Chapitre 2 : La transformée en Z : propriétés et applications

M1 Electrotechnique

Université de Khemis Miliana
Dr. ABDELKADER Rabah

Table des matières

Objectifs

Le chapitre "la transformée en z : propriétés et applications" vise à :

- Connaître et maîtriser l'outil mathématique " transformée en z.
- Étudier les propriétés de la transformée en z.
- Analyser les systèmes échantillonnés par la transformée en z
- Connaître et maîtriser l'outil mathématique " transformée en z inverse
- Reconstruire le signal échantillonné en utilisant la transformée en z inverse
- Appliquer la transformée en z et z inverse sur des exemples de signaux usuels

Chapitre 2 : La transformée en Z : propriétés et applications

D'un point de vue mathématique, la transformation de Laplace est un moyen de traiter les signaux et les systèmes décrits en temps continus ; tandis que la transformation en 'z' est le moyen de traiter les signaux et les systèmes décrits en temps discret.

1. Transformée en z

Définition

Soit $s(t)$ un signal continu quelconque que l'on échantillonne à une fréquence f_e, en respectant, bien évidemment, le théorème de Shannon. On a :

$$s^*(t)=\{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_k\}$$

ou encore :

$$s(k)=\{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_k\}$$

Cette suite n'est rien d'autre que la somme d'impulsions unités décalées dans le temps et multipliées, chacune, par le coefficient

$$s^*(t)=s_0\delta^*(t)+s_1\delta^*(t-T_e)+s_2\delta^*(t-2T_e)+\ldots$$

soit :

$$s^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} s_k\delta^*(t-kT_e)$$

d'où :

$$s^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} s_k\delta_k$$

Toute la modélisation des signaux que nous avons utilisée, dès les premières pages de cet ouvrage, faisait appel à la transformation de Laplace. Nous pouvons toujours calculer la transformée de Laplace de $s^*(t)$:

$$S^*(p)=\sum_{k=0}^{\infty} s_k\Delta_k^*$$

Dans cette expression $\Delta_k^*(p)$ représente la transformée de Laplace d'une impulsion unité à l'instant kT_e, représentée sur la figure 1.13.

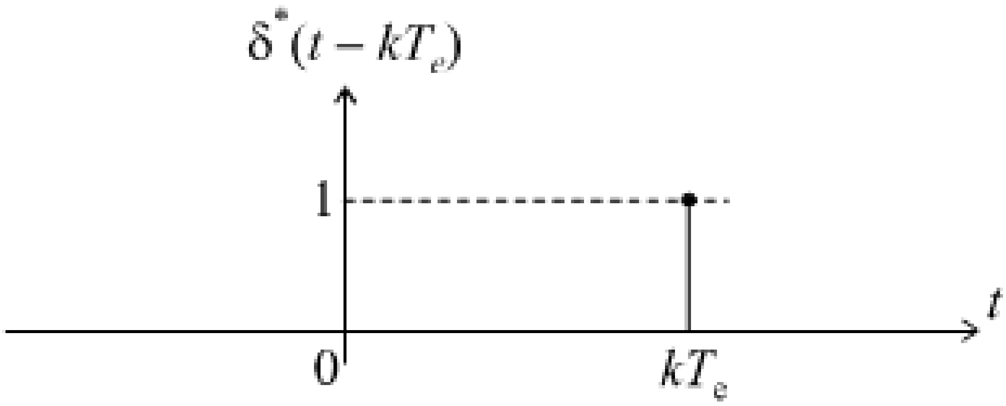

Figure 2.1 : Impulsion unité à l'instant k

Par définition:

$$\Delta_k^*(p)=\int_0^{\infty}\delta_k^*(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt$$

En appliquant le théorème du retard et Δ_0^* en nommant la transformée de Laplace de l'impulsion unité en 0, on a

$$\Delta_k^*(p)=\mathrm{e}^{-pkT_e}$$

d'où :

$$S^*(p)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k\,\mathrm{e}^{-pkT_e}$$

