6.8 الطرق المعتمدة في حل مشاكل نظرية الألعاب

إن الخطوة الأولى في عملية حل مشاكل نظرية الألعاب هو التأكد من أن مصفوفة البيانات التي تمثل مصفوفة الدفع قابلة للاختزال، بحيث تصبح بشكل أصغر حجماً من المصفوفة الأصلية. وبعد ذلك يتم تحديد طبيعة حالة اللعب، فإذا كان اللعب هو على أساس نقطة الالتقاء فإن في هذه الحالة يوجد استراتيجية وحيدة واجبة الاتباع من قبل كلا الطرفين المتنافسين، حيث تكون نسبة احتمال تحقق هذه الاستراتيجية هو 100٪.

أما إذا كانت حالة اللعب هي ليست على أساس نقطة الالتقاء وهو ما يعرف بالاستراتيجيات المختلطة، فعند ذلك يتم اللجوء إلى الطرق التالية في الحل:

1. الطريقة البيانية Graphical Method.
2. الطريقة المبسطة Simplex Method

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من هذه الطرق.

1.6.8 الطريقة الجبرية (التحليلية)

تعتمد هذه الطريقة على أساس عمليات الحل الجبرية والمستندة إلى نسب الاحتمالات في تحقيق استراتيجية كل واحد من اللاعبين. ومن أجل توضيح فكرة هذه الطريقة نعرض أدناه المثال التالي:

مثال رقم (1):

اثنين من المصانع المتخصصة بصناعة الألبسة تتنافس مع بعضها البعض من أجل طرح اثنين من الألبسة لكل منهما وقد دارت بينهما عمليات المنافسة التالية:

1. إذا طرح المعمل الأول البدلة x_1 وطرح المعمل الثاني البدلة y_1 فإن ذلك يعني تحقق نتيجة مالية مقدارها (1-) وحدة نقدية.
2. إذا طرح المعمل الأول البدلة x_1 وطرح المعمل الثاني البدلة x_2 فإن ذلك يعني تحقيق نتيجة مالية مقدارها (4) وحدة نقدية.
3. إذا طرح للمعمل الأول البدلة x_1 وطرح المعمل الثاني البدلة x_2 فإن ذلك يعني تحقيق نتيجة مالية مقدارها (3) وحدة نقدية.

4. إذا طرح المعمل الأول البدلة x_1 وطرح المعمل الثاني البدلة x_2 فإن ذلك يعني تحقيق نتيجة مالية مقدارها (2−) وحدة نقدية.

الحل:

إن نتائج عمليات المنافسة أعلاه يمكن وضعها في إطار مصفوفة الدفع التالية:

المعمل الثاني P_2

	x \ y	y_1	y_2
المعمل الأول P_1	X_1	-1	4
	X_2	3	-2

يتم حساب قيمة V_1, V_2 من خلال الحسابات التالية

اللاعب الأول P_1 (المعمل الأول)

$$\underset{i}{\text{Max}}\ \underset{j}{\text{min}}\ aij$$

$$-1\begin{cases}-1 & \begin{cases}a_{11}=-1\\a_{12}=4\end{cases}\\-2 & \begin{cases}a_{21}=3\\a_{22}=-2\end{cases}\end{cases}$$

$$V_1=-1$$

اللاعب الأول P_2 (المعمل الثاني)

$$\underset{j}{\text{Min}}\ \underset{i}{\text{max}}\ aig\ .$$

$$-2\begin{cases}3 & \begin{cases}a_{11}=-1\\a_{21}=3\end{cases}\\-2 & \begin{cases}a_{12}=4\\a_{22}=-2\end{cases}\end{cases}$$

$$V_2=-2$$

أي أن $V_1 \neq V_2$

يلاحظ مما تقدم عدم وجود نقطة الالتقاء، كذلك لا تتوفر قواعد السيطرة والاختـزال، لذلك يتم اللجوء إلى أحد طرق حـل الاسـتراتيجيات المختلطـة، وهـي الطريقـة الجبريـة أو التحليلية:

إن المعمل الأول يختار X_1 باحتمال قدره P_1.

يختار X_2 باحتمال قدره P_2.

علماً بأن:

$$P_1 + P_2 = 1$$
$$P_2 = 1 - P_1$$

إن القيمة المتوقعة لربح المعمل الأول في حالـة اتبـاع المعمـل الثـاني اسـتراتيجية الأولى تساوي :

القيمة المتوقعة لربح المعمل الأول $= -1\,(P1) + 3(P_2)$

$= -P_1 + 3(1-P_1)$

$= -P_1 + 3-3\,P_1$

∴ القيمة المتوقعة لربح المعمل الأول $\Leftarrow 3-4p_1$

القيمة المتوقعة لربح المعمـل الأول في حالـة اتبـاع المعمـل الثـاني الاسـتراتيجية الثانيـة تساوي:

