Travaux dirigées de physique 2- (Electrostatique) : Correction

Exercice N°1 : Quelle est la force coulombienne de répulsion s'exerçant entre deux protons dans un noyau de fer si on suppose que la distance qui les sépare est de $\mathbf{4.10^{-15}}$ **m**

Correction de l'exercice N°1 :

Donnés: $r = 4.10^{-5}$m , $q_1 = q_2 = 1,6.10^{-19}$ C

La force de répulsion entre les deux protons est

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\, 10^{19}} = 8.85\, 10^{-12}\ F/m$$

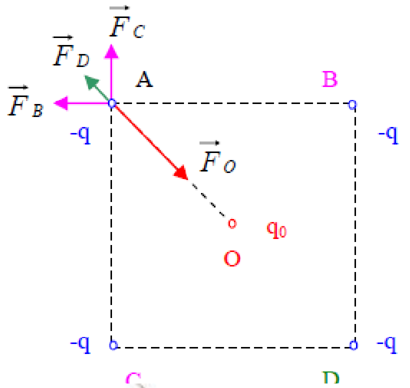
AN : $F = 14N$

Exercice N°2 : Un système moléculaire est équivalent à quatre charges ponctuelles identiques **- q (q > 0)** sont fixées aux sommets **A, B, C** et **D** d'un carré de côté **a**. Une cinquième charge $\mathbf{q_0 > 0}$ est maintenue fixe au centre **O** du carré.

Déterminer la valeur de $\mathbf{q_0}$ en fonction de q pour que la force électrostatique totale qui s'exerce sur chacune des cinq charges soit nulle.

Correction de l'exercice N°2 :

La force électrostatique $\vec{F}(O)$ exercée par les quatre charges identiques - q sur la charge q_0 est nulle quelle que soit la valeur de q_0. Il reste à évaluer la force totale exercée sur chacune des charges - q, par exemple la charge placée en A (figure 1).



D'après le principe de superposition :

$$\vec{F}(A) = \sum_{i=1}^{4}\vec{F}_i = \vec{F}_B + \vec{F}_C + \vec{F}_D + \vec{F}_O = \frac{q^2}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^3} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^3} + \frac{\overrightarrow{DA}}{\left\|\overrightarrow{DA}\right\|^3}\right) - \frac{qq_0}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OA}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^3}$$

Or,

* $\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = a$

* $DA^2 = AB^2 + BD^2 = 2a^2$ aisni, $\left\|\overrightarrow{DA}\right\| = \sqrt{2}\,a$

* $OA = \frac{DA}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

Ainsi,

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \overrightarrow{DA}\right) - \frac{qq_0}{4\Pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 \overrightarrow{OA}$$

Or,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et } \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{F}(A) = \frac{q^2}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \frac{\sqrt{2}}{4}\overrightarrow{DA}\right) - \frac{qq_0}{4\Pi\varepsilon_0}2\sqrt{2}\overrightarrow{OA}$$

Puisque : $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{CO}$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) = 2\overrightarrow{OA} \;;\; \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{OA};$$

$$= \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0 a^3}\left(q(2 + \frac{\sqrt{2}}{4}2) - q_0 2\sqrt{2}\right)\overrightarrow{OA} = \frac{q}{4\Pi\varepsilon_0 a^3}\left(q(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}) - q_0 2\sqrt{2}\right)\overrightarrow{OA}$$

La force $\vec{F}(A)$ est nulle lorsque :

$$q(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}) - q_0 2\sqrt{2} = 0$$

Ainsi,

$$q_0 = q\frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{2}} = q\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$$

Exercice N°3 (Force de Coulomb) : Trois charges ponctuelles **+ q**, **- q** et **- q** sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté **a**.

1- Déterminer les caractéristiques des forces électrostatiques dues à l'interaction coulombienne.

2- Déterminer les caractéristiques du champ électrostatique régnant au centre du triangle.

Application numérique : q = 0,1 nC et **a = 10 cm**.

Correction de l'exercice N°3 (Force de Coulomb)

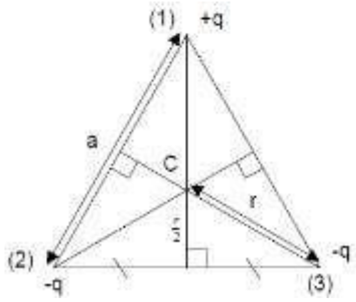
Trois charges ponctuelles + q, - q et - q sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté **a**.

1. Caractéristiques des forces électrostatiques dues à l'interaction coulombienne

- + q et + q : Interaction répulsive ($q_1 q_2 > 0$).

- +q et -q : Interaction attractive ($q_1 q_2 < 0$).

$$\|\vec{F}\| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1.q_2|}{a^2} \overset{AN}{\Rightarrow} F = 9.10^{-9}\ N \cong 10^{-8}\ N \ \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ SI\right)$$

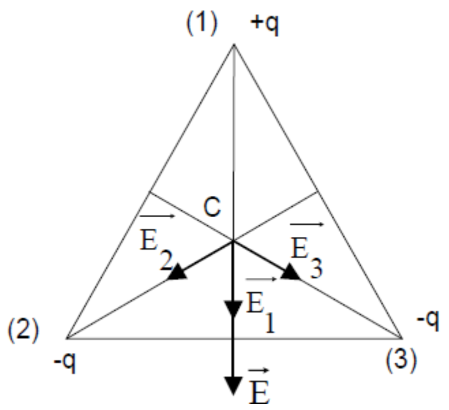


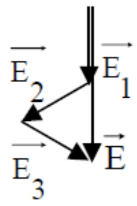
2. Caractéristiques du champ électrostatique régnant au centre C du triangle :

* Triangle équilatéral ⇒ le centre C est situé à la distance

$r = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Sachant que : $r^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{r^2}{4} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{3}}$





