Chapitre 3 Calcul des structures hyperstatiques par la méthode des Forces [3]

Définition :

On dit qu'une structure est hyperstatique si elle comporte des liaisons indéterminées (liaisons surabondantes) internes ou externes.

Exemple 1

On a 5 liaisons (réactions) (voir fig. III-1)

Réactions : liaisons externes on a 3 équations de la statique et 5 inconnues (H_A, V_A, H_B, V_B, M_A), donc on a deux liaisons indéterminées (surabondantes).

Alors, on dit qu'on a une structure hyperstatique externe.

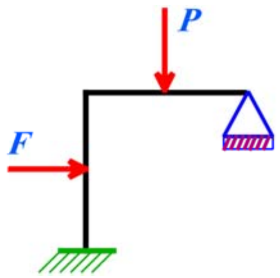


Fig. III-1a

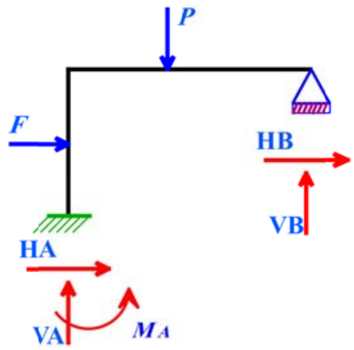


Fig. III-1b

Exemple 2

Selon la figure III-2a, on a :

3 réaction (H_A, V_A, V_B) et 3 équations de la statique : $\sum Fx=0$; $\sum Fy=0$; $\sum M=0$.

Donc ce qui concerne les liaisons externes le problème est résolu.

Si on veut calculer les efforts internes (N(x), Ty(x) et Mz(x)), on utilise la méthode des sections.

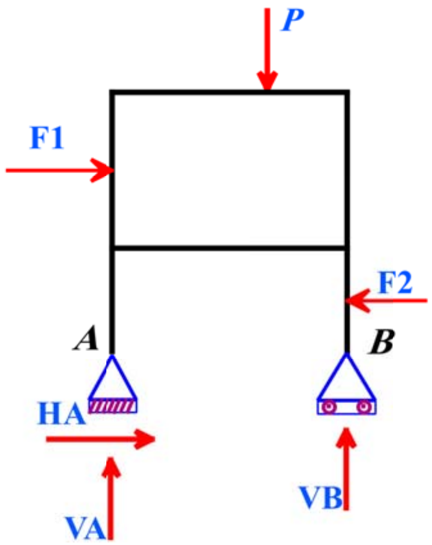


Fig. III-2a

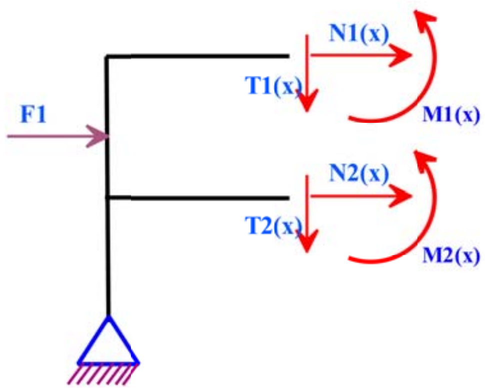


Fig. III-2b

Selon la fig.III-2b, on obtient 3 équations et 6 inconnues.

Alors, on a : 3 inconnues indéterminées internes.

On dit qu'on a une structure hyperstatique interne.

Nb : comme résultat l'hyperstaticité est relative à des inconnues internes et/ou externes

Degré d'hyperstaticité

Comme il a été mentionné, le nombre de liaisons surabondantes constitue le degré **d**'hyperstaticité de la structure. Il existe plusieurs méthodes pour déterminer le degré d'hyperstaticité (noté **d**) ; nous en examinerons deux.

Méthode des contours fermés

Appelons :

- - "c" le nombre de contours de la structure
- - "a" le nombre d'articulations (y compris les appuis doubles)
- - "s" le nombre d'appuis simples
-

Le degré d'hyperstaticité est donné par : **d = 3c - a - 2s**

Cas des poutres en treillis chargées indirectement : **d = b + l - 2n**

- b + l - 2n < 0 ⇒ système déformable
- b + l - 2n = 0 ⇒ système isostatique
- b + l - 2n > 0 ⇒ système hyperstatique

avec :

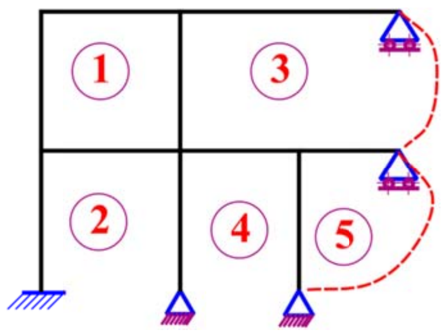
- - "b" nombre de barres
- - "l" nombre de liaisons dans les appuis (encastrement = 3 ; appui double = 2 ; appui simple = 1)
- - "n" nombre de nœuds

Exemple :

Calculer « d » le degré d'hyperstaticité de la structure

présentée dans la fig.III-3.