القيمة المتوقعة لربح المعمل الأول $= 4P_1 - 2P_2$

$= 4P_1 - 2\,(1-P_1)$

$4P_1 - 2 + 2P_1$

$= 6P_1 - 2$

القيمة المتوقعة لربح المعمل الأول: $-2+6P_1$

مما تقدم يتضح أن لدينا اثنين من العلاقات الرياضية:

$(1)\ldots\ldots\ldots\ 3 - 4P_1$

$(2)\ \ldots\ldots\ldots -2 + 6p_1$

oy أفضل عائد للمعمـل الأول يقـوم علـى أسـاس تـساوي القيمـة المتوقعـة لربحـه في الحالتين، أي أن:

$$3-4P_1 = -2 + 6P_1$$

وبعد التبسيط نحصل على ما يلي:

$$3 + 2 = 4P_1 + 6P_1$$
$$5 = 10\,P_1$$

$$P_1 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

بما أن

$$P_2 = 1 - P_1$$

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

وهذا يعني إنه لو تكررت المنافسة بين المعمل الأول والمعمل الثاني 10 مرات، فإن على إدارة المعمل الأول اتباع الاستراتيجية الأولى X_1 (5) مرات بشكل عشوائي والاستراتيجية الثانية X_2 (5) مرات أيضاً بشكل عشوائي[1] وبالتالي سوف تكون قيمة المباراة تساوي (1).

وقد تم حساب هذه القيمة للمباراة كما يلي:

∵ القيمة المتوقعة لربح المعمل الأول في حالة اتباع المعمل الثاني الاستراتيجية الأولى هي:

$3 - 4\,p_1$

فإن بالتعويض نحصل على ما يلي:

$$-2 + 6\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -2 + 3 = 1$$

يتم إعادة نفس الخطوات بالنسبة للمعمل الثاني وذلك كما يلي:

إن القيمة المتوقعة لخسارة المعمل الثاني في حالة اتباع المعمل الأول الاستراتيجية الأولى هي:

من المعلوم أن:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 1 \\ 1q_1 + 4q_2 &= q1 + 4\,(1-q_1) \\ &= -q_1 + 4-q_1 \\ &= 5q_1 + 4 \\ &= 4-5\,q_1 \end{aligned}$$

وبنفس الطريقة السابقة أيضاً في حالة اتباع المعمل الثاني الستراتيجية الثانية:

$$\begin{aligned} 3q_1 + 2q_2 &= -3q_1 + 2\,(1-q_1) \\ &= 3q_1 - 2 + 2q_1 \\ &= 5q_1 - 2 \end{aligned}$$

وعليه فإن:

$$\begin{aligned} 4 - 5q_1 &= 5q_1 - 2 \\ 10q_1 &= 6 \end{aligned}$$

---

(1) المقصود هنا بالعشوائية هو عدم اتباع استراتيجية معينة بصورة متكررة كي لا يتمكن المنافس الثاني من اكتشاف الاستراتيجية والقيام بعمل مضاد.

$$q_1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

وهذا يعني أنه لو تكررت المنافسة (5) مرات فإن على المعمل الثاني اتباع الاستراتيجية الأولى y_1 بمقدار ثلاث مرات والثانية y_2 (2) مرة وذلك بشكل عشوائي، وإن نتيجة المنافسة سوف تفضي إلى تحقيق القيمة (1)، وذلك كما يلي:

$$4 - 5q_1 = 4 - 5\left(\frac{3}{5}\right) = 1$$

$$5q_1 - 2 = 5\left(\frac{3}{5}\right) - 2 = 1$$

2.6.8 طريقة البرمجة الخطية Lincar Programming Method

أولاً: الطريقة البيانية Graphical Method

إن الأسباب والدوافع التي تؤدي إلى اللجوء إلى هذه الطريقة هي نفسها التي ترد في حالة الطريقة الجبرية (التحليلية) يضاف إلى ذلك شرط آخر أن المصفوفة التي تعبر عن مصفوفة الدفع ينبغي أن تتكون من صفين فقط وعدد من الأعمدة أو بالعكس عمودين وعدد من الصفوف. وتعتمد هذه الطريقة أيضاً على الشكل البياني لعرض المشكلة وبيان نقاط الحل الأفضل ونقطة الحل الأمثل.

مثال رقم (1):

إن حصيلة المنافسة بين اثنين من المنشآت (B,A) أدت إلى ظهور مصفوفة الدفع التالية:

(Player no.2) B المعمل الثاني

	x \ y	y_1	y_2
المنشأة الأولى A	X_1	-2	5
Player no.1	X_2	2	-3

المطلوب:

أوجد قيمة V_1، V_2 وعدد مرات استخدام كل من استراتيجيات المنشأة الأولى A والمنشأة الثانية B وذلك باستخدام طريقة الرسم.