* Théorème de superposition :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 .$$

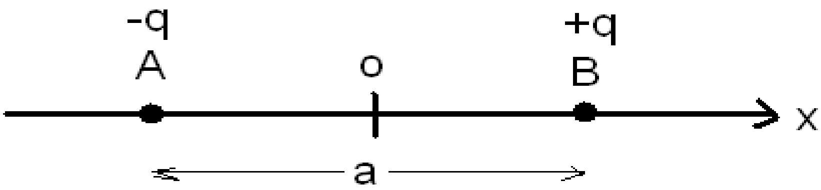
* En intensité : $E = E_1 + E_2 \cos\frac{\pi}{3} + E_3 \cos\frac{\pi}{3}$

Avec $E_1 = E_2 = E_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \Rightarrow$

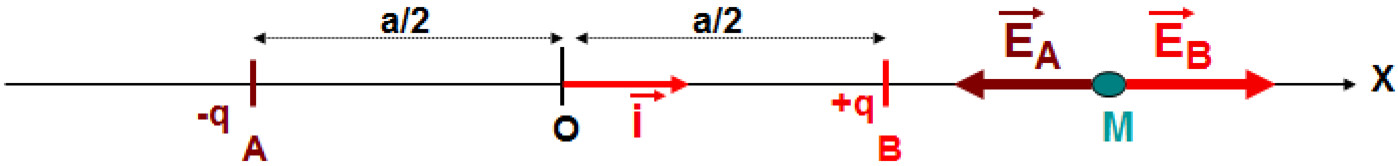
$$E = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1 + 2\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$$

* A.N. $E = 540 V/m$

Exercice N°4 : Calculer le champ créé par un dipôle électrique le long de son axe. Les deux charges **-q** et **+ q** sont séparées par la distance **a**. Tracer la courbe **E = E(x).**



Correction de l'exercice N°4 : Calcul du champ électrique crée par un dipôle le long de son axe



1er cas: le point M est à droite du point B : $\|\vec{OM}\| = x \; ; \; x > a/2$

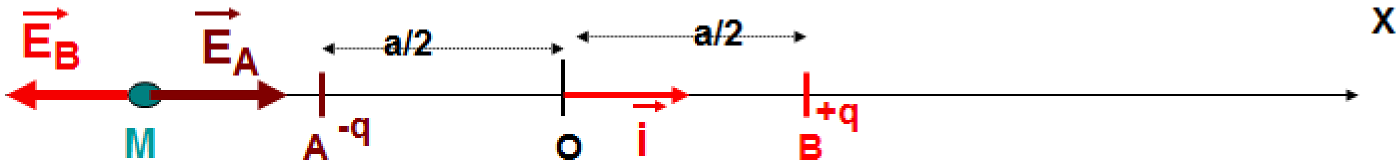
Le champ électrique crée par les 2charges au point M est:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = k\frac{-q}{\|\vec{AM}\|^2}\frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} + k\frac{q}{\|\vec{BM}\|^2}\frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|}$$

Avec:

$$\begin{cases} \|\vec{AM}\| = x + a/2 \\ \|\vec{BM}\| = x - a/2 \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(M) = kq\left(\frac{-1}{(x+a/2)^2} + \frac{1}{(x-a/2)^2}\right)\vec{i} \Rightarrow \vec{E}(M) = kq\frac{2ax}{(x^2 - \frac{a^2}{4})^2}\vec{i}$$

2ème cas: le point M est à gauche du point A : $\|\vec{OM}\| = x \; ; \; x < -a/2$



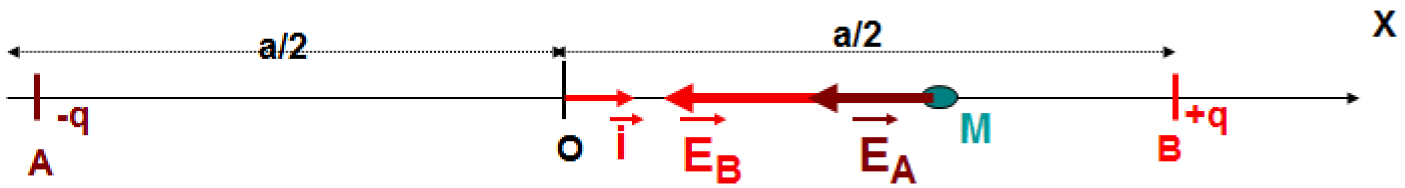
Le champ électrique crée par les 2charges au point M est:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = k\frac{-q}{\|\vec{AM}\|^2}\frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} + k\frac{q}{\|\vec{BM}\|^2}\frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|}$$

Avec:

$$\begin{cases} \|\vec{AM}\| = |x| - a/2 \\ \|\vec{BM}\| = |x| + a/2 \\ \dfrac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} = \dfrac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|} = -\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(M) = kq\left(\frac{1}{(|x| - a/2)^2} - \frac{1}{(|x| + a/2)^2}\right)\vec{i} = \vec{E}(M) = kq\frac{2a|x|}{(x^2 - \frac{a^2}{4})^2}\vec{i}$$

3ème cas: le point M est entre O et B : $\|\vec{OM}\| = x\ ;\ \ 0 < x < a/2$



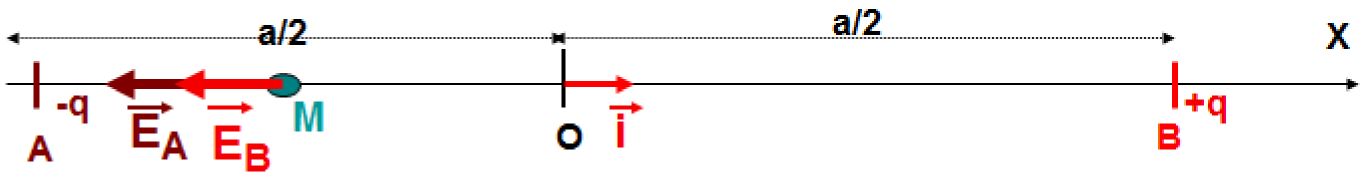
Le champ électrique crée par les 2charges au point M est:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = k\frac{-q}{\|\vec{AM}\|^2}\frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} + k\frac{q}{\|\vec{BM}\|^2}\frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|}$$

