا كان E_1 و E_2 ف. ش على $\mathbb{R}$، فإنه بالإمكان أن نعرف على $E_1\times E_2$ بنية ف.ش كالآتي:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$
$$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$$

2.5 الفضاء الشعاعي الجزئي

نسمي فضاء شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E، كل مجموعة جزئية F غير خالية من E تتحقق على نفسها بنية الفضاء الشعاعي.

أو F ف.ش.جزئي من E إذا تحقق:

$$(E\supset)F\neq\varnothing$$
$$\forall x\in F,\forall y\in F:\ x+y\in F$$
$$\forall\alpha\in K,\forall x\in F:\ \alpha x\in F$$

مثال

- في $\mathbb{R}^3$، المجموعة $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2x+y-z=0\right\}$ لها بنية ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$.

– نلاحظ بأن $(0,0,0)\in F$ ، ومنه $F\neq\varnothing$.

$$F\ni(x,y,z):\quad 2x+y-z=0$$
$$F\ni(x',y',z'):\quad \underline{2x'+y'-z'=0}$$
$$2(x+x')+(y+y'-(z+z')=0$$
$$2x''+y''-z''=0$$

هذا يعني أن شعاع المجموع $F\ni(x',y',z')+(x',y',z')=(x'',y'',z'')$

$$F\ni(x,y,z):\quad 2x+y-z=0$$
$$\mathbb{R}\ni\lambda:\quad \underline{\lambda\qquad\qquad}$$
$$\lambda(2x+y-z)=\lambda 0=0$$
$$2(\lambda x)+(\lambda y)-(\lambda z)=\lambda 0=0$$
$$2x''+y''-z''=0$$

إذن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$.

- نعتبر مجموعة الأشعة من الشكل: λa حيث $0\neq a\in E$

المجموعة $D_a=\{x\in E,\exists\lambda\in\mathbb{R}:\ x=\lambda a\}$ هي فضاء شعاعي جزئي من E.

يسمى D_a بالفضاء الشعاعي الجزئي (من E) المولد بـ $\{a\}$. ونرمز له بـ $\mathbb{R}a$.

3.5 الارتباط الخطي والاستقلال

ليكن E ف.ش على الحقل $\mathbb{R}$. ولتكن الأشعة a_1، a_2، ...، a_n من E. لدينا :

$$\mathbb{R}a_1+\mathbb{R}a_2+\cdots+\mathbb{R}a_n=\langle\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\rangle$$

- تكون الأشعة a_1، a_2، ...، a_n مرتبطة خطيا $\Leftrightarrow$ وجد n سلمي : λ_1، λ_2، ...، λ_n ليست كلها معدومة بحيث: $\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n=0_E$
- وتكون هذه للأشعة a_1، a_2، ...، a_n مستقلة خطيا إن لم تكن مرتبطة خطيا.

تكون الأشعة a_1، a_2، ...، a_n مستقلة خطيا $\Leftrightarrow$ من أجل كل n سلمي: λ_1، λ_2، ...، λ_n يتحقق الاستلزام: $\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n=0_E \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$

أمثلة

- في $\mathbb{R}^n$، الأشعة $e_1=(1,0,\cdots,0)$، $e_2=(0,1\ 0,0,\cdots,0)$، ...، $e_n=(0,0,\cdots,0,1)$ مستقلة خطيا
- في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$، ندرس استقلال الأشعة :

$$v_1=(-1,-1,2)\quad,\quad v_2=(1,2,1)\quad,\quad v_3=(1,-1,0)$$

من أجل كل α و β و γ من $\mathbb{R}$:

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3}\quad\Leftrightarrow$$
$$\alpha(-1,-1,2)+\beta(1,2,1)+\gamma(1,-1,0)=(0,0,0)\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha+\beta+\gamma &=0 \\ -\alpha+2\beta-\gamma &=0 \\ 2\alpha+\beta &=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+3\beta=0 \\ 2\alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

ومنه الأشعة v_3 ، v_2 ، v_1 مستقلة خطيا.

4.5 الأساس

E ف ش على $\mathbb{R}$ و $\mathcal{B}\subset E$. نقول عن $\mathcal{B}$ أنه **أساس** لـ E إذا تحقق :

$\boxed{\mathcal{B} \text{ تولد } E \text{ و } \mathcal{B} \text{ مجموعة مستقلة خطيا}}$

وعندئذ على شعاع x من E يكتب بصورة وحيدة كعبارة خطية في أشعة $\mathcal{B}$.