الحل:

لحل هذه المشكلة نفرض أن المنشأة (A) تتبع الاستراتيجية الأولى X_1 باحتمال مقداره (P_1) والاستراتيجية الثانية X_2 باحتمال مقداره (P_2) لذلك فإن:

$$P_1 + P_2 = 1$$

وبما أن نتيجة المباراة هي (V) لذلك فإن المنشأة (A) تسعى إلى أن يكون:

$$V \Rightarrow Max.$$

1. إن القيمة المتوقعة لربح المنشأة A في حالة اتباع المنشأة B الاستراتيجية الأولى تحسب كما يلي:

$$-2\,p_1 + 2p_2$$

وعند التعويض عن قيمة ($P2 = 1\text{-}p1$) نحصل على ما يلي:

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2 - 4\,P_1$$

2. إن القيمة المتوقعة لربح المنشأة A في حالة اتباع المنشأة B الاستراتيجية الثانية تحسب كما يلي:

$$5p_1 - 3p_2$$

وعند التعويض عن قيمة ($P_2 = 1\text{-}P_1$) نحصل على ما يلي:

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ -3 + 8p_1$$

من أجل أن تضمن المنشأة الأولى A قيمة المباراة V فإن من المفروض أن تتحقق الشروط التالية:

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2 - 4P_1 \geq V$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ -3 + 8P_1 \geq V$$

وبعد تبسيط هذه العلاقات الرياضية، وذلك بنقل القيم الحرة إلى الطرف الأيمن من العلاقات الرياضية (R.H.S) مع تجزئة العلامة الرياضية (≥) إلى (> و =) واعتماد علاقة المساواة تحصل على ما يلي:

$$(1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ V + 4P_1 = 2$$

$$(2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ V - 8P_1 = -3$$

من المعادلة الأولى نحصل على النقاط المطلوبة لرسم المستقيمات على اعتبار أن إحداثيات النقطة هي (P, V) وذلك كما يلي:

1. نفرض أن $P_1 = 0$

∴ فإن قيمة $V \Leftarrow 2$ } (0, 2) النقطة الأولى

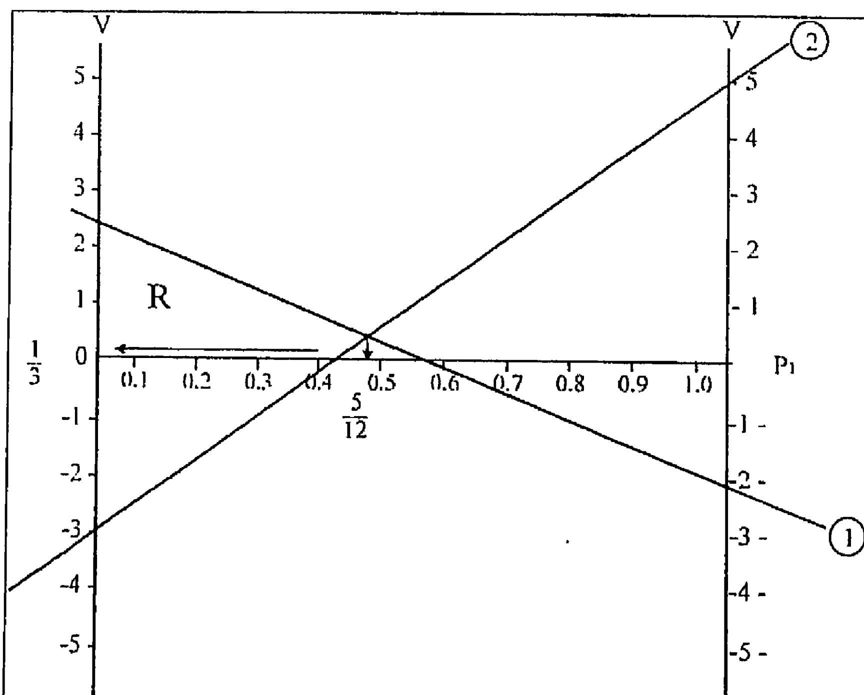
2. نفرض أن $P_1 = 1$
∴ فإن قيمة $V \Leftarrow -2$ ⟵ النقطة الثانية $(1, 2)$

من المعادلة الثانية نحصل على النقاط المطلوبة لرسم المستقيمات كما يلي:

1. نفرض أن $P_1 = 0$
∴ فإن قيمة $V \Leftarrow -3$ ⟵ النقطة الأولى $(0, -3)$

2. نفرض أن $P_1 = 1$
∴ فإن قيمة $V \Leftarrow 5$ ⟵ النقطة الثانية $(1, 5)$

الخطوة التالية هو رسم العلاقات الرياضية السابقة، وذلك بعد أن يتم تحديد (v) على المحور العمودي و (P_1) على المحول الأفقي كما في الشكل رقم (8-1).