Avec:

$$\begin{cases} \|\vec{AM}\| = |x| + a/2 \\ \|\vec{BM}\| = a/2 - x \\ \dfrac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} = \dfrac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|} = -\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(M) = -2kq\frac{x^2 + \frac{a^2}{4}}{(x^2 - \frac{a^2}{4})^2}\vec{i}$$

4ème cas: le point M est entre O et A : $\|\vec{OM}\| = x\ ;\ \ -a/2 < x < 0$



Le champ électrique crée par les 2charges au point M est:

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M) = k\frac{-q}{\|\vec{AM}\|^2}\frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} + k\ q\ \ BM$$

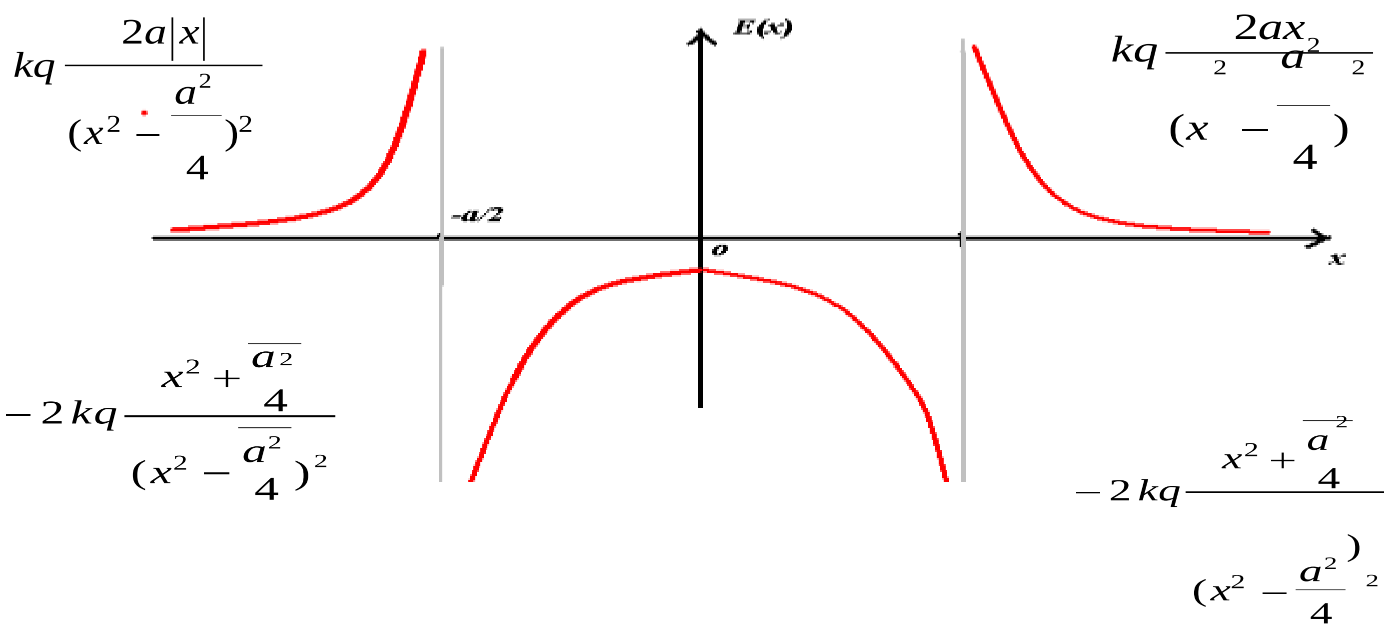
$$\overline{\left\|\vec{BM}\right\|^2}\ \overline{\left\|\vec{BM}\right\|}$$

Avec:

$$\begin{cases} \left\|\vec{AM}\right\| = a/2 - x \\ \left\|\vec{BM}\right\| = a/2 + |x| \\ \dfrac{\vec{AM}}{\left\|\vec{AM}\right\|} = \vec{i} \;;\; \dfrac{\vec{BM}}{\left\|\vec{BM}\right\|} = -\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(M) = kq\left(\frac{-1}{(x+a/2)^2} + \frac{-1}{(a/2-x)^2}\right)\vec{i} \Rightarrow \vec{E}(M) = -2kq\frac{x^2+\frac{a^2}{4}}{(x^2-\frac{a^2}{4})^2}\vec{i}$$

5ème cas: le point M et O sont confondus

$$\vec{E}(M) = -2kq\frac{x^2+\frac{a^2}{4}}{(x^2-\frac{a^2}{4})^2}\vec{i}$$ **pour x = 0** $\Rightarrow$ $$\vec{E}(M) = -8\frac{kq}{a^2}\vec{i}$$



Exercice 5 : Potentiel et champ sur l'axe d'un polygone régulier

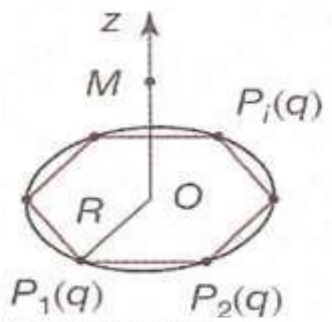
n charges ponctuelles **+q > 0** sont disposées aux **n** sommets d'un polygone régulier situé dans le plan **xOy**. L'axe **Oz** est un axe de symétrie d'ordre **n** du polygone. On pose **OP$_i$ = R**.