Remarque

Dans le cas des ***signaux causaux**** que nous étudions **(signal nul pour t négatif)**, nous nous contenterons de cette expression. Pour le cas des **signaux non causaux la sommation est de moins l'infini à plus l'infini.**

En posant $z=\mathrm{e}^{pT_e}$ on définit la transformée en z du signal $s(t)$ par

$$S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k\,z^{-k}$$

La transformation en z peut être notée : $s(t)\rightarrow Z(s)$

La transformée en z d'un signal n'existe, bien évidemment, que si la somme qui la définit converge. On peut montrer que ce domaine de convergence est de la forme $|z|>r\,(r\in\Re)$. Dorénavant, nous ne nous intéresserons qu'à des signaux pour lesquels on peut effectivement définir une transformée en z.

1.1. Propriétés de la transformée en z

a) Linéarité

Soit $s_1(t)\,et\,s_2(t)$ deux signaux quelconques possédant chacun une transformée en z, $S_1(z)\,et\,S_1(z)$. La transformée en z d'une combinaison linéaire $\lambda s_1(t)+\mu s_2(t)$ de ces deux fonctions est égale à $\lambda S_1(z)+\mu S_z(t)$.

b) Théorème du retard

Soit $s(t)$ un signal quelconque possédant une transformée en z, $S(z)$ et soit $x(t)=s(t-a_{T_e})$ correspondant au même signal retardé d'un temps $a\,T_e$. La transformée en z de $x(t)=s(t-a_{T_e})$ est égale à :

$$X(z)=z^{-a}S(z)$$

c) Théorème de l'avance

Lorsqu'on utilise la transformée en Z mono-latérale (voir ci-dessus), on obtient:

$$z(s(t+mT_e))=z^m[S(z)-\sum_{k=0}^{m-1} s(kT_e)z^{-k}]$$

d) Théorème de la valeur finale

Soit $s(t)$ un signal quelconque possédant une transformée en z, Soit $S(z)$ la suite échantillonnée correspondant au signal $s(t)$. Le théorème de la valeur finale permet de connaître la valeur vers laquelle tend la suite $s(kT_e)$ lorsque .

$$\lim_{k\to+\infty} s_k=\lim_{z\to1}[(1-z^{-1})S(z)]$$

e) Théorème de la valeur initiale

Soit $s(kT_e)$ un signal causal et $S(z)$ sa transformée en Z alors:

$$z(s(t+mT_e))=z^m[S(z)-\sum_{k=0}^{m-1} s(kT_e)z^{-k}]$$

f) Multiplication par le temps

Soit $s(t)$ un signal quelconque possédant une transformée en z, $S(z)$. Soit $x(t)=t\,s(t)$, alors

$$X(z)=-zT_e\frac{dS(z)}{dz}$$

g) Changement d'échelle

Soit $s(t)$ un signal quelconque possédant une transformée en z, $S(z)$. Soit $s(kT_e)$ la suite échantillonnée correspondant au signal $s(t)$. Soit $x_k=a^k=s_k.avec.a\neq0$ la suite d'échantillons . Ce signal possède une transformée en z telle que :

$$X(z)=S(\frac{z}{a})$$

h) Convolution

Le produit de convolution de deux signaux discrets $g(k) et f(k)$ est défini comme suit:

$$Z[f(k)*g(k)]=F(z)G(z)$$

1.2. Table de transformée en ‘z' de signaux élémentaires

la table de transformée en ‘z' de quelques signaux élémentaires

Le tableau suivant montre les transformées en ‘z’ de certains signaux élémentaires :