إذا كانت المجموعة $\mathcal{B}=\left\{a_1, a_2,\cdots, a_n\right\}$ أساسا لفضاء شعاعي E، فإن الأشعة a_1، a_2، ...، a_n مستقلة وتولد E. وعندئذ على شعاع x من E يكتب بصورة وحيدة كعبارة خطية في أشعة $\mathcal{B}$.

الكتابة الآتية وحيدة : $x=\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

تسمى **السلميات** λ_1، λ_2، ...، λ_n بمركبات الشعاع x في الأساس $\mathcal{B}$. ونكتب $x_{|\mathcal{B}}=\left(\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_n\right)$

مثلا في $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\left\{e_1,e_2,e_3\right\}$ ، الأشعة e_1 و e_1+e_2 و $e_1+e_2+e_3$ تشكل لـ$\mathbb{R}^3$.

5.5 بعد فضاء شعاعي

E ف.ش على $\mathbb{R}$. $\operatorname{card}\mathcal{B}$ يمثل عدد عناصر المجموعة $\mathcal{B}$.

إذا كان $\mathcal{B}$ أساس لـ E، فإن $\operatorname{card}\mathcal{B}$ يسمى **بعد** E، ونرمز له بـ $\dim E$.

أي: E ف.ش بعده n $\Leftrightarrow$ E يقبل أساسا $\mathcal{B}$: $\dim E=\operatorname{card}\mathcal{B}=n$

مثلا على الحقل $\mathbb{R}$ ، يكون: $\dim\mathbb{R}=1,\quad \dim\mathbb{R}^2=2,\quad \dim\mathbb{R}^3=3,\cdots,\quad \dim\mathbb{R}^n=n$

6.5 نتائج

E فضاء شعاعي منتهي البعد: $\dim E=n$، ولدينا :

- كل مجموعة مستقلة من n شعاع من E تشكل أساسا لـ E
- كل مجموعة من n شعاع مولدة لـ E تكون مستقل خطيا.
- كل فضاء جزئي F من E، يكون بعده منته ويحقق $\dim F\le\dim E$.

ولدينا $\quad E=F \Leftrightarrow \dim E=\dim F$

- إذا كان G ف.ش.ج من E . فأن $F\cap G$ و $F+G$ فضائين جزئيين من E، ولدينا:

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$$

8. فضاء المصفوفات

1.8 الفضاء الجزئي للمصفوفات

- لتكن $M=(a_{ij})$ و $N=(b_{ij})$ مصفوفتين $\mathcal{M}_{n.p}(\mathbb{R})$،
لدينا: $M=N \iff a_{ij}=b_{ij} \quad \forall i\ ,\ \forall j$
- M و N مصفوفتان بنفس البعد من $\mathcal{M}_{n.p}(\mathbb{R})$، لدينا:
المجموع $L=M+N$ هو المصفوفة $L=(\ell_{ij})$ المعرفة كما يلي: $\ell_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$
عملية جمع المصفوفات تبديلية وتجميعية.
- نسمي جداء المصفوفة $M=(a_{ij})$ من $\mathcal{M}_{n.p}(K)$ بالعدد السلمي λ من $\mathbb{R}$، المصفوفة: $N=\lambda M$
حيث $N=(b_{ij})$ مع $b_{ij}=\lambda.a_{ij}$

$\mathcal{M}_{n.p}(K)$ بعمليتي الجمع والضرب بعدد سلمي لها بنية فضاء شعاعي، حيث $\dim\mathcal{M}_{n.p}(\mathbb{R})=n\times p$

الأساس القانوني لهذا الفضاء هو $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ حيث $(E_{ij}\in\mathcal{M}_{n.p}(\mathbb{R})$

E_{ij} مصفوفة معرفة كما يلي: نضع 1 في تقاطع السطر رقم i مع العمود j ، ونضع 0 لبقية المعاملات.

فيكون لدينا : $A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}a_{ij}E_{ij} \quad , \quad \forall A\in\mathcal{M}_{p\,n}(\mathbb{R})$

مثال

- نعين أساساً للفضاء الجزئي : $\mathrm{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x-y+z=y-z\ \}$

لدينا $2y=x+2z \iff x-2y+2z=0 \iff x-y+z=y-z\ :\ \mathrm{F}\ni(x,y,z)$

$$\iff (x,y,z)=(x,\tfrac{x}{2}+z,z)=\tfrac{x}{2}(2,1,0)+z(0,1,1)$$

ومنه $\mathrm{F}=\langle(2,1,0),(0,1,1)\rangle$ والأساس $\mathcal{B}=\{(2,1,0),(0,1,1)\}$

- لنبين أن $\mathrm{G}=\langle\ (1,1,1)\rangle$ هو **فضاء إضافي** لـ F في $\mathbb{R}^3$.