1- Établir le potentiel électrostatique **V(M)** créé en un point **M** de l'axe **Oz** de la distribution.

2- En déduire le champ électrostatique créé en **M**.

3- Représenter les courbes **V(z)** et **E(z)**.

4- Interpréter physiquement le cas **n** →∞.



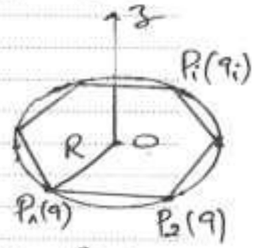
Correction de l'exercice 5

① Il suffit d'utiliser le principe de superposition :

$$V = \frac{\Sigma Q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_iM} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_iM} \Rightarrow V = \frac{nq}{4\pi\varepsilon_0 P_1M}$$ où P_1 est l'un des sommets du polygone.

On obtient :

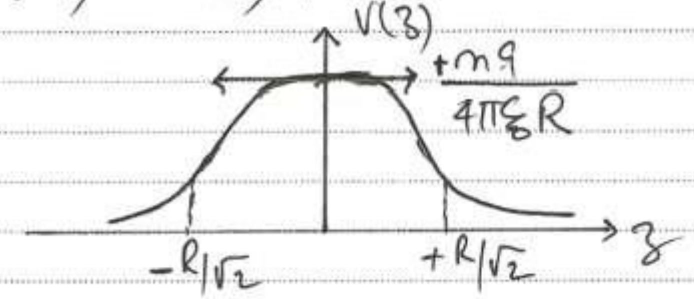
$$\boxed{V(z) = \frac{nq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}}$$



② La relation champ-potentiel s'écrit

$$\boxed{E(z) = -\frac{dV}{dz} = \frac{+mqz}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

③ Pour $z>0$, $V(z)$ est strictement décroissant et par symétrie $V(-z)=V(z)$, on obtient :

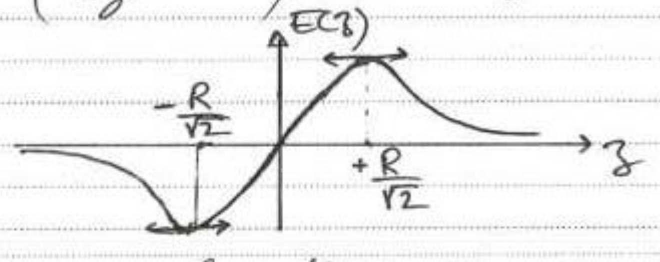


Le champ change de sens à la traversée du plan xOy. Il est continu ($E(0)=0$) et représente à chaque instant l'opposé de la dérivée de la fonction $V(z)$.

$$\Rightarrow \frac{dE}{dz} = \frac{mq}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2}\,\frac{z(2z)}{(R^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

$$= \frac{mq}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(R^2+z^2-3z^2)}{(R^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dz}=0 \text{ ou } \left(\frac{d^2V}{dz^2}=0\right) \Leftrightarrow z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}.$$



④ Lorsque $m \to \infty$, la distribution correspond à un anneau de centre O et de rayon R, chargé uniformément en longueur λ, tel que :

$$Q_{totale} = mq = \lambda 2\pi R$$

$$\Rightarrow \boxed{V(z) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{E(z) = \frac{zR}{2\varepsilon_0 (R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}},\ z>0$$

Exercice 6 : Un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{p} = q\,a\,\vec{\imath}$ est constitué de deux charges ponctuelle **- q** et **+ q** placées dans le vide aux points **A** et **B** de l'axe **OX** de part et d'autre de **O**. La distance **AB = a**.

Un point M éloigné des charges est repéré par ses coordonnées polaire **r** et **θ**.

1- Calculer **V(M)**.

2- En déduire le module et l'orientation du champ électrostatique au point **M**.

Le dipôle est maintenant placé dans un champ extérieur uniforme $\mathbf{E_0}$ orienté suivant l'axe **OX**. Le potentiel de ce champ est nul à l'origine **O**.

3- Donner l'expression du potentiel électrostatique au point **M**.

4- Quelles sont les surfaces équipotentielles **V = 0**.

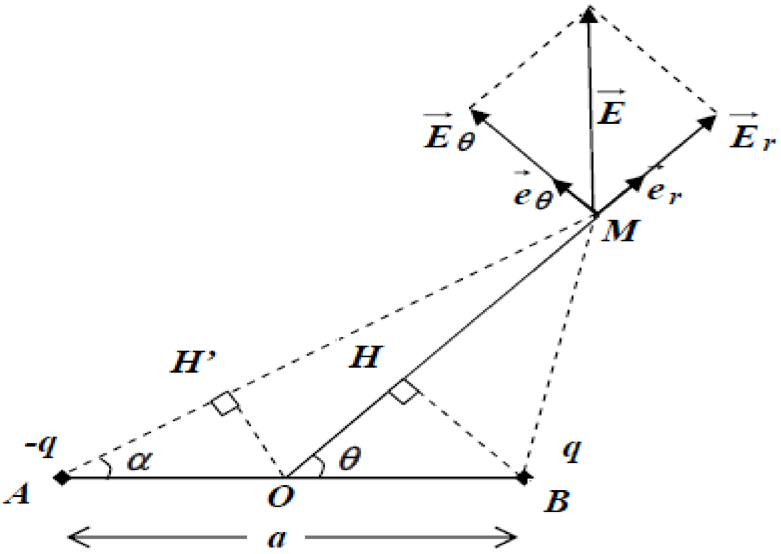
Correction de l'exercice 6

$r = OM = OH + HM$

$r_1 = AM = AH' + H'M$

$r_2 = BM$

$r >> a \Rightarrow \theta \approx \alpha$



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

$r_1 = AH' + H'M \approx \frac{a}{2}\cos\alpha + r$ et $r = OH + HM \approx \frac{a}{2}\cos\theta + r_2$

On en déduit : $r_1 - r_2 \approx a\cos\theta$ et $r_1 r_2 = r^2 - \frac{a^2}{4}\cos^2\theta \approx r^2$

Soit : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}$

2- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2a\cos\theta}{r^3}$ et $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\sin\theta}{r^3}$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\sqrt{4a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

L'orientation du champ peu être définie par l'angle φ que fait E avec OM : $tg\varphi = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2}tg\theta$

3- Le nouveau potentiel est la somme du potentiel du dipôle et du potentiel extérieur issu de E_0.