الشكل رقم (8-1) تمثيل العلاقات الرياضية للاعب الأول (المنشأة A) بيانياً

إن المنطقة المظللة في الشكل السابق تمثل منطقة الحلول الممكنة (R) وذلك للاعب الأول. ويتم الحصول على الحل الأمثل في أبعد نقطة تقاطع للمستقيمات رقم (1) ورقم (2) بالقياس إلى نقطة الأصل. وبعد إنزال مساقط عمودية من نقطة تقاطع المستقيمين أعلاه نحصل على قيم إحداثيات نقطة الحل الأمثل وهي $\left(P1=\frac{5}{12}\ ,\ V=\frac{1}{3}\right)$ أي أن على المنشأة (A) اتباع استراتيجية الأولى باحتمال $\left(\frac{5}{12}\right)$ والاستراتيجية الثانية باحتمال يحسب كما يلي:

$$1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

أي باحتمال مقداره $\frac{7}{12}$. ويتم إعادة نفس الخطوات السابقة بالنسبة للاعب الثاني وهو المنشأة B وذلك كما يلي:

نفرض أن المنشأة (B) تتبع الاستراتيجية الأولى باحتمال قدره (q1) والاستراتيجية الثانية باحتمال قدره (q2) لذلك فإن:

$$q_1 + q_2 = 1$$

إن المنشأة (B) تسعى دائماً إلى جعل القيمة المتوقعة لخسارتها أقل ما يمكن، لذلك فإن القيمة المتوقعة لخسارة المنشأة (B) في حالة اتباع المنشأة (A) الاستراتيجية الأولى يساوي:

$$-2q_1 + 5q_2 = 5-7q_1$$

إن القيمة المتوقعة لخسارة المنشأة (B) في حالة اتباع المنشأة (A) الاستراتيجية الثانية هي:

$$-2q_1 - 3q_2 = -3 + 5q_1$$

من أجل أن تكون المنشأة (B) قادرة على تصغير نتيجة المباراة، يجب أن تتحقق الشروط أو القيود التالية:

$$5-7q_1 \le V \Rightarrow V + 7q_1 \ge 5$$
$$-3 - 5q_1 \le V \Rightarrow V - 5q_1 \ge -3$$

ولأجل أن يتم رسم هذه القيود في إطار الشكل البياني الخاص بالمشكلة يتطلب الأمر في البداية تمويل هذه العلامات الرياضية من حالة المتباينات إلى حالة المعادلات، وذلك كما يلي:

$$V + 7q_1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$V - 5q_1 = -3 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

علماً بأن دالة الهدف هو أن تكون (V) أقل ما يمكن (Min) أي أن:

$$V \Rightarrow \text{Min.}$$

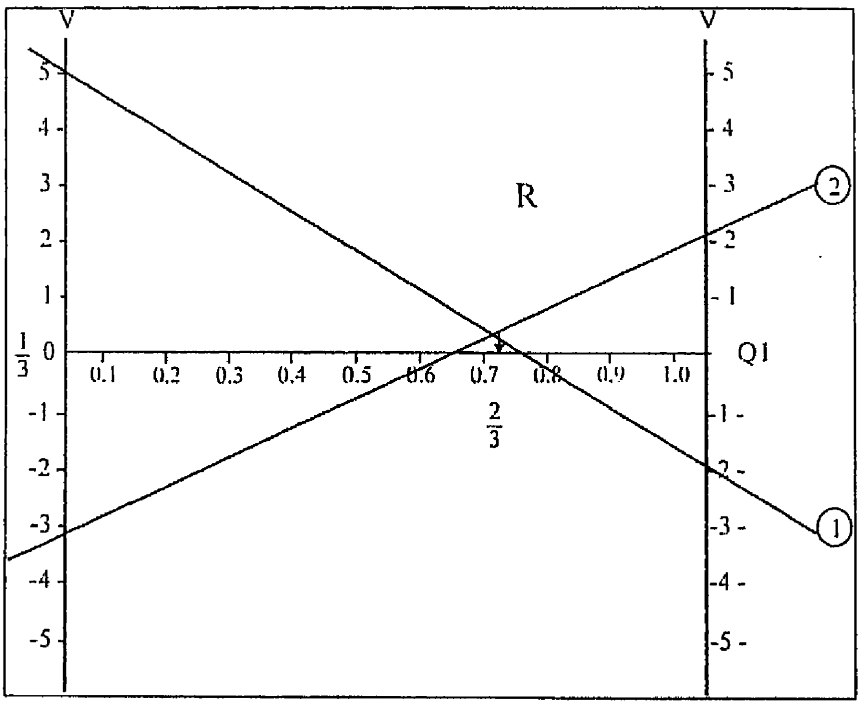
ولأجل تنفيذ عملية الرسم، يتطلب الأمر أيضاً تحديد النقاط الخاصة بكل من العلاقة الرياضية الأولى والثانية، وذلك كما يلي:

1. نفرض أن $q_1 = 0$ ∴ $V = 5$ (0.5) النقطة الأولى
2. نفرض إن $q_1 = 1$ ∴ $V = -2$ (1,-2) النقطة الثانية

ومن المعادلة الثانية نحصل على ما يلي:

1. نفرض أن $q_1 = 0$ ∴ $V = -3$ (0. - 3) النقطة الأولى
2. نفرض إن $q_1 = 1$ ∴ $V = 2$ (1,2) النقطة الثانية

يتم تمثيل (V) على المحور العمودي و (q_1) على المحور الأفقي كما في الشكل (8-2):



شكل (8-2) العلاقات الرياضية التي تعبر عن اللاعب الثاني

إن المنطقة (R) الموضحة بالشكل رقم (8-2) هي منطقة الحلول الممكنة للمنشأة (B)، وإن الحل الأمثل يقع في أقرب نقطة تقاطع للمستقيمات بالقياس إلى نقطة الأصل، وبعد إنزال المساقط العمودية من نقطة التقاطع على المحور (q_1) والمحور (V) نحصل على إحداثيات نقطة التقاطع وهي:

$$q_1 = \frac{2}{3}$$

$$V = \frac{1}{3}$$

أي أن على المنشأة (B) اتباع الاستراتيجية الأولى باحتمال قـدره $\left(\frac{2}{3}\right)$ والاسـتراتيجية الثانية باحتمال قدره $\left(\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\right)$ وهذا يـؤدي إلى أن تكـون نتيجـة المبـاراة مـساوية لمـا تم الحصول عليه بالنسبة للمنشأة الأولى (A) وهي $\left(\frac{1}{3}\right)$.

ثانياً: الطريقة المبسطة (Simplex Method)

إن فكرة هذه الطريقة تقوم على أساس إيجاد الحل الأمثل على مراحل حيث في المرحلة الأولى يتم الحصول على الحل الممكن والمراحل التالية هي لإيجاد الحل الأفضل. أمـا المرحلـة الأخيرة فهي تخصص للحصول على الحل الأمثل. وتتم مراحل الحـل في إطـار جـدول يعـد بشكل خاص لهذه الطريقة، وتتم في كل مرحلة عدد من العمليات الحسابية التي من شأنها أن تؤدي إلى تحديد قيم المتغيرات الأساسية المجهولة وكذلك تحديد قيمة دالة الهدف. ويتم اللجوء إلى هذه الطريقة إذا كان عدد المتغيرات في النموذج الرياضي أكثر من اثـنين. وبعبـارة أخـرى تستخدم هذه الطريقة عندما تكون مصفوفة الدفع معقدة وذات قياسات أكبر الحـالات الـتي وردت أعلاه حيث يكون هنالك ثلاث متغيرات (بدائل أو استراتيجيات) أو أكثر من ذلك.

لتوضيح فكرة هذه الطريقة يتطلب الأمر في البداية توضيح للنماذج الرياضـية اللازمـة لهذه الطريقة[1]. وإن هذه النماذج تعتمد بالدرجة الأساس على الصيغة العامة لمصفوفة الدفع (aij) التي تم توضيحها في البداية هذا الفصل.

عند تحليل مصفوفة الدفع (aij) نجد أن هناك عدد من الاستراتيجيات الممكنة المتاحة للاعب الأول وهذه الاستراتيجيات هي $(x_1, x_2, \dots, x_m)$، وإن الاستراتيجيات الممكنة للاعب الثاني هي $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ إن عناصر المصفوفة (aij) إما أن تكون موجبة أو سالبة.

---

(1) يقصد بذلك أحد أساليب حل البرمجة الخطية وما يرتبط بها من براجيات، لمزيد من التفاصيل راجع:
H.A. TAHA "OPARATIONS RESEARCH-An Introduction" Prentice Hall, New Jersey 1997. p.p. 563.

ويمكن إعادة ترتيب بيانات المصفوفة لكي تصبح كلها موجبة بإضافة كمية أو مقدار ثابت (كما تم توضيح ذلك في الفصل الثالث).

إن لكل واحد من اللاعبين إمكانية لاعتماد مجموعة من الاستراتيجيات في مواجهة حالة الصراع والمنافسة التي تدور بينهما في السوق.

