Chapitre 2 Relation différentielle, calcul de la flèche et la rotation, théorie du potentiel interne, théorème de Gastigliano

II.1 Relation différentielle de la déformée [réf : Gmür p90]

Après déformation, la ligne moyenne d'une poutre soumise à la flexion est appelée la déformée de la poutre ; elle constitue une courbe plane dans le cas de flexion simple. La flèche en un point de la poutre est la valeur particulière de la déformée de ce point.
Considérons le centre de gravité G(x,0) d'une poutre droite soumise à la flexion simple (Fig.II-1).

La déformation entraine un déplacement transversal y ; ainsi qu'un déplacement longitudinal du second ordre que l'on néglige.

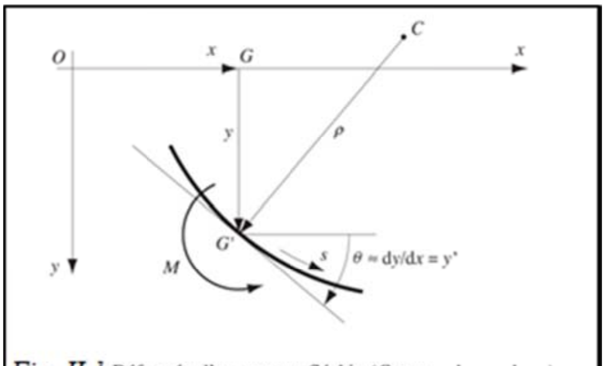

Fig. II.1 Déformée d'une poutre fléchie (*C* centre de courbure).

Sous l'effet du moment de flexion ;

le point G(x,0) se déplace au point G'(x,y)

où la courbure à la valeur (relation de la courbure):

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

Nb : cette approximation n'est pas applicable dans le cas des lames minces et longues ; ainsi que dans des poutres courbes.

En fonction de la dérivée première y' et de la dérivée seconde, la courbure est donnée par la relation :

$$\frac{1}{r} = \pm\frac{d\theta}{ds} = \pm\frac{d\big(arctg(y')\big)}{dx}.\frac{dx}{ds}$$
$$\frac{1}{r} = \pm\frac{1}{1+\acute{y}^2}\frac{dy'}{dx}.\frac{dx}{dx\sqrt{(1+y'^2)}}$$
$$\frac{1}{r} = \pm\frac{y''}{[1+\acute{y}^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Où θ et s désignent respectivement la rotation de la section et l'abscisse curviligne le long de la déformée.

Sous l'hypothèse de petites déformations, la dérivée y' est très faible de sorte que le terme y'^2 peut être négligé vis-à-vis de l'unité. Il s'ensuit que l'expression précédente se ramène à l'égalité :

$$\boldsymbol{\frac{1}{r} = \pm y''}$$

D'après la convention de signe adoptée (repère gauche), l'équation différentielle du second ordre de la déformée y due au moment de flexion s'écrit :

$$\boldsymbol{y'' = -\frac{M}{EI}} \qquad \text{(II-1)}$$

II.2 Calcul des Flèches et Rotations [réf : Samikian, p243]

Il est important de pouvoir déterminer la valeur de la flèche en un point quelconque le long de la fibre moyenne d'une poutre. Pour la bonne tenue en service des structures, les normes de construction limitent les valeurs des flèches permises.

A l'aide de l'équation de la déformée (éq. II.1) et selon la figure II.2 la flèche de la fibre moyenne déformée est donnée comme suit :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad \text{(II-2)}$$

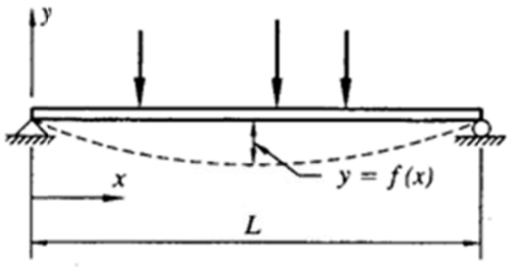

Fig. II.2

où :
M : moment fléchissant le long de la poutre
E : module d'élasticité du matériau
I : moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre.
EI : rigidité à la flexion de la poutre.

En intégrant une première fois l'équation (II.2), on obtient la pente ou la Rotation de la déformée à l'abscisse x qui est égale à :

$$\frac{dy}{dx} = tg(\theta) = \theta \quad (radians) \qquad \text{(II.3)}$$

car θ est petit.