$V'(M) = V(M) + V_0$.

$\vec{E}_0 = E_0\vec{i}$ et la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ donnent : $V_0 = -\int E_0 dx = -E_0 x + Cte$

A l'origine $V_0(O) = 0 \Rightarrow Cte = 0$, d'où $V_0 = -E_0 x$. avec $x = r\cos\theta$.

$$V_{Total}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2} - E_0 r\cos\theta$$

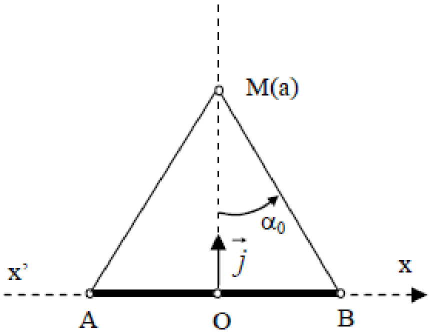
4- $V_{Total} = 0 \Rightarrow \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^2} - E_0 r\right)\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{r^2} - E_0 r\right) = 0$ et dans ce cas $r = \sqrt[3]{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{E_0}}$, ce qui définit une sphère de rayon r et de centre O comme surface équipotentielle.

Ou $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2$, ce qui définit le plan médiateur OY comme surface équipotentielle.

Exercice N°7 (Segment de droite uniformément chargé avec la densité linéique) Soit un segment **AB** uniformément chargé avec une densité linéique **λ > 0** (voir figure).

On désigne par **O** le milieu du segment **AB**. Calculer le champ **E** crée par cette distribution en tout point **M** sur une distance a de la médiatrice de **AB** et en un point **M** appartenant au segment **AB**.



Correction de l'exercice N°7

1) Le point M est sur la médiatrice de AB

Considérons les points A et B sur l'axe x'x tel que l'origine O soit le milieu de AB (figure 2). Deux éléments de charges dq_1 et dq_2, centrés en deux points P_1 et P_2 symétriques par rapport à O, créent en M des champs électrostatiques élémentaires respectivement $d\vec{E_1}$ et $\vec{E_2}$. La résultante de ces champs est portée par la médiatrice (OM), par exemple l'axe y′y de vecteur $\vec{j}$.

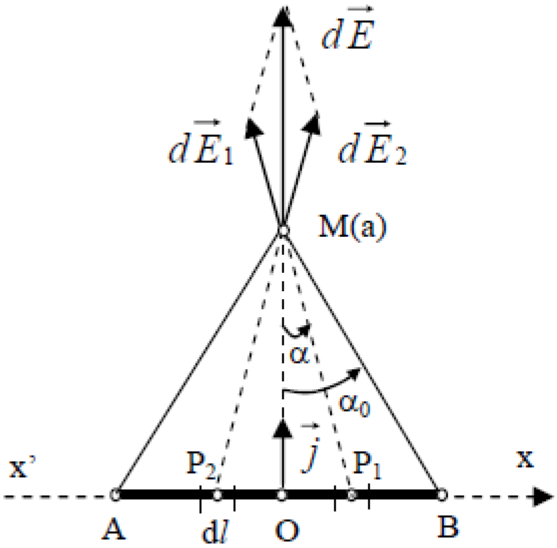


Figure 2

Le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par l'ensemble de la charge portée par le segment AB est donc, par raison de symétrie, dirigé suivant l'axe des y. Soit,

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{P_1M}}{\left\|\overrightarrow{P_1M}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{\vec{u}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2}\cos\alpha\,\vec{j}$$

Si on choisit α comme variable d'intégration, on aura :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\frac{\cos\alpha}{a}\,d\alpha\,\vec{j}$$

avec, $tg\alpha = \dfrac{x}{a}$

$$dx = a(1+tg^2\alpha)d\alpha = \frac{a}{\cos^2\alpha}d\alpha$$

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2}$$

Pour x = - L, $\alpha = -\alpha_0$ et pour x = + L, $\alpha = \alpha_0$

Soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\sin\alpha_0\,\vec{j} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}}\vec{j}$$

1-3 Cas limite

• Si le point M est très éloigné de l'origine O (a >> L), on a :

$$\sin\alpha_0 = \frac{L}{\sqrt{L^2+a^2}} \cong \alpha_0 \cong \frac{L}{a}$$

et donc,

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{2\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par une charge Q = 2λL concentrée en O.

• Si le point M est très proche du segment (L >> a), on a :

$$\alpha_0 \to \frac{\Pi}{2}$$

et

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0 a}\vec{j}$$

C'est le champ équivalent à celui créé en M par un fil de longueur infinie uniformément chargé.