D=3*(5)-(2appuis doubles)-2*(2appuis simples) == > d=9



III.3 Système de base :

On appelle système de base, la structure équivalente obtenue en supprimant un nombre de liaison égale à « d ».

Exemple : Fig.III-4
D=5-2 == > d=2

On peut simplifier la structure initiale à un système de base (1) (supprimant 2 liaisons), ou en système de base (2) supprimant un moment et une réaction pour rendre le système isostatique.

<u>Remarque</u> : chaque système de base comporte « d » inconnues de liaisons, X_1, X_2,…, X_d.

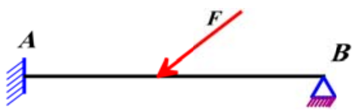
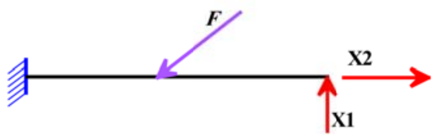
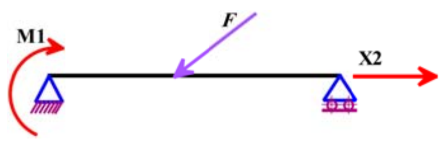


Fig.III-4 Structure initiale



Système de base (1)



Système de base (2)

III.4 Equations de condition :

Le système initial hyperstatique et le système de base isostatique sont équivalents, en particulier le déplacement de x_i est nul (=0) suivant la direction *i*.

$$\sum \delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0 \qquad \text{avec } i = 1 \text{ à d}$$

où

δ_{ij} : coefficient d'influence

Δ_{ip} : déplacement du point *i* suivant direction x_i provoqué par les forces P_{ext} (seules) agissant sur le système de base.

III.5 Résolution des structures hyperstatiques par la méthode des forces

Cette méthode permet de chercher les inconnues hyperstatiques selon le schéma suivant :

- Calcul le degré d'hyperstaticité « d »
- Choix d'un système de base avec les inconnues de liaison x_1, x_2,…, x_d
- Etablissement et résolution des équations de conditions
- Cadrage (éventuel) des inconnues hyperstatiques

III.6 Eléments caractéristique de la méthode des forces

On considère une structure hyperstatique pour lequel on a choisi un système de base et les inconnues de liaison (x_1, x_2, …).

$$\sum \delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0 \qquad \text{pour chaque « } i \text{ »}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \int_{syst\ base} \frac{m_i(x).m_j(x)}{EI} dx$$

$$\Delta_{iP} = \int_{syst\ base} \frac{m_i(x).M_P(x)}{EI} dx$$

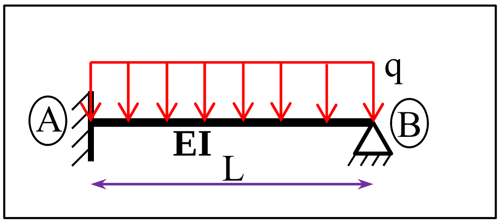
$m_i(x)$: moment de flexion dans le système de base sous l'effet de $x_i = 1$ (seule)

$m_j(x)$: moment de flexion dans le système de base sous l'effet de $x_j = 1$ (seule)

$M_P(x)$: moment de flexion dans le système de base sous l'effet des charges extérieures $P_{ext.}$ (seules)

Exemple :

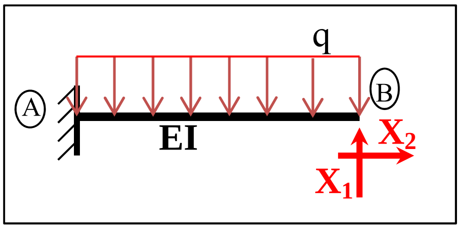
Déterminer M(x) et T(x) de la structure représentée dans la fig. III-5. (EI=constante)



Solution :

Calcul du degré d'hyperstaticité

D=5-3 ==> d=2



Choix d'un système de base : (X_1 et X_2 : inconnues de liaison)

Equation de condition :