Donc, on peut écrire :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad \text{(II.4)}$$

$$d\theta = \frac{M}{EI}dx \qquad \text{(II.5)}$$

En intégrant l'éq.II.2 deux fois, on obtient la flèche y de la déformée à l'abscisse x.

a) Convention de signe : on suppose l'origine des axes de coordonnées à l'appui ou à l'extrémité gauche. L'axe y est dirigé vers le haut et l'axe x vers la droite. Ainsi, la flèche qui est dirigée vers le bas est négative. La rotation θ de la déformée est considérée comme étant négative lorsqu'elle est dans le sens de la rotation des aiguilles d'une montre. Elle est considérée comme étant positive dans le cas contraire.

b) Exemple :
On considère une poutre droite qui repose sur deux appuis simples et qui soumise à une charge q uniformément répartie (voir fig. II.3).
Déterminer les équations de la déformée et de la pente, puis calculer la rotation θ_A de la déformée à l'appui A et la valeur de la flèche f à mi-portée de la poutre (EI=constant).

Solution :

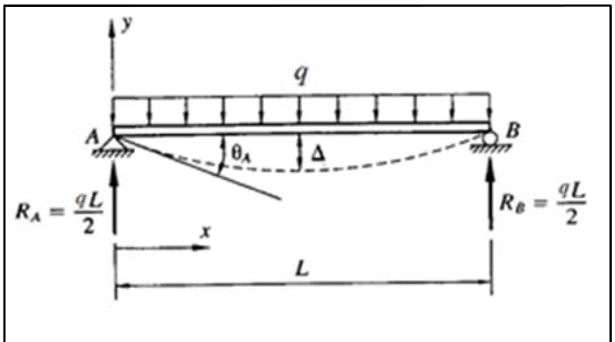

Fig. II.3

$R_A = \frac{qL}{2}$; $R_B = \frac{qL}{2}$

$M_z(x) = \frac{qL}{2}x - q\frac{x^2}{2}$

D'après l'éq. (II.2)

$$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qL}{2}x - q\frac{x^2}{2}$$

En intégrant une première fois :

$$EI.\frac{dy}{dx} = EI = \frac{qL}{4}x^2 - \frac{q}{6}x^3 + C_1$$

Et en deuxième fois :

$$EI.y = \frac{qL}{12}x^3 - \frac{q}{24}x^4 + C_1x + C_2$$

On détermine les constants d'intégration par les conditions aux limites aux appuis.

- Pour x = 0 ==> y=0 ==> $C_2 = 0$
- Pour x = L ==> y=0 ==> $C_1 = \frac{-qL^3}{24}$

En substituant les valeurs de C_1 et de C_2 dans les équations de la flèche et de la rotation, on trouve :

$$y(x) = \frac{qL}{12EI}x^3 - \frac{q}{24EI}x^4 - \frac{qL^3}{24EI}x$$

$$\theta(x) = \frac{qL}{4EI}x^2 - \frac{q}{6EI}x^3 - \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\boldsymbol{\theta_A(x = 0) = \frac{-qL^3}{24}}$$

$$\boldsymbol{f\left(x = \frac{L}{2}\right) = y\left(x = \frac{L}{2}\right) = \frac{-5qL^4}{384EI}}$$

II.3 Théorie du potentiel interne (Méthode de Travail-Energie)

II.3.1 Introduction :

Cette méthode de calcul est basée sur le principe de conservation de l'énergie. Lorsqu'une structure est chargée, elle se déforme. Pendant le chargement, les points où les forces sont appliquées se déplacent, et les sections où agissent les moments subissent des rotions. Le système de forces et de moments extérieurs appliqués produit un *travail externe* W_E.
Ce travail est emmagasiné par la structure sous forme d'énergie potentielle, celle-ci est le *potentiel* ou *travail interne* W_I.

II.3.2 Travail externe [réf : Samikian p291]:

On considère une barre de section constante fixée à une extrémité et libre à l'autre. On applique à l'extrémité libre de la barre une force axiale croissante graduellement de 0 à **P** (fig. II.4).
Sous l'action de cette force, la barre subit une déformation élastique linéaire variant de 0 à Δ suivant la direction de la force P.