لنثبت أن $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{\ 0_E\ \}$. إذا اعتبرنا شعاعا كيفيا من $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$، فإن هذا الشعاع سيكتب كعبارة خطية وحيدة في كلا أساسيي F و G . فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} &F\ni X\ ,\quad X=\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1)\\ &G\ni X\ ,\quad X=\gamma(1,1,1)\end{aligned}$$
حيث α و β و γ من $\mathbb{R}$

إذن
$$\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1)=\gamma(1,1,1) \iff \begin{cases}0=2\alpha-\gamma\\ 0=\alpha+\beta-\gamma\\ 0=\beta-\gamma\end{cases} \iff \alpha=\beta=\gamma=0$$

ومنه $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{\ 0_E\ \}$ ولدينا $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\langle(2,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\rangle$

- لندرس استقلال الأشعة $(1,1,1)$، $(0,1,1)$، $(2,1,0)$:

من أجل كل α و β و γ من $\mathbb{R}$، يكون لدينا

$$(2\alpha+\delta,\alpha+\beta+\delta,\beta+\delta)=(0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\delta &=0\\ \alpha+\beta+\delta &=0\\ \beta+\delta &=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\delta=0$$

ومنه الأشعة $(1,1,1)$، $(0,1,1)$، $(2,1,0)$ مستقلة خطيا. والفضائين F و G إضافيين في $\mathbb{R}^3$.

طريقة أخرى :

$\mathrm{F+G}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^3$ وبالتالي يكون $\mathbb{R}^3 \supset \mathrm{F+G}$

يكفي أن نثبت أن $\mathrm{F+G}\supset\mathbb{R}^3$.

ليكن (x,y,z) شعاع من $\mathbb{R}^3$. هل يمكن كتابة هذا الشعاع كعبارة خطية للأشعة المولدة لـ$\mathrm{F+G}$ ؟

لدينا
$$\mathrm{F+G}\ni(x,y,z)=\underbrace{\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1)}_{u_1}+\underbrace{\delta(1,1,1)}_{u_2}$$

$$\Leftrightarrow\ (x,y,z)=(2\alpha+\delta,\alpha+\beta+\delta,\beta+\delta)\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\delta &=x\\ \alpha+\beta+\delta &=y\\ \beta+\delta &=z \end{cases}$$

- حل الجملة الأخيرة ذات المجاهيل الحقيقة α و β و γ يعني التعبير عن α و β و γ بدلالة x و y و z

$$\Leftrightarrow\ (2\alpha+\delta,\alpha+\beta+\delta,\beta+\delta)=(x,y,z)\ \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=y-z\\ \beta=-x+2y-z\\ \gamma=x-2y+2z \end{cases}$$

ومنه
$$(x,y,z)=(y-z)(2,1,0)+(-x+2y-z)(0,1,1)+(x-2y+2z)(1,1,1)$$

والأشعة $(1,1,1)$ ،$(0,1,1)$،$(2,1,0)$ تولد $\mathbb{R}^3$ ومنه $\mathbb{R}^3=\mathrm{F+G}$

إذن الأشعة الثلاثة مستقلة وتولد $\mathbb{R}^3$ فهي تشكل أساسا لـ$\mathbb{R}^3$، والمجموع $\mathrm{F+G}$ مباشر. ومنه $\mathrm{F\oplus G}=\mathbb{R}^3$

9. التطبيق الخطي

1.9 تعريف التطبيق الخطي

ليكن E و F ف.ش على $\mathbb{R}$، نسمي **تطبيق خطي،** التطبيق $F:E\to F$ الذي يحقق:

$$\forall x_1,x_2\in E\ ,\ f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$$
$$\forall x\in E,\forall\lambda\in K\ ,\ f(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot f(x)$$

ينتج من هذا التعريف : $f(0_E)=0_F\ ,\ \ \forall x\in E\ ,\ f(-x)=-f(x)$

نرمز بـ $\mathcal{L}(E,F)$ لمجموعة التطبيقات الخطية من E نحو F . إذا كان $E=F$ نضع $\mathcal{L}(E,E)=\mathcal{L}(E)$

مثلا التطبيق f المعرف كما يلي :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y) \mapsto (2x-y, x, -x+y)$$

هو تطبيق خطي ، لأن:

$$f\left[(x,y)+(x',y')\right] = f(x+x', y+y') =$$
$$2(x+x')-(y+y'), (x+x'), (x+x')+(y+y')$$
$$=(2x-y, z, x+y)+(2x'-y', x', x'+y') = f(x,y)+f(x'.y')$$
$$f\left[\lambda(x,y)\right] = f(\lambda x, \lambda y)$$
$$=(2\lambda x-\lambda y, \lambda x, \lambda x+\lambda y) = \lambda(2x-y, x, x+y) = \lambda f(x,y)$$