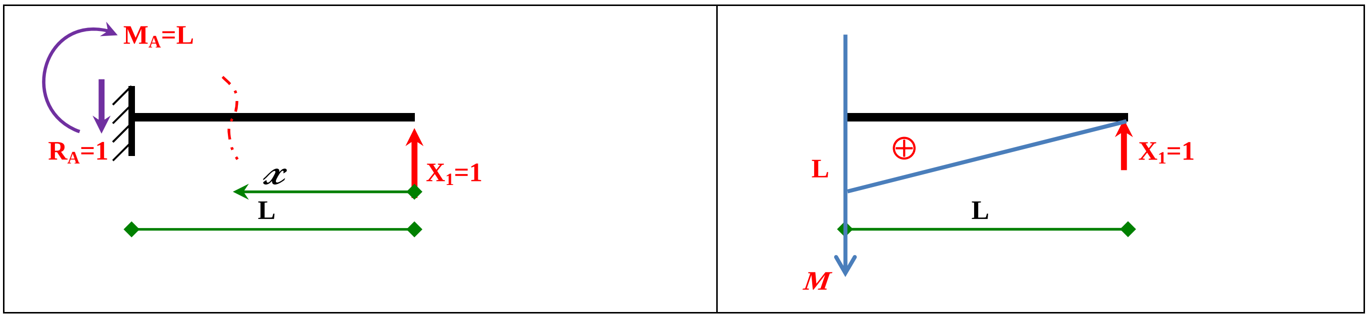
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

Calcul de δ_{ij} et Δ_{iP}

On doit déterminer les moments : $m_1(x)$, $m_2(x)$ et $M_P(x)$

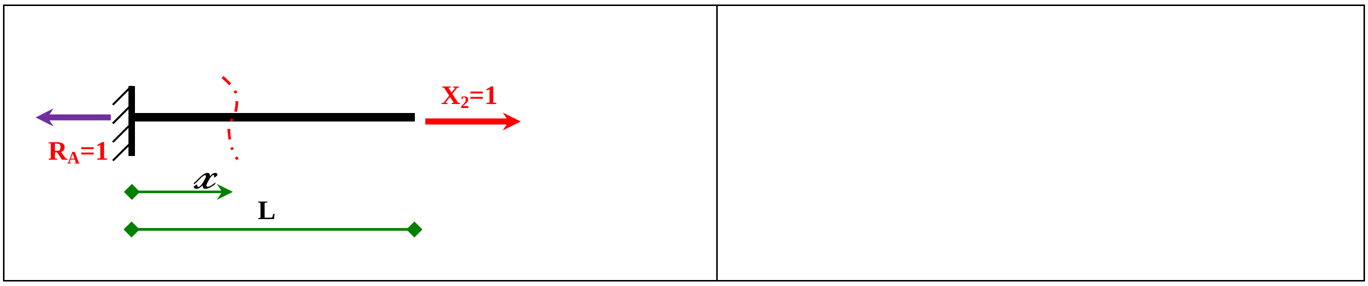
- $m_1(x)$? avec $0 \leq x \leq L$

  $m_1(x) = x$



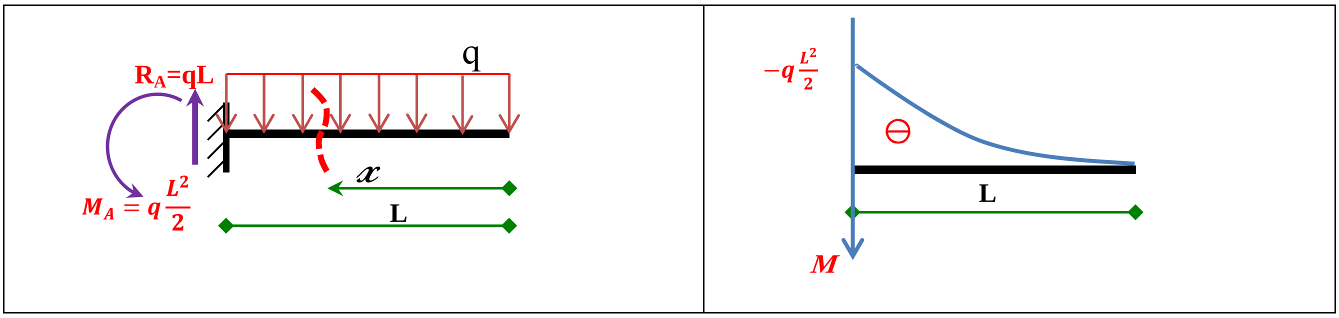
- $m_2(x)$? avec $0 \leq x \leq L$

  $m_2(x) = 0$



- $M_P(x)$? avec $0 \leq x \leq L$

  $M_P(x) = -q\frac{x^2}{2}$



$\delta_{11} = \int_0^L \frac{m_1(x).m_1(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{x^2}{EI} dx \quad ==> \delta_{11} = \frac{L^3}{3EI}$

$\delta_{12} = \delta_{21} = \int_0^L \frac{m_1(x).m_2(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{(x).(0)}{EI} dx \quad ==> \delta_{12} = \delta_{21} = 0$