2) Le point M appartient à (AB)

Un élément de charge dq = λ dx centré en P crée en M un champ élémentaire $d\vec{E}$ porté par i (figure 3) :

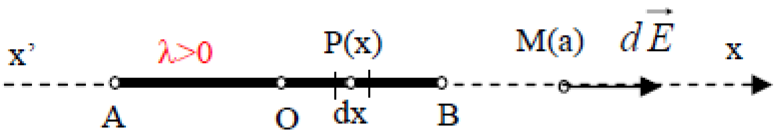


Figure 3

$$d\vec{E}_1 = \frac{dq}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^3} = \frac{\lambda dx}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{\vec{i}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{dx}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{4\Pi\varepsilon_0}\int_{-L}^{+L}\frac{-d(a-x)}{(a-x)^2}\vec{i} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

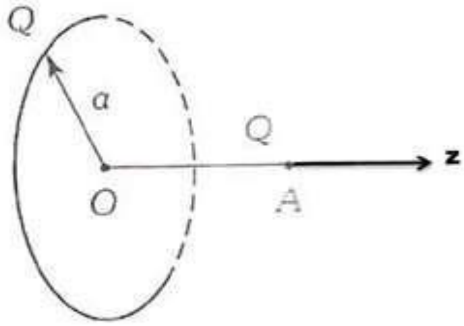
soit,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\Pi\varepsilon_0}\frac{L}{(a^2-L^2)}\vec{i}$$

Si le point M est très éloigné du segment [AB] (a >> L), on a :

$$\vec{E} \cong \frac{2\lambda L}{4\Pi\varepsilon_0 a^2}\vec{i}$$

Exercice N°8 (couronne circulaire électrisée) : Soit une couronne circulaire de centre **O** et de rayons extrêmes **a** et **b (b > a)**, chargée uniformément avec la densité **σ > 0**.



1. Calculer le potentiel **V(M)** créé par la couronne au point **M** de son axe de symétrie de révolution **Oz** ($\overline{OM} = z$). Représenter **V(z)**.
2. En déduire le champ électrostatique $\vec{E}(M)$.
3. Montrer que lorsque la largeur **b - a** est faible devant le rayon **a**, la distribution de charge est équivalente à une distribution linéique dont on déterminera la densité linéique de charge **λ**.
4. Soit **Q** la charge totale de la distribution linéique.

4- 1- Établir en fonction de **Q, a, ε_0** et **z** le potentiel **V(M)** puis le champ électrostatique $\vec{E}(M)$.

4- 2- Déterminer les valeurs de **z** pour lesquelles le champ présente un extremum. Représenter $\vec{E}(z)$.

5. On dispose sur l'axe **Oz** de la distribution linéique circulaire **(Q)**, des charges positives réparties uniformément sur le segment **OA** de longueur **a** (le rayon précédent) et de charge **Q** (la charge précédente).

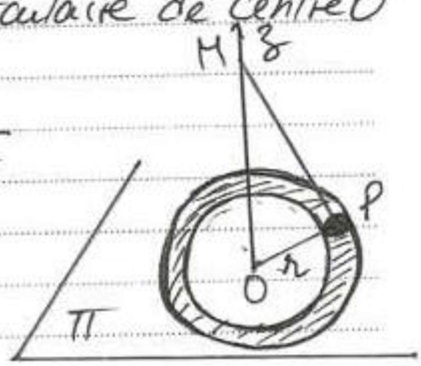
Déterminer l'expression de la résultante des forces $\vec{F}$ qu'exerce la distribution circulaire sur la distribution du segment **OA**.

Correction de l'exercice N°8

① Une charge élémentaire dq situé autour du point P de la distribution surfacique crée un potentiel élémentaire au point M :

$$dV(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon PM} = \frac{\sigma ds}{4\pi\varepsilon PM}$$

On découpe une couronne élémentaire circulaire de centre O et de rayons r et r+dr :



$$dS = 2\pi r\,dr \quad \text{et} \quad PM = \sqrt{r^2+z^2}$$

$$\Rightarrow \quad dV(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\,\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow \quad V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\int_a^b \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(\sqrt{b^2+z^2} - \sqrt{a^2+z^2}\right)$$

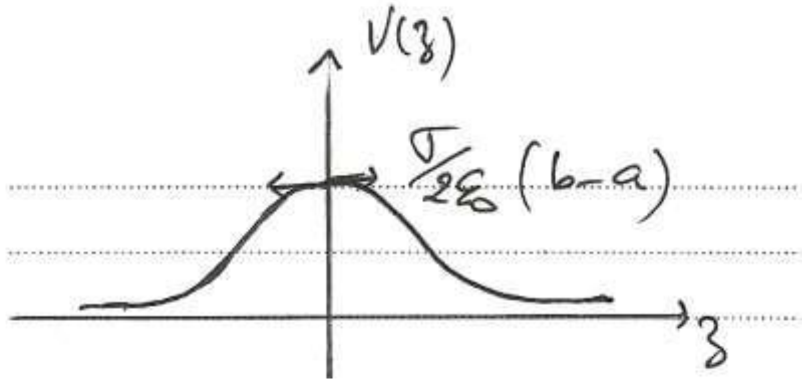
On remarque que $V(M)$ est maximal pour $z=0$ et décroît de manière symétrique lorsque l'on s'éloigne des charges.

② On déduit le champ $\vec{E}(M)$ par la relation champ-potentiel. Le champ $\vec{E}(M)$ appartient nécessairement à l'axe de symétrie de révolution, et ne dépend (comme le potentiel) que de la variable z.

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E(z)\,\vec{u}_z = -\,\vec{\text{grad}}\,V(z) = -\frac{dV}{dz}\,\vec{u}_z$$

$$\boxed{E(z) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right] \text{ pour } z>0.}$$

. Le plan de la couronne (π) étant plan de symétrie de la distribution, $E(-z) = -E(z)$, d'où la variation pour tout z -



③ Lorsque $b-a$ est faible, toutes les charges se trouvent à la même distance PM du point M.
$\Rightarrow$ $b-a$ est alors équivalent à dr de la question ①.