N°	$f(t)$	$F(z)$	$f(kT)$
1.	$\delta(t)$	1	$\delta(kT)$
2.	$u(t)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$u(kT)$
3.	$tu(t)$	$\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$kTu(kT)$
4.	$t^n u(t)$	$\lim\limits_{a\to 0}(-1)^n \dfrac{d^n}{da^n}\left(\dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)$	$(kT)^n u(kT)$
5.	$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$	$e^{-akT}u(kT)$
6.	$t^n e^{-at}u(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{da^n}\left(\dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right)$	$(kT)^n e^{-akT}u(kT)$
7.	$sin(\omega t)\,u(t)$	$\dfrac{sin(\omega T)\,z^{-1}}{1-2\,cos(\omega T)\,z^{-1}+z^{-2}}$	$sin(\omega kT)\,u(kT)$
8.	$cos(\omega t)\,u(t)$	$\dfrac{1-cos(\omega T)\,z^{-1}}{1-2\,cos(\omega T)\,z^{-1}+z^{-2}}$	$cos(\omega kT)\,u(kT)$
9.	$e^{-at}sin(\omega t)\,u(t)$	$\dfrac{e^{-aT}sin(\omega T)\,z^{-1}}{1-2\,e^{-aT}cos(\omega T)\,z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$	$e^{-akT}sin(\omega kT)\,u(kT)$
10.	$e^{-at}cos(\omega t)\,u(t)$	$\dfrac{1-e^{-aT}cos(\omega T)\,z^{-1}}{1-2\,e^{-aT}cos(\omega T)\,z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}$	$e^{-akT}cos(\omega kT)\,u(kT)$

1.3. Méthodes de calcul de la transformée en ‘z'

Afin de calculer la transformée en ‘z' d'un signal, deux méthodes de calcul peuvent être utilisées.

a) Première méthode : Passage de $\mathbf{f(t)}$ à $\mathbf{F(z)}$

En fait, la transformée en ‘z’ d’un signal $f(t)$ correspond à la transformée de Laplace du signal échantillonné $f^*(t)$:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(t)] = \mathcal{L}[f^*(t)]\big|_{z=e^{Tp}} = F^*(p)\big|_{z=e^{Tp}} = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\,z^{-k}$$

Ce passage peut être défini suivant le diagramme suivant :

$$f(t) \xrightarrow{\;T\;} f^*(t) \overset{\mathcal{L}}{\longmapsto} F^*(p) \overset{z=e^{Tp}}{\longmapsto} F(z)$$

Diagramme montrant le passage de $f(t)$ à $F(z)$

Exemple

En appliquant le passage de $f(t)$ à $F(z)$, la transformée en ‘z’ de l’échelon unité est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} U(z) &= \mathcal{Z}[u(t)] = U^*(p)\big|_{z=e^{Tp}} = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} u(kT)\,z^{-k} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} 1.\,z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}, \text{ avec } |z^{-1}| < 1 \end{aligned}$$

Ici, la série $\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$ forme une série géométrique convergente de raison $q = z^{-1}$.

alors :

$$U(z) = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

b) Deuxième méthode (Méthode des résidus) : Passage de $\mathbf{F(p)}$ à $\mathbf{F(z)}$

'

Lorsqu'on sait la transformée de Laplace d'un signal continu $f(t)$, on peut calculer la transformée 'z' du signal $f(t)$ en utilisant la méthode des résidus :

$$F(z) = \sum_{p_i} r_i = \sum_{p_i} \left[résidus\ \ de\ \frac{F(p)}{1-e^{Tp}z^{-1}} \right]\Bigg|_{p=p_i}$$

où :

p_i sont les pôles de la fonction $F(p)$.

r_i sont les résidus associés aux pôles p_i.

Ici, deux cas peuvent être considérés :

- ***Cas 1 : Cas de pôles simples***

Lorsque la fonction $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ a des pôles simples, le résidu correspondant à l'un de ces pôles simples a pour expression :

$$r_i = résidus\ \ de\ \frac{F(p)}{1-e^{Tp}z^{-1}}\bigg|_{p=p_i} = \frac{N(p_i)}{D'(p_i)} \cdot \frac{1}{1-e^{Tp_i}z^{-1}}$$

avec $\quad D'(p_i) = \frac{dD(p)}{dp}\bigg|_{p=p_i}$

Exemple

Soit $F(p) = \frac{1}{p}$. Calculons par la méthode des résidus la fonction $F(z)$:

Posons $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{1}{p}$, par identification on trouve : $\begin{cases} N(p) = 1 \\ D(p) = p \end{cases}$

Pour avoir les pôles de $F(p)$, on résout l'équation $D(p) = 0 \Longrightarrow p_1 = 0$. p_1 : est le pôle simple de $F(p)$.