2.9 تعريف الرتبة

E فضاء شعاعي بعده $\dim E = n$ و لتكن $v_1, v_2, \ldots, v_p$ أشعة من E نرمز بـ F للفضاء المولد بهذه الأشعة.
العدد الأعظمي من الأشعة المستقلة خطيا المأخوذة من بين الأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_p$ يسمى **رتبة** $\{v_1, \ldots, v_p\}$ ، ونكتب $\mathrm{rg}\, F = \mathrm{rg}\{v_1, \ldots, v_p\}$.

إذا كان $r = \mathrm{rg}\, F$ ، فإنه يكون لدينا $r \le n$ و $r \le p$

حالة خاصة: عندما تكون الأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_p$ مستقلة خطيا $\mathrm{rg}\, F = \dim F = n$

خاصية :

رتبة مجموعة من الأشعة لا تتغير، إذا بدلنا شعاعين منها أو أضفنا شعاعا إلى شعاع آخر (من نفس المجموعة) أو ضربنا أحد الأشعة بعدد حقيقي غير معدوم، أو أضفنا الشعاع المعدوم إلى أحد الأشعة.

مثلا في الفضاء $\mathbb{R}^4$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ، نعتبر الأشعة :

$$v_1 = (1, 2, 3, 4) \quad , \quad v_2 = (-2, 1, 3, 0) \quad , \quad v_3 = (-3, -2, 7, 1) \quad , \quad v_4 = (2, 5, -1, 3)$$

إن رتبة هذه الأشعة الأربعة لا ينبغي أن تتجاوز رتبة الفضاء الكلي، وهي أربعة . فإذا كانت هذه الأشعة مستقلة فسيكون $\mathrm{rg} = \mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3, e_4) = 4$. أم إذا كانت هذه الأشعة مرتبطة فإن $\mathrm{rg} < 4$ ، وعندئذ ندرس استقلالية ثلاثة منها، فإذا وجدنا في إحدى الحالات أنها مستقلة فسيكون $\mathrm{rg} = 3$ ، أما إذا وجدنا في جميع حالات في دراسة استقلال ثلاثة أشعة منها أنها مرتبطة ، ستنقص الرتبة rg بواحد . أي يكون $\mathrm{rg} < 3$ ..

بما أن v_1 و v_2 و v_4 هي أشعة مستقلة خطيا، فإن $\mathrm{rg} = \mathrm{rg}(v_1, v_2, v_3, e_4) = \mathrm{rg}(v_1, v_2, e_4) = 3$

3.9 رتبة مصفوفة

رتبة مصفوفة A التي نرمز لها بـ $\mathrm{rg}(A)$ ، هي العدد الأعظمي للأشعة الأعمدة المستقلة خطيا في A .

إذا كانت A مصفوفة من النمط (n, p) لتطبيق خطي f من E في F بالنسبة لأساسين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فإنه

$$\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(f)=\dim \operatorname{Im} f=\operatorname{rg}\left(f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_p)\right)$$

حيث $\mathcal{A}=\left\{a_1,\ a_2,\cdots,\ a_p\right\}$ أساس للفضاء E، و $\mathcal{B}=\left\{b_1,\ b_2,\cdots,\ b_n\right\}$ أساس للفضاء F.

تمرين رقم 2

في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$، نعتبر الأشعة :

$$v_1=-e_1-e_2+2e_3 \quad , \quad v_2=e_1+2e_2+e_3 \quad , \quad v_3=e_1-e_2$$

أدرس الاستقلال الخطي لـ v_1، v_2، v_3، واستنتج بعد الفضاء $\mathrm{V}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.

الحل

لدينا الأشعة : $v_1=(-1,-1,2) \quad , \quad v_2=(1,2,1) \quad , \quad v_3=(1,-1,0)$

1. دراسة الاستقلال الخطي للأشعة v_1، v_2، v_3، والفضاء $\mathrm{V}=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha(-1,-1,2)+\beta(1,2,1)+\gamma(1,-1,0)=(0,0,0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha+\beta+\gamma &=0 \\ -\alpha+2\beta-\gamma &=0 \\ 2\alpha+\beta &=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+3\beta=0 \\ 2\alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \alpha=\beta=\gamma=0$$

والأشعة v_3، v_2، v_1 مستقلة خطيا. ومنه $\dim \mathrm{V}=3$

$$\ker(h+2\,id_{\mathbb{R}^3})=\langle(1,0,-1)\rangle$$

4.9 تركيب تطبيقين خطيين

وإذا كان $u:E\to E'$ و $v:E'\to E''$ تطبيقين خطيين، فإن التركيب $v\circ u:E\to E''$ هو تطبيق خطي.