$\Rightarrow$ La conservation de la charge :

$$Q = \sigma\pi(b^2-a^2) = \lambda\, 2\pi a$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{\sigma(b^2-a^2)}{2a}$$

④ Le calcul du potentiel est immédiat (toutes les charges sont équidistantes de M) :

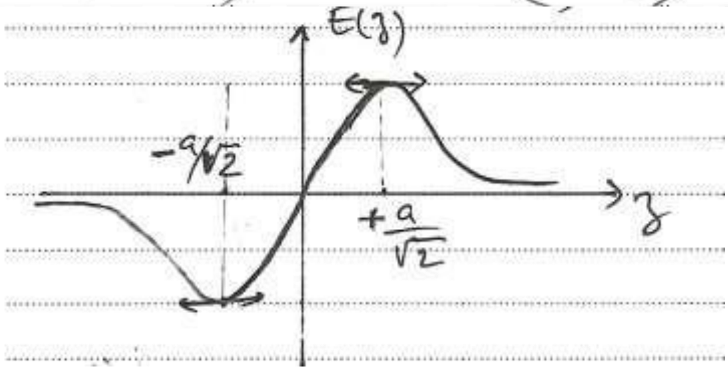
$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 PM} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

Le champ $\vec{E}$ se déduit de $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$:

$$\Rightarrow \begin{cases} E(z) = -\dfrac{dV}{dz} = \dfrac{Qz}{4\pi\varepsilon(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{pour } z>0 \\ E(-z) = -E(z) \end{cases}$$

L'extremum correspond à $\frac{dE}{dz}=0$, soit :

$$\frac{1}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + z\,\frac{(-\frac{3}{2}2z)}{(a^2+z^2)^{5/2}} = 0 = \frac{a^2+z^2-3z^2}{(a^2+z^2)^{5/2}} \Rightarrow z = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$



5 La densité linéique de charge du segment OA est telle que $Q = \lambda' a$.
Toute charge élémentaire $dq' = \lambda' dz$ est soumise à une force élémentaire portée par Oz et de sens $\vec{E}(z)$, c'est-à-dire $\vec{u_z}$.

$$\Rightarrow \quad dF(z) = dq'\,E(z) = \lambda' E(z)\,dz = -\lambda' dV \quad \left(E(z) = -\frac{dV}{dz}\right)$$

Sur tout le segment OA : $\vec{F} = -\lambda'[V(a)-V(0)]\,\vec{u_z}$

(L'intégration se fait entre $\underline{0}$ et $\underline{a}$).

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{Q}{a}\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon a\sqrt{2}}\right]\vec{u_z} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon a^2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\vec{u_z}.$$

Remarque : Cette force tend à éloigner les charges de même signe.

Exercice N° 9 : Champ créé par un disque ou un plan uniformément chargé en surface

Soit une distribution surfacique uniforme **($\sigma > 0$)**.

1. Sa géométrie est celle d'un disque de centre **O** dans le plan ***xOy***. Établir l'expression du champ électrostatique en un point ***M*(*z*)** de l'axe ***Oz***. Représenter le graphe ***E*(*z*)**.

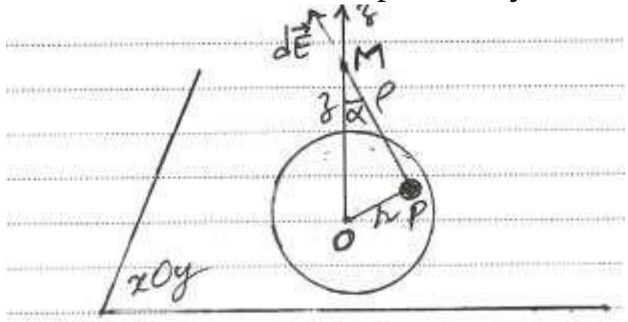
2. Sa géométrie est celle d'un plan infini ***xOy***. Exprimer le champ électrostatique en un point ***M*(*z*)** de l'axe ***Oz***. Représenter le graphe ***E*(*z*)**.

Correction de l'exercice N° 9

1) La symétrie de la distribution de charges impose de choisir les coordonnées cylindriques. Tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie de la distribution de charges.

⇒ Le champs est donc porté par Oz , $M \in Oz$: $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$

Le plan xOy qui contient la distribution est aussi un plan de symétrie, donc : $E(-z) = -E(z)$



Raisonnons sur $z > 0$. Le champ élémentaire crée par la charge élémentaire $dq_p = \sigma dS$ en M, tel que PM = ρ est :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma ds}{PM^2}\vec{u}_{PM}$$

De composante utile : (la composante utile) $dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma ds}{\rho^2}$ (projection sue Oz)

Découpons une surface élémentaire dS (couroune circulaire comprise entre r et r + dr)

⇒ dS = 2πrdr

Avec r = z tan α et $dr = \frac{z}{cos^2\alpha}\,d\alpha$

D'autre part : z = ρ cosα et $\rho = \frac{z}{cos\alpha}$

$$\Rightarrow \quad E(z) = \int_0^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi r dr}{\rho^2}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\alpha_{max}} \frac{z\tan\alpha\,\frac{z\,d\alpha}{\cos^2\alpha}}{z^2/\cos^2\alpha}\cos\alpha$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\alpha_{max}} \sin\alpha\, d\alpha$$

⇒ Pour $z > 0$:

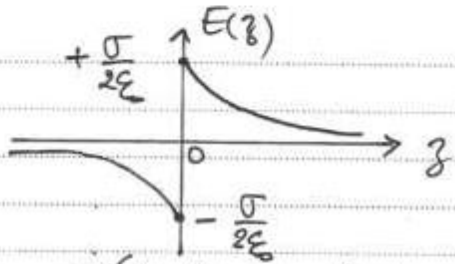
$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \cos\alpha_{max}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)}$$

Le champ s'éloigne vectoriellement des charges positives et change de sens à la traversée du disque chargé.