Le travail externe W_E produit par la force P peut être exprimé comme étant égal à l'aire sous la courbe de la fig. II.4,
on a donc :

$$W_E = \frac{1}{2} P.\Delta$$

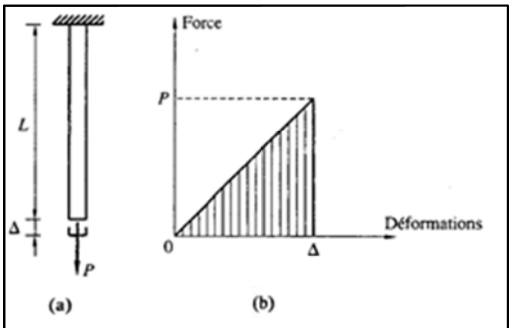

Fig. II.4

De même façon, si on applique en un point quelconque un moment fléchissant :

$$W_E = \frac{1}{2} M.\theta$$

avec M : moment fléchissant et θ la rotation produite.

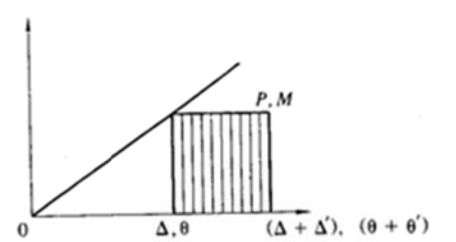

Figure II- 5

En outre, la force P étant atteinte, si on applique sur la barre une force additionnelle P' qui provoque une déformation additionnelle Δ' suivant la direction de P, on a donc :

$$W_E = P.\Delta' \qquad \text{ou} \qquad W_E = M.\theta'$$

II.3.3 Barre soumise à une force axiale :

Une barre soumise à une force axiale croissant graduellement de 0 à P subit une déformation variant de 0 à Δ (fig. II.6),
et elle emmagasine une énergie potentielle interne W_I égale à :

$$W_E = \frac{1}{2} P.\Delta$$

Et on a : $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ et $\sigma = \varepsilon.E = \frac{P}{A}$

Donc :

$$\Delta = \frac{PL}{EA}$$

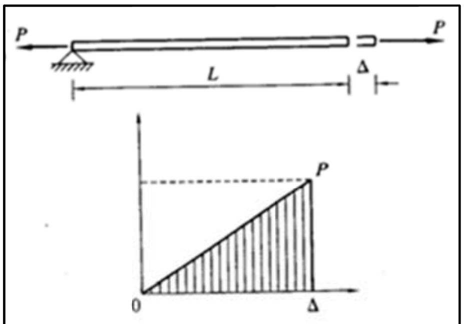

Figure II- 6

A : section de la barre.
donc, l'énergie de déformation élastique :

$$\boldsymbol{W_I = \frac{1}{2}\frac{P^2L}{EA}}$$

II.3.4 Poutre sollicité par un moment fléchissant :

On considère un tronçon infinitésimal dx d'une poutre sollicitée par un moment fléchissant croissant graduellement de 0 à M (fig. II.7).

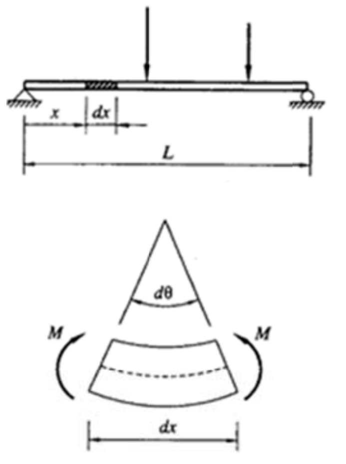

Figure II-7

L'angle de rotation entre les sections extrêmes de ce tronçon est égal à dθ, l'énergie potentielle interne dW_I est donnée par :

$$dW_I = \frac{1}{2}M d\theta$$

avec : $d\theta = \frac{M}{EI}dx$

Donc, on peut calculer l'énergie potentielle interne totale avec :

$$dW_I = \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx \qquad ==> \boldsymbol{W_I = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx}$$

Pour EI : rigidité à la flexion constante.

En général, l'énergie potentielle interne de déformation W peut être exprimée pour une poutre soumise aux sollicitations N, M, T et M_t avec :

$$W = \frac{1}{2}\int_l \frac{M^2}{EI}dx + \frac{1}{2}\int_l \frac{N^2}{EA}dx + \frac{1}{2}\int_l \frac{\kappa T^2}{GA}dx + \frac{1}{2}\int_l \frac{qM_t^2}{GI_P}dx$$

Exemple :

Une poutre soumise à une charge concentrée P à mi-portée. On néglige le poids propre de la poutre. Déterminer la valeur de la flèche Δ sous la charge P (EI est constante).