ولدينا المخطط :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v\circ u"'] & E' \arrow[r, "v"] & E'' \end{tikzcd}$$

حيث $\forall x\in E \quad (v\circ u)(x)=v(u(x))$

تمرين رقم 3

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ معرف في الأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$، بالشكل :

$$f(e_1)=(8,1,1) \quad ، \quad f(e_2)=(3,4,3) \quad ، \quad f(e_3)=(2,2,6)$$

ليكن $u=x\,e_1+y\,e_2+z\,e_3$ شعاعا من $\mathbb{R}^3$. احسب $f(u)$ و $(f\circ f)(u)$.

الحل

ليكن $u=(x,y,z)$ شعاعا من $\mathbb{R}^3$. **نحسب** $f(x,y,z)$ و $(f\circ f)(u)$:

$$f(u)=f(x,y,z)=x(8,1,1)+y(3,4,3)+z(2,2,6)$$

$$f(x,y,z)=(8x+3y+2z,\ x+4y+2z,\ x+3y+6z)$$

$$(f\circ f)(u)=f\left(f(x,y,z)\right)=f\,(\underbrace{8x+3y+2z}_{x'},\underbrace{x+4y+2z}_{y'},\underbrace{x+3y+6z}_{z'})$$

$$f^{2}(x,y,z)=f(x',y',z')=(8x'+3y'+2z',\,x'+4y'+2z',\,x'+3y'+6z')$$

$$f^{2}(x,y,z)=(69x+42y+34z,\,14x+25y+22z,\,17x+33y+44z)$$

5.9 فضاء الصورة

إذا كان $E=E'$ فإن $f(E)$ يسمى **صورة التطبيق الخطي** f نرمز له $\operatorname{Im} f=f(E)$

$$=\{y\in F: y=f(x)\quad / x\in E\}$$

ملاحظة f غامر إذا $\operatorname{Im} f=F$

وبالتالي :

$$\forall y\in F,\exists x\in E: f(x)=y$$
$$\operatorname{rg}(f)\le \dim F$$

6.9 نواة الصورة العكسية

$f:E\to F$ تطبيق خطي.

إذا كان F' فضاء شعاعي من F فإن $f^{-1}(F')$ فضاء شعاعي جزئي من E.

لدينا: $x\in f^{-1}(F') \quad\Leftrightarrow\quad f(x)\in F'$

- بالفعل ، إذا كان x و x' من $f^{-1}(F')$

$$f^{-1}(F')\ni x:\ f(x)\in F'$$
$$f^{-1}(F')\ni x':\ f(x')\in F'$$
$$f(x)+f(x')=f(x+x')\in F'$$

وهذا يعني: $x+x'\in f^{-1}(F')$

- وإذا كان x من $f^{-1}(F')$ و λ من $\mathbb{R}$.

$$f^{-1}(F')\ni x: f(x)\in F'$$
$$\mathbb{R}\ni\lambda$$
$$\lambda f(x)=f(\lambda x)\in F'$$

وهذا يعني بأن: $f^{-1}(F')\ni \lambda x$

إذن $f^{-1}(F')$ فضاء شعاع جزئي من E

7.9 نواة تطبيق خطي

عندما $F'=\{0_F\}$ ، يسمى الفضاء الشعاعي الجزئي $f^{-1}\{0\}$ **نواة التطبيق** f ونرمز له بالرمز $\ker f$.

$$\ker f=f^{-1}\left(\{0_F\}\right)=f^{-1}(0_F)$$
$$=\{x\in E: f(x)\in\{0_F\}\}=\{x\in E: f(x)=0_F\}$$

تمرين رقم 4

نعتبر التطبيق الخطي $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$(x,y)\mapsto(2x-y,x+y,x)$$

تعيين $\operatorname{Im} f$ و $\ker f$

الحل

لدينا $\ker f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$\ker f \ni (x,y) = (2x-y,x+y,x)=(0,0,0)$$

التي نكافئ: $x=y=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+y=0 \\ x=0 \end{cases}$ ومنه $\ker f=\{(0,0)\}$

$$\operatorname{Im} f=\langle f(e_1),f(e_2)\rangle$$
$$f(e_1)=(1,0)=(2,1,1)$$
$$f(e_2)=(0,1)=(-1,1,0)$$
$$\operatorname{Im} f=\langle(2,1,1),(-1,1,0)\rangle$$

الشعاعان $(-1,1,0)$ و $(2,1,1)$ مستقلان فهما يشكلان أساس لـ $\operatorname{Im} f$، ومنه $\dim \operatorname{Im} f=\operatorname{rg}(f)=2$.