على افتراض أن اللاعب الأول (المنشأة أو المؤسسة) بإمكانها اختيار أي من الاستراتيجيات المتاحة لها بحرية تامة بالاحتمالات $(p_1, p_2, .., pm)$ علماً بأن:

$$0 \leq P_i \leq 1$$

حيث أن $i = 1.2.....m$

وأن مجموع الاحتمالات يساوي واحد، أي أن

$$P_1 + P_2 + \ldots Pm = 1$$

وبنفس الطريقة يمكن التعبير عن الحالة بالنسبة للاعب الثاني (المنشأة أو المؤسسة) إذ بإمكان هذا اللاعب اتباع أي من الاستراتيجيات المتاحة له بحرية تامة باحتمالات $(q1, q2, \ldots qn)$ علماً بأن:

$$0 \leq q_j \leq 1$$

وأن مجموع الاحتمالات يساوي واحد، أي أن:

$$q_1 + q_2 + \ldots qn = 1$$

نفرض أن نتيجة المباراة بالنسبة للمنشأة (A) التي تمثل اللاعب الأول تساوي (V). فإن هذه الحالة يكون الهدف هو تعظيم قيمة (V) إلى أكبر ما يمكن $(Z \Rightarrow Max.)$، أما بالنسبة لقيود المشكلة، فهي تكتب وفقاً لما يلي:

1. إن القيمة المتوقعة لربح اللاعب الأول A في حالة اتباع اللاعب الثاني B الاستراتيجية الأولى، كما يلي:

$$a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + \ldots + am_1P_1$$

ولأجل أن يضمن اللاعب الأول A تعظيم نتيجة المباراة، يجب أن يتحقق ما يلي:

$$a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + \ldots + am_1P_1 \geq V$$

وهكذا بالنسبة لبقية الاستراتيجيات، ومع إضافة القيد الخاص بعدد الاحتمالات $(P_1 + P_2 + .. + Pm=1)$ أن تصبح الصيغة الرياضية للنموذج الرياضي الخاصة باللاعب الأول A كما يلي:

1. دالة الهدف: $Z \Rightarrow Max\ V$.
2. القيود:

$$\begin{array}{l} a_{11}P_1 + a_{21}P_2 + \dots + am_1P_m \geq V \\ a_{12}P_1 + a_{22}P_2 + \dots + am_2P_m \geq V \\ \vdots \\ a_{1n}P_1 + a_{2n}P_2 + \dots + am_nP_m \geq V \\ P1 + P2 + \dots + Pm = 1 \\ P1\ ,\ P2, P3, \dots + Pm \geq 0 \end{array}$$

إن النموذج الرياضي السابق يمكن أن يتم تبسيطه من خلال أجزاء بعض العمليات الحسابية، وذلك بقسمة قيم المتغيرات في طرفي العلاقة الرياضية على المقدار V، حيث نحصل على ما يلي:

$$a_{11}\ \frac{p_1}{V} + a_{21}\ \frac{p_2}{V} + \dots + am_1\ \frac{pm}{V} \geq 1$$

$$a_{12}\ \frac{p_1}{V} + a_{22}\ \frac{p_2}{V} + \dots + am_2\ \frac{pm}{V} \geq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{1n}\ \frac{p_1}{V} + a_{2n}\ \frac{p_2}{V} + \dots + amn\ \frac{p_1}{V} \geq 1$$

$$\frac{p_1}{V} + \frac{p_2}{V} + \dots + \frac{pm}{V} = \frac{1}{V}$$

أما بالنسبة لدالة الهدف فهي:

$$Z \Rightarrow \text{Max. } V = \text{Min } \frac{1}{V}$$

وبالتعويض نحصل على ما يلي:

$$\text{Min.} \frac{1}{V} = \text{Min}\left(\frac{p_1}{V} + \frac{p_2}{V} + \dots + \frac{pm}{V}\right)$$

وبالتعويض عن كل قيمة $\left(\frac{p_1}{V}\right)$ بالمتغير (xi) حيث أن: (i=1,2,...,m) نحصل على ما يلي:

$$\text{Min } (x_1 + x_2 + \dots + xm)$$

ولو فرضنا أن دالة الهدف هي Z، فإن المطلوب تصغير ما يلي:

$$\text{Min .Z } (x_1 + x_2 + \dots + xm)$$

وفقاً للشروط التالية:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + am_1x_m \geq 1$$

$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + am_2x_m \geq 1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + am_nx_m \geq 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 ,\dots + xm \geq 0$$

على افتراض أن V قيمة موجبة.

ولو تم صياغة النموذج المقابل (Dual Model) للنموذج الوارد أعلاه، فإننا سوف نحصل على الصيغة الرياضية للنموذج الذي يعبر عن اللاعب الثاني B. يتم صياغة النموذج المذكور على أساس أن ($y_1, y_2, .. yn$) هي عبارة عن المتغيرات الخاصة بالنموذج المقابل، وعندها سوف تكون الصيغة الرياضية هي[1]:

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + am_1y_m \leq 1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + am_2y_m \leq 1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq 1$$
$$y_1 + y_2 + \dots + yn \geq 0$$

ومن الجدير بالذكر هنا إن بالإمكان صياغة النموذج الرياضي للاعب الثاني B من خلال النموذج الأولي Primal، ومن ثم يقلب هذا النموذج للحصول على النموذج المقابل Dual الذي يعبر عن تطلعات اللاعب الأول A. وهذا هو عكس الحالة الوارد ذكرها أعلاه.