Solution :

$W_E = \frac{1}{2}P.\Delta$	Travail externe

$W_I = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{M^2}{EI}dx$	Travail interne

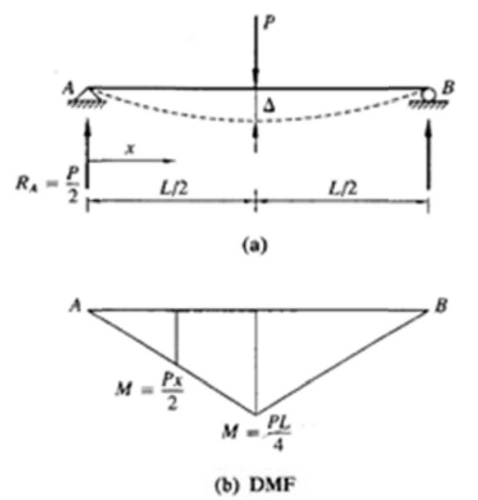

Figure II- 8

$$M = \frac{Px}{2} ==> M^2 = \frac{P^2x^2}{4}$$

à cause de la symétrie, le travail interne peut être exprimé comme étant le double de celui de la moitie gauche de la poutre.

$W_I = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P^2}{8EI}x^2dx$ et on a : $W_E = W_I$

donc :

$$\frac{P\Delta}{2} = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P^2}{8EI}x^2dx \quad ==> \Delta = 2\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{P}{4EI}x^2dx \quad ==> \quad \boldsymbol{\Delta = \frac{PL^3}{48EI}}$$

II.4 Théorème de GASTIGLIANO [Réf : Samikian, p331] :

On a établi que dans une poutre sollicitée en flexion, le travail interne ou le potentiel emmagasiné W_i est donné par :

$$W_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

où M est le moment fléchissant en un point quelconque causé par l'effet combiné du système de forces extérieures Q_i. L'intégration est faite sur la longueur totale de la poutre.

Castigliano a démontré que la dérivée partielle du potentiel par rapport à l'une des forces Q_i appliquées à la poutre est égale au déplacement δ_i de la force Q_i suivant la ligne d'action :

$$\delta_i = \frac{\partial W_i}{\partial Q_i}$$

En remplaçant W_i par sa valeur, l'expression du déplacement (flèche) devient :

$$\delta_i = \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial Q_i} \frac{dx}{EI}$$

Exemple :

Déterminer la flèche verticale δ_C au point C et δ_D à mi-portée (voir fig.II.9), EI est constante.

Solution :

1) **(δ_C ?)** On remplace la force en C par Q, on calcule M et $\frac{\partial M}{\partial Q}$

- $0 \leq x \leq 3$ (A à C)

$$M = \frac{2Q}{3} x => \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{2}{3} x ==> M \frac{\partial M}{\partial Q_i} = \frac{4}{9} Q x^2$$

- $0 \leq x \leq 6$ (B à C)

$$M = \frac{-Q}{3} x => \frac{\partial M}{\partial Q} = \frac{-1}{3} x ==> M \frac{\partial M}{\partial Q_i} = \frac{1}{9} Q x^2$$

Donc,

$$\delta_C = \int_0^3 \frac{4Qx^2}{9EI} dx + \int_0^6 \frac{Qx^2}{9EI} dx => \delta_C = \frac{12Q}{EI} \quad => \boldsymbol{\delta_C = \frac{540}{EI}}$$

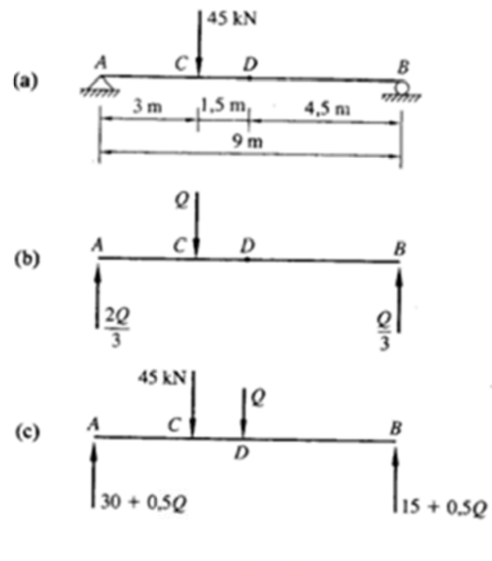

Figure II-9

2) **(δ_D ?)**

- $0 \leq x \leq 3$ (A à C)

$$M = (30 + 0.5Q)x => \frac{\partial M}{\partial Q} = 0.5x ==> M \frac{\partial M}{\partial Q_i} = 15x^2 + 0.25Qx^2$$