تمرين رقم 5

$\{u_1,u_2,u_3\}$ و $\{e_1,e_2\}$ الأساسان القانونيان لـ $\mathbb{R}^3$ و $\mathbb{R}^2$ على الترتيب.

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$ بحيث: $f(x,y,z)=(-x+2y+z,x-2y-z)$

عين $\operatorname{Im} f$ و $\ker f$

الحل

الفضاء الجزئي $\ker f$:

الأشعة (x,y,z) من $\ker f$ تحقق: $f(x,y,z)=(0,0)$.

$$(-x+2y+z,x-2y-z)=(0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-2y-z=0$$
$$\Leftrightarrow z=x-2y$$

إذن الشعاع (x,y,z) من $\ker f$ يأخذ الشكل:

$$(x,y,x-2y)=x\underbrace{(1,0,1)}_{a}+y\underbrace{(0,1,-2)}_{b}$$

والفضاء $\ker f$ مولد بالشعاعين المستقلين a و b، أي $\ker f=\langle(1,0,1);(0,1,-2)\rangle$.

$$\dim\ker f=2$$

الفضاء الجزئي $\operatorname{Im} f$:

الصورة $f(x,y,z)=(w_1,w_2)$ تنتمي إلى فضاء الصورة $\mathrm{Im}f=f(\mathbb{R}^2)$، ومنه :

$$(w_1,w_2)=(-x+2y+z\ ,x-2y-z\ )$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} w_1=-x+2y+z \\ w_2=+x-2y-z \end{cases} \Leftrightarrow\ w_1+w_2=0\ \Leftrightarrow\ w_1=-w_2$$

إذن صورة الشعاع (x,y,z) بالتطبيق f تأخذ الشكل:

$$(w_1,w_2)=(w_1,-w_1)=w_1\underbrace{(1,-1)}_{c}$$

والفضاء $\mathrm{Im}f$ مولد بالشعاع المستقل c، أي $\mathrm{Im}f=\langle(1,-1)\rangle$.

طريقة2:

$$f(e_1)=f(1,0,0)=(-1,1)$$
$$f(e_2)=f(0,1,0)=(2,-2)$$
$$f(e_2)=f(0,0,1)=(1,-1)$$

ومنه $\mathrm{Im}f=\langle f(e_1);f(e_2);f(e_3)\rangle=\langle(-1,1);(2,-2);(1,-1)\rangle$

هذه الأشعة الثلاثة المولدة لـ $\mathrm{Im}f$ مرتبطة خطيا. الشعاع $(1,-1)$ مستقل خطيا ويولد $\mathrm{Im}f$ فهو يشكل أساسا لـ $\mathrm{Im}f$، ومنه $\mathrm{Im}f=\langle(1,-1)\rangle$ $\qquad$ $\dim\mathrm{Im}f=\mathrm{rg}(f)=1$.

تمرين رقم 6

أ) في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$، نعتبر الفضاء الشعاعي الجزئي:

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x+y-z=0\}$$

هات أساسا للفضاء الجزئي G، ثم بين أن $F=\langle e_1+e_2+e_3\rangle$ هو فضاء إضافي لـ G في $\mathbb{R}^3$.

ب) f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ معرف في الأساس القانوني $\mathcal{B}$ بالشكل:

$$f(e_1)=(1,2,2)\quad,\quad f(e_2)=(1,0,1)\quad,\quad f(e_3)=(-1,-1,-2)$$

1. أحسب الصورة $f(x\,e_1+y\,e_2+z\,e_3)$. ثم عين الفضاء $\ker f$، ماذا تستنتج ؟
2. عين الفضائين $\ker(f-id_{\mathbb{R}^3})$ و $\ker(f+id_{\mathbb{R}^3})$. ($id_{\mathbb{R}^3}$ هو التطبيق المطابق في $\mathbb{R}^3$)

ج) h تطبيق خطي معرف بالشكل :

$$f:\mathbb{R}^3=F\oplus G\to F\oplus G$$
$$u=u_1+u_2\mapsto u_1-u_2\qquad (u_1\in F,\ u_2\in G)$$

1. بين أن التطبيق h هو تشاكل خطي لـ $\mathbb{R}^3$.
2. عين الفضائين $\mathrm{Ker}(h-id_{\mathbb{R}^3})$ و $\ker(h+id_{\mathbb{R}^3})$.