$\delta_{22} = \int_0^L \frac{m_2(x).m_2(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{(0).(0)}{EI} dx \quad ==> \delta_{22} = 0$

$\Delta_{1P} = \int_0^L \frac{m_1(x).M_P(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{(x).(-q\frac{x^2}{2})}{EI} dx \quad ==> \Delta_{1P} = -q\frac{L^4}{8EI}$

$\Delta_{2P} = \int_0^L \frac{m_2(x).M_P(x)}{EI} dx = \int_0^L \frac{(0).(-q\frac{x^2}{2})}{EI} dx \quad ==> \Delta_{2P} = 0$

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + 0X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ 0X_1 + 0X_2 + 0 = 0 \end{cases} ==> \begin{cases} \delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} ==> \begin{cases} X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

Donc on a la structure suivante :

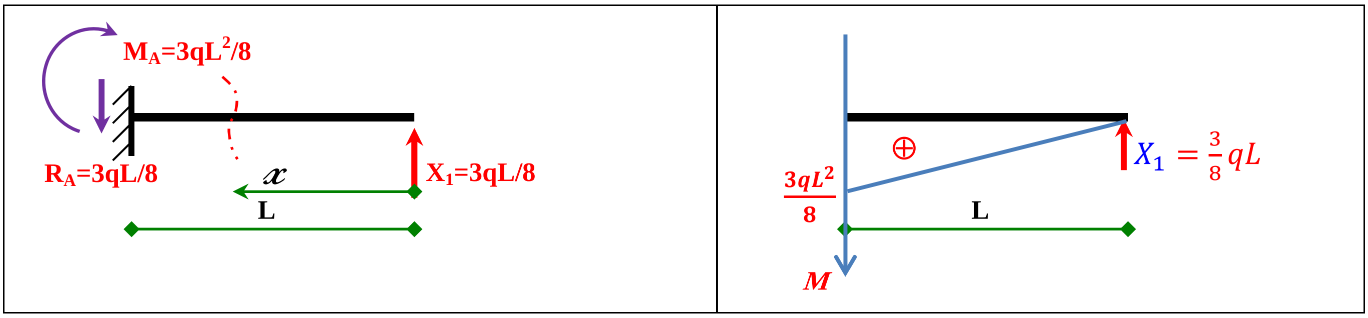
avec : $R_{Bh} = X_2 = 0$ et $R_{Bv} = X_1$

Remarque :

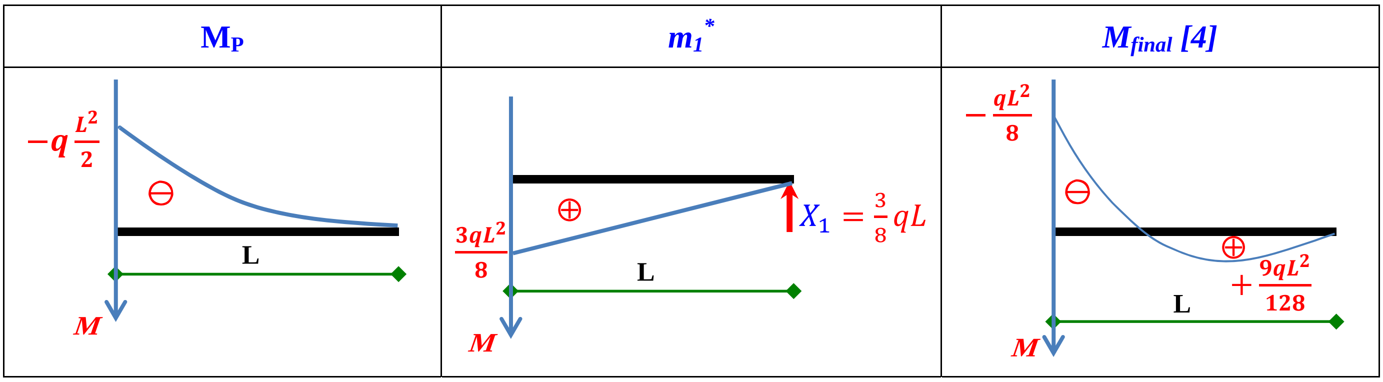
- si x_1 calculée est (+) on adopte le sens de x_1
- si x_1 calculée est (-) on inverse le sens de x_1

$$\begin{cases} X_1 = \frac{3}{8}qL \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

Correction de $m_1 = m_1^*$



Traçage du moment fléchissant final : $M = M_P + m_1^*$



[3] Sollicitations & déplacements des structures, Mohamed LERARI, CTC.
[4] RDM, Stepine, Mir ;1986 ; p189