⇒ la discontinuité entre $z \to 0^+$ et $z \to 0^-$ est de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

• $E(-z) = -E(z)$



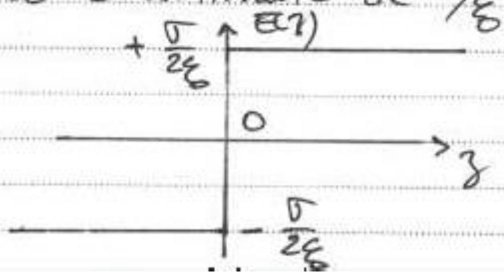
② La démonstration précédente se conserve. Il suffit d'intégrer pour la variable h entre 0 et R_∞, ou pour la variable α entre 0 et $\alpha_{max} = \frac{\pi}{2}$ ⇒

$$E(z) = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{pour } z>0$$

et

$$E(-z) = -E(z)$$

On observe encore la discontinuité de σ/ε_0 à la traversée du plan chargé.



* Discontinuité de $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

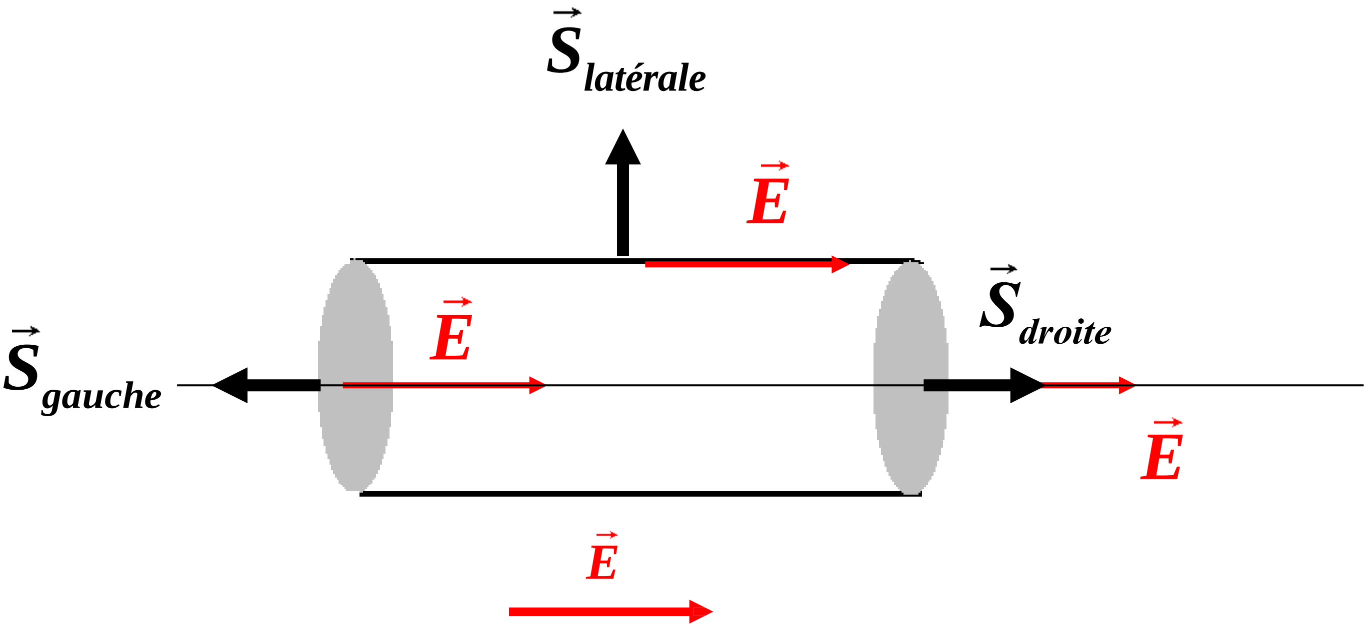
Exercice N° 10 : Angle solide

1- Quelle est l'expression de l'angle solide déterminé par un cône de révolution de demi-angle au sommet α.

2- Donner sa valeur pour tout l'espace (valeur maximale).

Exercice N°11 : Dans un champ électrique **E** uniforme, on place un cylindre fermé de rayon **R** de telle sorte que son axe est parallèle. Déterminer le flux ϕ_E à travers cette surface fermée. Si on place à l'intérieur de ce même cylindre une charge **Q**, donner la valeur du flux à travers cette même surface.

Correction de l'exercice N°11



$$\phi = (\vec{S}_g.\vec{E} + \vec{S}_d.\vec{E} + \vec{S}_l.\vec{E})$$

$\phi = (\boldsymbol{S_g . E} \cos\pi + \boldsymbol{S_d . E} \cos 0 + \boldsymbol{S_l . E} \cos\pi / 2)$

$\phi = -\boldsymbol{S_g . E} + \boldsymbol{S_d . E} = 0$

$\Rightarrow$ **Le flux à travers une surface fermée ne contenant pas de charge à l'intérieur est nul**

Exercice N°12 (Cylindre chargé uniformément en surface) : Soit un cylindre **(C)** d'axe $\overrightarrow{z'z}$, de rayon **R**, de longueur **infinie**, uniformément chargé avec une densité surfacique de charge **σ > 0**. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

Exercice N°13 (Sphère chargée uniformément en surface) : On considère une sphère **(S)** de centre **O** et de rayon **R**, chargée en surface de densité surfacique de charge **σ** uniforme. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.

Exercice N°14 (Sphère chargée uniformément en volume) : On considère une sphère **(S)** de centre **O** et de rayon R, chargée en surface de densité volumique de charge **ρ** uniforme. Calculer le champ électrostatique puis le potentiel en tout point de l'espace.