الحل

أ) تعيين فضاء المجموع F + G

1. تعيين أساس لـ G .

$$G\ni(x,y,z):\ 2x+y-z=0\ \Leftrightarrow\ z=2x+y$$

$$\Leftrightarrow \ (x,y,z)=(x,y,2x+y)=x(1,0,2)+y(0,1,1)$$

ومنه $\mathrm{G}=\langle(1,0,2),(0,1,1)\rangle$

والشعاعان $(1,0,2)$ و $(0,1,1)$ يشكلان أساسا لـ G

نبين أن $\mathrm{F}=\langle(1,1,1)\rangle$ هو فضاء إضافي لـ F في $\mathbb{R}^3$.

لدينا $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\langle(1,0,2),(0,1,1),(1,1,1)\rangle$

ندرس استقلال الأشعة $(1,0,2)$ و $(0,1,1)$ و $(1,1,1)$:

$$\mathrm{F}+\mathrm{G}\ni u=(x,y,z)=u_1+u_2=\underbrace{\alpha(1,0,2)+\beta(0,1,1)}_{u_1}+\underbrace{\delta(1,1,1)}_{u_2}$$

$$(2\alpha+\delta,\alpha+\beta+\delta,\beta+\delta)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+\delta &=0\\ \alpha+\beta+\delta &=0\\ \beta+\delta &=0\end{cases} \Leftrightarrow\ \alpha=\beta=\delta=0$$

ومنه الأشعة مستقلة، ويكون $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})=3$ والمجموع $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ مباشر في $\mathbb{R}^3$. ومنه $\boxed{\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}=\mathbb{R}^3}$

ب) التطبيق الخطي f :

1. الصورة $f(xe_1+ye_2+ze_3)$. والنواة $\ker f$:

$$f(x,y,z)=f(xe_1+ye_2+ze_3)=xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)$$
$$=x(1,0,2)+y(0,1,1)+z(1,1,1))$$

ومنه $f(x,y,z)=(x+z,y+z,2x+y+z)$

الفضاء الجزئي $\ker f$:

الأشعة (x,y,z) من $\ker f$ تحقق: $f(x,y,z)=(0,0,0)$.

$$(x+z,y+z,2x+y+z)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+z=0\\ y+z=0\\ 2x+y+z=0\end{cases} \Leftrightarrow\ x=y=z=0$$

ومنه $\ker f=\langle(0,0,0)\rangle$ والتطبيق الخطي f تقابلي، أي f تشاكل خطي في $\mathbb{R}^3$. $\ker f=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

2. تعيين الفضائين $\ker\left(f-id_{\mathbb{R}^3}\right)$ و $\ker\left(f+id_{\mathbb{R}^3}\right)$.

تعيين $\ker\left(f-id_{\mathbb{R}^3}\right)$:

$$f(x,y,z)-(x,y,z)=(x+z,y+z,2x+y+z)-(x,y,z)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow\ (z,z,2x+y)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow \begin{cases}z &=0\\ z &=0\\ 2x+y &=0\end{cases} \Leftrightarrow\ 2x=-y\ \wedge\ z=0$$

$$f(x,y,z)=(x,-2x,0)=x(1,-2,0)$$

ومنه $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1,-2,0) \rangle$

تعيين $\mathrm{Ker}(f + id_{\mathbb{R}^3})$:

$$f(x,y,z) + (x,y,z) = (-y,-x,-z) + (x,y,z) = (0,0,0)$$

$$f(x-y,-x+y,0) = (0,0,0)$$

$$f(x,y,z) + (x,y,z) = (x+z, y+z, 2x+y+z) + (x,y,z) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (z,z,2x+y) = (0,0,0) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+z & =0 \\ 2y+z & =0 \\ 2x+y+2z & =0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z = -2x = -2y$$

ومنه $\ker(f + id_{\mathbb{R}^3}) = \langle (1,1,-2) \rangle$

8.9 مصفوفة تطبيق خطي

ليكن $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ أساس للفضاء الشعاعي E، و $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ أساس للفضاء الشعاعي F. والتطبيق الخطي $f \ni \mathcal{L}(E,F)$ $\left(\dim \mathcal{L}(E,F) = p \times n\right)$

من أجل كل شعاع $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ من E بالنسبة للأساس $\mathcal{A}$:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_p) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(a_i) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

حيث مركبات الصورة $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ في الأساس $\mathcal{B}$ هي:

$$(*) \quad \begin{cases} y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1p} x_p \\ y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2p} x_p \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{np} x_p \end{cases}$$

وبذلك نحصل على الأعداد $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1p}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2p}, \cdots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{np}$. التي نرمز لها بـ:

$$M = M(f) = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,p \\ j=1,\ldots,n}}$$

وهي تمثل التطبيق الخطي f الذي ينقل الفضاء E إلى الفضاء F.