Calculons $D'(p_1) = \frac{dD(p)}{dp}\bigg|_{p=0} = 1$, et comme $N(p_0) = 1$, alors le résidu r_1 associé au pôle simple $p_1 = 0, \forall\, T$:

$$r_1 = \frac{N(0)}{D'(0)} \cdot \frac{1}{1-e^{T0}z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Par conséquent : $\qquad F(z) = \sum_{p_i} r_i = r_1 = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

- ***Cas 2 : Cas de pôles multiples***

Dans le cas où $F(p)$ possède des pôles multiples, le résidu correspondant à l'un de ces pôles multiples a pour expression :

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} \left[(p-p_i)^n . F(p) . \frac{1}{1-e^{Tp}z^{-1}} \right]\Bigg|_{p=p_i}$$

pour un pôle multiple p_i d'ordre n (n : est la multiplicité de pôle p_i).

Exemple

Calculons par la méthode des résidus la transformée en 'z' de la fonction $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$:

Posons $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{1}{p^2(p+1)}$, par identification on trouve : $\begin{cases} N(p) = 1 \\ D(p) = p^2(p+1) \end{cases}$

Pour avoir les pôles de $F(p)$, on résout l'équation :

$$D(p) = p^2(p+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = -1, pôle\ simple \\ p_2 = 0, pôle\ double\ (n = 2) \end{cases}$$

D'abord, calculons le résidu r_1 associé au pôle simple $p_1 = -1$:

$$r_1 = \frac{1}{D'(p)} \frac{1}{1-e^{Tp}z^{-1}}\bigg|_{p=-1} = \frac{1}{2p(p+1)+p^2} \frac{1}{1-e^{Tp}z^{-1}}\bigg|_{p=-1}$$

$$r_1 = \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-T}}, \forall\, T > 0$$

Puis, calculons le résidu r_2 associé au pôle double $p_2 = 0$:

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{d}{dp}\left[p^2 . \frac{1}{p^2(p+1)} . \frac{1}{1-z^{-1}e^{Tp}}\right]\bigg|_{p=0} \\ &= \left[\frac{-(1-e^{Tp}z^{-1})+(p+1)Te^{Tp}z^{-1}}{(p+1)^2(1-e^{Tp}z^{-1})^2}\right]\bigg|_{p=0} \\ r_2 &= \frac{-(1-z^{-1})+Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = -\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}, \forall\, T > 0 \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right] = r_1 + r_2$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right] = -\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}}, \forall\, T > 0$$

Remarque : Avant de déterminer une transformée en 'z' il est préférable de décomposer la fonction $F(p)$ en éléments simples (méthode de décomposition par fractions rationnelles) :

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p+1}$$

Les coefficients a, b et c sont calculés comme suit :

$$a = \frac{d}{dp}[p^2F(p)]\Big|_{p=0} = \frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p+1}\right]\bigg|_{p=0} = -1$$

$$b = [p^2F(p)]|_{p=0} = \left[\frac{1}{p+1}\right]\bigg|_{p=0} = 1$$

$$c = [(p+1)F(p)]|_{p=-1} = \left[\frac{1}{p^2}\right]\bigg|_{p=-1} = 1$$

d'où

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

donc :

$$\begin{aligned} F(z) = \mathcal{Z}[F(p)] = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{p^2(p+1)}\right] &= \mathcal{Z}\left[-\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}\right] \\ &= -\mathcal{Z}\left[\frac{1}{p}\right] + \mathcal{Z}\left[\frac{1}{p^2}\right] + \mathcal{Z}\left[\frac{1}{p+1}\right] \end{aligned}$$

En utilisant le tableau de la transformée en 'z', on trouve :

$$F(z) = -\frac{z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T}}, \forall\, T > 0$$