ومن أجل توضيح فكرة طريقة السمبلكس Simplex Method في معالجة مشكلة تتكون من أكثر من ثلاث متغيرات (مصفوفة دفع بثلاث صفوف وثلاث أعمدة) نأخذ المثال التالي:

مثال رقم (1):

إن النتيجة المالية لتسويق ثلاث أنواع من المنتجات هو تحقق مصفوفة الدفع التي سوف يرد ذكرها أدناه، حيث تحققت هذه المصفوفة نتيجة المنافسة بين اثنين من المنشآت الإنتاجية وذلك كما يلي:

المنشأة B اللاعب الثاني

---

(1) يطلق على هذه الصيغة عندما تكون علامة القيود (≤) وكذلك على الصيغة السابقة عندما تكون علامة القيود (≥) الصيغة القانونية Canonical form، لمزيد من التفاصيل راجع كتابنا مع الدكتور محمود العبيدي والموسوم: بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال/ إصدار مؤسسة الوراق، الأردن/ عمان 2004، صفحة 350.

	y / x	y_1	y_2	y_3	Min.	Max.
المنشأة A	X_1	1	1	-2	-2	
اللاعب	X_2	-2	3	2	-2	-1*
الأول	X_3	2	-1	1	-1	
	Max.	2	3	2		
	Min.		*2			

يلاحظ من مصفوفة الدفع إنه ليس فيها نقطة التقاء، كما لا توجد إمكانية للاختزال، لذلك يتم اللجوء إلى طريقة السمبلكس. يتم في البداية صياغة النموذج الرياضي للمشكلة وكما يلي:

أولاً: بالنسبة للمنشأة A اللاعب الأول حيث تم صياغة النموذج الرياضي الأولي Primal Model وكما يلي:

1. دالة الهدف $Z = x1 + x2 + x3 \Rightarrow Min$
2. القيود:

$$\begin{aligned}
&x_1 - 2x_2 + 2x_3 \ \geq 1 \ldots\ldots\ldots(1)\\
&x_1 - 3x_2 - x_3 \ \geq 1 \ldots\ldots\ldots(2)\\
&-2x_1 + 2x_2 + x \ \geq 1 \ldots\ldots\ldots(3)\\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

ثانياً: بالنسبة للمنشأة B اللاعب الثاني، حيث يتم صياغة النموذج الرياضي المقابل Dual Model وذلك كما يلي:

3. دالة الهدف $W = y_1 + y_2 + y_3 \Rightarrow Min$
4. القيود:

$$\begin{aligned}
&y_1 - y_2 + 2y_3 \ \leq 1 \ldots\ldots\ldots(1)\\
&-2y_1 - 3y_2 - 2y_3 \ \leq 1 \ldots\ldots\ldots(2)\\
&2y_1 + y_2 + y_3 \ \leq 1 \ldots\ldots\ldots(3)\\
&y_1, y_2, y_3 \leq 0
\end{aligned}$$

من أجل التوصل إلى النتائج النهائية لهذه المنافسة أو المباراة وبشكل سريع ومبسط، يفضل أن يتم الاعتماد في عملية الحل على الصيغة الرياضية للنموذج المقابل Dual Model وذلك باستخدام طريقة السمبلكس Simplex Method، حيث أن الحل بالاعتماد على النموذج الأولي Primal Model هو أكثر تعقيداً في هذه الحالة لكونه يتطلب اللجوء إلى أسلوب Mi-Technique.

إن حل النموذج المقابل الوارد في الفقرة ثانياً يعبر عن الموقف التنافسي للاعب الثاني B. وتتم عمليات الحل في إطار جدول السمبلكس رقم (8-1). حيث يتطلب الأمر في البداية تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية وذلك بإضافة المتغيرات الراكدة (S) وذلك كما يلي:

$$y_1 + y_2 - 2y_3 + S_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$-2y_1 + 3y_2 - 2y_3 + S_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$2y_1 - y_2 - y_3 + S_3 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$
$$W = y + y_2 + y_3 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_3 \rightarrow Max.$$
$$y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$$
$$S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$$