تسمى (*) العبارة التحليلية للتطبيق الخطي f بالنسبة للأساسين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$.

إذن يتحدد التطبيق الخطي f بإعطاء M: مصفوفة المركبات $\left(f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_p)\right)$ في الأساس $\mathcal{B}$، التي يمكن التعبير عنها بمصفوفة الأعداد الآتية:

$$\begin{array}{cccc|c} f(a_1) & f(a_2) & & f(a_p) & \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}$$

وهي بدورها تمثل f بالنسبة للأساسين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$. وبالعكس كل مصفوفة تعرف تطبيق خطي.

9.9 مصفوفة تركيب تطبيقين خطين

نعتبر مركب التطبيقين الخطيين f و g :
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^p \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^q \end{tikzcd}$$

إذا كانـــت $A = M(f) \in \mathcal{M}_{m\,p}(\mathbb{R})$ و $B = M(g) \in \mathcal{M}_{p.m}(\mathbb{R})$ ، فـــإن مصـــفوفة التطبيـــق الخطـــي $g \circ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ من $\mathcal{M}_{m.q}(\mathbb{R})$ تتعرف بالشكل : $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f) = B \cdot A$

مثال

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \mapsto (x - y, -y, 2x + y)$$
$$g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y + z + t, y - t)$$

باستخدام المصفوفات نعين $f \circ g$

مصفوفتا f و g :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g) = A \cdot B$$
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

والتطبيق الخطي $f \circ g$ معرف كما يلي: $f(x, y, z, t) = (x + z + 2t, -y + t, 2x + 3y + 2z + t)$

تمرين رقم 7

ليكن g التطبيق الخطي الذي مصفوفته بالنسبة للأساس القانوني هي:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$$

1. بين أن g تقابلي. أحسب A^2 و A^3. ماذا تستنتج ؟
2. جد الشعاع V من $\mathbb{R}^3$ بحيث $g(V)=(1,2,3)$.
3. عين الفضاء الشعاعي الجزئي E حيث:

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\left(g+g^2+g^3\right)(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}\right\}$$

4. عين M_{φ^2} مصفوفة $\varphi\circ\varphi$ حيث $\varphi=id_{\mathbb{R}^3}-g$ و $id_{\mathbb{R}^3}$ هو التطبيق المطابق لـ $\mathbb{R}^3$.

الحل

1. نبين أن g تقابلي، لدينا $g(x,y,z)=(-x,-z,2x+y+z)$

نلاحظ بأن $\ker g=\{(0,0,0)\}$ ومنه g تقابلي.

حساب A^2 و A^3.

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad ، \quad A^3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=I_3$$

ومنه $A\cdot\left(-A^2\right)=I_3 \wedge \left(-A^2\right)\cdot A=I_3$

أي $A^{-1}=-A^2$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

2. الشعاع V من $\mathbb{R}^3$: $g(V)=(1,2,3)$ هو حل للمعادلة:

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\2&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

وبالضرب في A^{-1} عن اليسار لطرفيها، نجد:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\7\\-2\end{pmatrix}=V$$

3. تعيين الفضاء E حيث:

لدينا

$$A+A^2+A^3=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&-2&-2\\2&2&0\end{pmatrix}$$

نعبر عن العلاقة $\left(g+g^2+g^3\right)(x,y,z)=0_{\mathbb{R}^3}$ مصفوفيا بالكتابة:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وحلها هو الشعاع المعدوم $0_{\mathbb{R}^3}$.

4. تعيين الصفوفة M_{φ^2}

مصفوفة $\varphi \circ \varphi$ حيث $\varphi = id_{\mathbb{R}^3} - g$ حيث $id_{\mathbb{R}^3}$ هو التطبيق المطابق لـ $\mathbb{R}^3$.

$$M_{\varphi} = I_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\varphi^2} = \left(M_{\varphi}\right)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

المراجع:

- L. Amyotte, *Introduction à l'algèbre linéaire et à ses applications*, 2ème éd., kanada: édition du renouveau pédagogique INC, 2003.
- Y. Dodge, *Mathématiques de base pour économistes*, Paris, Springer, 2002.
- J. Cellier, *Algèbre linéaire: des bases aux applications*, Rennes: presses universitaires de Rennes, 2008.
- B. Guerrien, *Algèbre linéaire pour économistes*, 4ème éd., Paris, Economica, 1997.
- P. Tauvel, *Exercices d'algèbre générale et arithmétique*: 470 *énoncés avec solutions détaillées*, Paris, Dunod, 2004.