1.4. Exemples de calcul de la transformée en Z

a) Impulsion unité

L'impulsion unité étant définie par :

$$\delta_k = 1 \text{ pour } k = 0$$

$$\delta_k = 0 \text{ pour } k \neq 0$$

On a :

$$\Delta(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k z^{-k} = z^0 = 1$$

b) Échelon unité

L'échelon unité étant défini par :

$$u_k = 1 \text{ pour } k \geqslant 0$$

On a :

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

c) Rampe unité

La rampe unité en temps continu est définie par :

$$v(t) = t \text{ pour } t \geqslant 0$$

En utilisant la propriété étudiée précédemment (multiplication par le temps), on obtient :

$$V(z) = -zT_e \frac{\mathrm{d}\,U(z)}{\mathrm{d}z} = -zT_e \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{z - 1}\right)$$

soit :

$$V(z) = -zT_e \frac{(z - 1) - z}{(z - 1)^2}$$

d'où :

$$V(z) = \frac{zT_e}{(z - 1)^2}$$

d) Exponentielle décroissante

Soit le signal $s(t)e^{-at}\ ;\ pour\ .\ t \geq 0$. La transformée en z de ce signal a pour expression :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-akT_e} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{aT_e}\right)^{-k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^{aT_e} z}\right)^{k}$$

$$S(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{aT_e} z}} = \frac{e^{aT_e} z}{e^{aT_e} z - 1} = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

2. Transformée en z inverse

Le passage de la transformée en z de $S(z)$ à la fonction continue $s(t)$ n'est pas unique. En effet, $S(z)$ est la transformée de la fonction continue $s^*(t)$ obtenue par échantillonnage et bloquage d'ordre zéro de la fonction continue $s(t)$. En fait, la perte d'information entre deux instants d'échantillonnage empêche la reconstitution de la fonction $s(t)$. On notera la transformation inverse en z:

$$s^*(t) = s(kT_e) = Z^{-1}(S(z))$$

2.1. Méthodes de calcul de la transformée inverse en z

Plusieurs méthodes permettent d'obtenir l'ensemble d'échantillons $s(kT_e)$, la méthode des résidus, la division polynomiale, la décomposition en éléments simples ou la méthode de l'équation aux différences.

a) Méthode des résidus

L'ensemble d'échantillons $s(kT_e)$ est obtenu par l'expression suivante :

$$s(kT_e) = \sum_{p_i} [résidus\ de\ z^{k-1} S(z)]_{z=p_i}$$

où p_i sont les pôles de la fonction $S(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$.

On définit le résidu r_i à un pôle d'ordre n en $z = p_i$ par :

$$r_i = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - p_i)^n z^{k-1} S(z)]_{z=p_i}$$

? *Exemple*

Calculons la transformée inverse en z de la fonction

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}, \forall\ T > 0$$

pour k = 0 :

$$f(0) = \left[résidus\ \ de\ z^{-1}.\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{d}{dz}\left[\ (z-1)^2 z^{-1}.\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}[T]|_{z=1} = 0$$

pour k> 0 :

$$f(kT) = \left[résidus\ \ de\ z^{k-1}.\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 z^{k-1}.\frac{Tz}{(z-1)^2}\right]\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz}[Tz^k]|_{z=1} = kTz^{k-1}|_{z=1} = kT$$

d'où

$$f_k = f(kT) = \begin{cases} 0, pourk = 0 \\ kT, pourk > 0 \end{cases}, \text{ ou bien : } f_k = f(kT) = kT, \forall k \geq 0, \forall\, T > 0$$

b) Division polynomiale

La fonction $S(z)$ se présente fréquemment comme une fraction rationnelle en z ou en z^{-1} :

$$S(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

Il s'agit de diviser le numérateur par le dénominateur pour obtenir une série en z^{-1} .