المتغيرات		y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	قيمة المتغير الأساس b_i	معامل المتغيرات الأساسية في دالة الهدف CB
معامل المتغيرات في دالة الهدف Cj		1	1	1	0	0	0		
المتغيرات الأساسية	S_1	1	1	-2	1	0	0	1	0
	S_2	-2	3	2	0	1	1	1	0.
	S_3	(2)	-1	1	0	0	1	1	0
wj		0	0	·0	0	0	0	1	قيمة دالة الهدف W
(Cj-wj)		(1)	1	1	0	0	0	0	
المتغيرات الأساسية	S_1	0	(2/3)	-5/2	1	0	-1/2	1/2	1
	S_2	0	2	3	0	1	1	1	0
	Y_1	1	-1/2	1/2	0	0	1/2	1/2	1
Wj		1	-1/2	1/2	1/2	0	Y2	$\frac{1}{2}$	قيمة دالة الهدف w
(Cj-Wj)			0	(3/2)	1/2	0	0		
المتغيرات الأساسية	Y_2	0	1	-5/3	2/3	0	-1/3	1/3	1
	S_2	0	0	(19/3)	-4/3	1	5/3	4/3	0
	Y_1	1	0	-1/3	1/3	0	1/3	2/3	1
wj		1	1	-2	1	0	0	1	قيمة دالة الهدف w
(Cj-wj)		1	0	(3)	-1	0	0		
المتغيرات الأساسية	y_2	0	1	0	6/19	5/19	2/19	13/19	
	y_1	0	0	1	-4/19	3/19	5/19	4/19	
	Y_1	1	0	0	5/19	1/19	8/19	14/19	
wj		1	1	1	7/19	9/19	15/19	31/19	قيمة دالة الهدف w
(Cj-wj)		0	0	0	-7/19	-9/19	-15/19		

من الجدول السابق يتضح أن الحل الأمثل هو:

$$y_1 = \frac{14}{19}$$

$$y_2 = \frac{13}{19}$$

$$y_3 = \frac{4}{19}$$

وإن قيمة دالة الهدف (w) تساوي $\frac{31}{19}$

ومن العلاقات الرياضية السابقة كان لدينا ما يلي:

$$Max.v = Min\ \frac{1}{w}$$

لذلك فإن:

$$Max.\ V = Min \frac{1}{\frac{31}{19}}$$

أي أن قيمة V للاعب الثاني B تصبح كما يلي:

$$V = \frac{19}{31}$$

ومن الجدول السابق يتضح لدينا إن معاملات المتغيرات الراكدة (S_2, S_2, S_3) في الحقل wj هي عبارة عن قيم للمتغيرات x_1, x_2, x_3 على التوالي في النموذج الأولي الذي يعبر عن حالة اللاعب الأول A، وعلى هذا الأساس تكون قيم المتغيرات المذكورة في النموذج الأولي، كما يلي:

$$x_1 \Rightarrow \frac{7}{19}$$

$$x_2 \Rightarrow \frac{9}{19}$$

$$x_3 \Rightarrow \frac{15}{19}$$

وإن قيمة دالة الهدف (Z) تحسب كما يلي:

$$Z\ (x1 + x2 + x3)$$

$$Z = \frac{7}{19} + \frac{9}{19} + \frac{15}{19}$$

$$Z = \frac{7+9+15}{19} = \frac{31}{19}$$

ومن العلاقات الرياضية السابقة كان لدينا:

$$V = \frac{1}{z}$$

∴ قيمة V بالنسبة للاعب الأول Aهي:

$$V = \frac{19}{31}$$

ويلاحظ مما تقدم إن نتيجة المنافسة (V) للاعبين (.B.A) متساوية. وبما إن:

$$Xi = \frac{pi}{v}$$

وذلك لجميع قيم (i)

وكذلك يمكن التعبير عن هذه العلاقة كما يلي:

$$Pi = xi * V$$

عليه فإنه إذا كانت لدينا (i= 1,2,3) يكون لدينا:

$$p_1 = x_1\ v = \frac{7}{19} \times \frac{19}{31} \Rightarrow \frac{7}{31}$$
$$p_2 = x_2\ v = \frac{9}{19} \times \frac{19}{31} \Rightarrow \frac{9}{31}$$
$$p_3 = x_3\ v = \frac{15}{19} \times \frac{19}{31} \Rightarrow \frac{15}{31}$$

إن هذه النتائج تعني أن على المنشأة (A) أن تتبع الاستراتيجية الأولى (x_1) الواردة في اصل مصفوفة الدفع باحتمال مقداره $\left(\frac{7}{31}\right)$ وإن تتبع الاستراتيجية الثانية (x_2) باحتمال مقداره $\left(\frac{9}{31}\right)$ وإن تتبع الاستراتيجية الثالثة باحتمال مقداره $\left(\frac{15}{31}\right)$.

أما بالنسبة للاعب الثاني (المنشأة B) فإن عليها اتباع الاستراتيجيات الثلاث الواردة في أصل مصفوفة الدفع وفقاً للاحتمالات الثالثة:

$$q_1 = y_1 v = \frac{14}{19} \times \frac{19}{31} \Rightarrow \frac{14}{31}$$
$$q_2 = y_2 v = \frac{13}{19} \times \frac{19}{31} \Rightarrow \frac{13}{31}$$
$$q_3 = y_3 v = \frac{4}{19} \times \frac{19}{31} \Rightarrow \frac{4}{31}$$

3.6.8 طريقة البرمجيات الجاهزة

في المثال السابق تم الأخذ بنظر الاعتبار أن كل واحد من اللاعبين لديهم ثلاث استراتيجيات ممكنة، ولو كانت هنالك حالة معينة يكون فيها عدد الاستراتيجيات أكثر من