- $3 \leq x \leq 4.5$ (C à D)

$$M = (30 + 0.5Q)x - 45(x - 3) = 0.5Qx - 15x + 135 => \frac{\partial M}{\partial Q} = 0.5x$$

$$==> M \frac{\partial M}{\partial Q_i} = 0.25Qx^2 - 7.5x^2 + 67.5x$$

- $0 \leq x \leq 4.5$ (B à D)

$$M = -(15x + 0.5Qx) \quad => \frac{\partial M}{\partial Q} = -0.5x \quad ==> M \frac{\partial M}{\partial Q_i} = 7.5x^2 + 0.25Qx^2$$

Donc : $\delta_D = \int_0^3 \frac{15x^2}{EI} dx + \int_3^{4.5} \frac{-7.5x^2 + 67.5x}{EI} dx + \int_0^{4.5} \frac{7.5x^2}{EI} dx ==> \boldsymbol{\delta_D = \frac{583}{EI}}$

II.5 Application du théorème de Gastigliano aux systèmes hyperstatique théorème de MÉNABRÉA :

On peut appliquer le théorème de Castigliano aux systèmes hyperstatiques en procédant comme suit :

- On supprime les liaisons surabondantes (les réactions et les moments d'encastrement) du système hyperstatique pour le rendre isostatique.
- On applique à ce système isostatique, en plus des forces extérieurs qui agissent sur le système réel, les réactions ou les moments d'encastrement surabondants comme des forces ou couples extérieurs.
- Par le théorème de Castigliano, on calcule les déplacements ou les rotations du système isostatique.
- Comme les appuis sont fixes, le déplacement dû à une réaction ou la rotation due à un moment d'encastrement sont nuls.

Donc :

$$\frac{\partial W_i}{\partial R_i} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial W_i}{\partial M_i} = 0$$

A partir du deux équations, on peut calculer les réactions hyperstatiques inconnues.
Ces équations constituent le théorème de : Ménabréa, qui est le théorème du potentiel minimal et qui s'enonce comme suit : « Les valeurs des réactions hyperstatiques correspondant à l'équilibre du système, rendent minimal le potentiel W_i».

Exemple :

Déterminer la valeur de la réaction RB, (EI = constante) pour la poutre représentée dans la fig. II-10

Solution :

Le système est hyperstatique d'ordre 1.

On sait que : $\delta_B = 0$

$$\delta_B = \frac{\partial W_i}{\partial R_B} = \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial R_B}\frac{dx}{EI} = 0$$

avec :

$$M = -R_B x + \frac{qx^2}{2}$$

$$==> \frac{\partial M}{\partial R_B} = -x$$

$$==> M\frac{\partial M}{\partial R_B} = R_B x^2 - \frac{qx^3}{2}$$

et on a :

$$\delta_B = \int_0^L \left(R_B x^2 - \frac{qx^3}{2}\right)\frac{dx}{EI} = 0$$

donc

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{R_B L^3}{3} - \frac{qx^4}{8}\right) = 0 \qquad ==> \quad \boldsymbol{R_B = \frac{3}{8}qL} \quad \uparrow$$

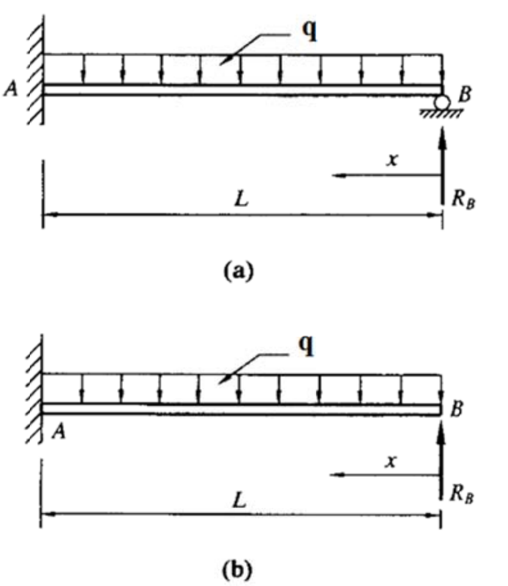

Figure II-10