Exemple

Étant donné la fonction en z suivante :

$$F(z) = \frac{2z-3}{3z^2+2z-1}.$$

Calculons les premiers échantillons par division polynomiale :

$2z-3$	$3z^2+2z-1$
$-2z-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}z^{-1}$	$0+\frac{2}{3}z^{-1}-\frac{13}{9}z^{-2}+\frac{32}{27}z^{-3}+\cdots$
$-\frac{13}{3}+\frac{2}{3}z^{-1}$	
$+\frac{13}{3}+\frac{26}{9}z^{-1}-\frac{13}{9}z^{-2}$	
$+\frac{32}{9}z^{-1}-\frac{13}{9}z^{-2}$	

Les premiers échantillons sont donc:

$$f_0 = 0 \ \ ; f_1 = \frac{2}{3}\ \ ; \ \ f_2 = -\frac{13}{9}\ ; \ \ f_3 = \frac{32}{27}$$

c) Méthode de la décomposition en éléments simples

Le principe de cette méthode est décrit comme suit :

- Former la fonction $\frac{S(z)}{z}$;
- Décomposer la fonction $\frac{S(z)}{z}$ en éléments simples ;
- Tirer l'expression de $S(z)$ en fonction de z^{-1} ;
- Déterminer les échantillons $s(kT_e)$ en utilisant la table de la transformée en z .

Exemple

Soit la fonction en z suivante :

$$F(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}.$$

Calculons les échantillons $f(kT_e)$. Tout d'abord, formons $\frac{F(z)}{z}$:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z^2-3z+2)}$$

Décomposons $\frac{F(z)}{z}$ en éléments simples :

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z^2-3z+2)} = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z-2}$$

Les coefficients a, b et c sont calculés comme suit :

$$a = z\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=0} = z\frac{1}{z(z-1)(z-2)}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{2}$$

$$b = (z-1)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=1} = (z-1)\frac{1}{z(z-1)(z-2)}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{z(z-2)}\bigg|_{z=1} = -1$$

$$c = (z-2)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=2} = (z-2)\frac{1}{z(z-1)(z-2)}\bigg|_{z=2} = \frac{1}{z(z-1)}\bigg|_{z=2} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{2}.\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{z-2}$$

Tirons l'expression de $F(z)$:

$$F(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}.\frac{z}{z-2}$$

Exprimons $F(z)$ en fonction de z^{-1}

$$F(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2}.\frac{1}{1-2z^{-2}}$$

Introduisons l'opérateur z^{-1} :

$$f_k = f(kT) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{2}\right] - \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] + \frac{1}{2}.\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-2z^{-2}}\right]$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}[1] - \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right] + \frac{1}{2}.\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-(2z^{-2})}\right]$$

Calculons les échantillons $f(kT_e)$ en utilisant la table de la transformée en z :

$$f_k = \frac{1}{2}\delta(k) + \frac{1}{2}2^{\,k}u(k) - u(k),\ \forall\, k \geq 0$$

d) Méthode de l'équation aux différences

prenons l'exemple suivante pour bien comprendre cette méthode.

Exemple

Soit l'équation aux différences (équation de récurrence) suivante :

$$s(kT) = 0.5s\big((k-1)T\big) + e(kT)$$

En appliquant l'opérateur z , il vient :

$$\mathcal{Z}[s(kT)] = \mathcal{Z}\big[0.5s\big((k-1)T\big)\big] + \mathcal{Z}[e(kT)]$$

En se basant sur les propriétés de la transformée en z , on aura :

$$S(z) = 0.5z^{-1}S(z) + E(z)$$

Formons la fonction $F(z)=\frac{S(z)}{E(z)}$:

$$F(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{z}{z-0.5} = \sum_{k=0}^{\infty}(0.5)^k\, z^{-k}$$

d'où

$$f_k = (0.5)^k u(k),\ \forall\, k \geq 0$$

Glossaire

signaux causaux

En traitement numérique du signal, un signal causal est défini par $s(t)=0$ pour $t<0$

Bibliographie

livre Automatique des systèmes échantillonnés, J. M. Retif, INSA

livre Réglages échantillonnés (T1 et T2), H. Buhler, PPR