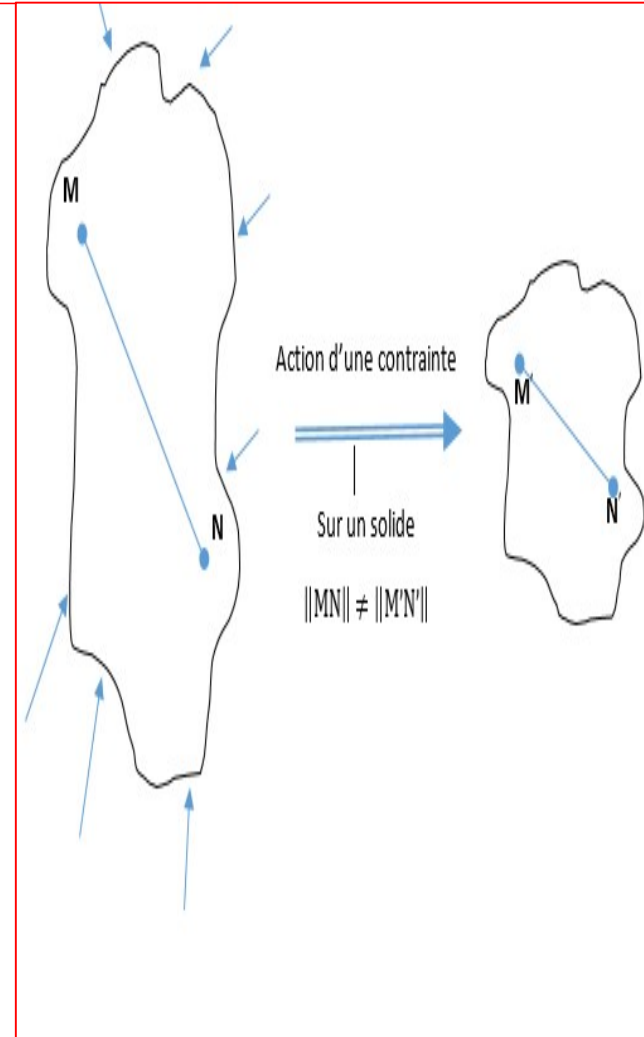


# Introduction à l'élasticité et rappels mathématiques

## 1.1. Généralité sur l'élasticité

- ✓ L'élasticité consiste à étudier la mécanique des corps solides déformables (par opposition à la mécanique du point ou des corps indéformables).
- ✓ Les contraintes qui s'exercent sur un objet, fait d'un matériau donné : de forme donnée, et de volume donné une translation ; rotation ; déformation (changement de forme et du volume).
- ✓ La mécanique du point ou du solide indéformable étudie la translation et la rotation, l'élasticité s'intéresse exclusivement à la déformation.



# Introduction à l'élasticité et rappels mathématique

## 1.2. Objectif de l'élasticité

- a. **Stabilité** des structures mécaniques : construction des **ponts** ; **routes** ; structures en **béton** ; les formes d'un **profilé** ; taille maximale d'un **immeuble** ; **fibres** ; **tissus synthétiques**.
- b. La **géométrie est importante** : **Profilés** des **poutres** utilisés dans le bâtiment ; **Caoutchouc** ou un **élastomère** préparé en tube.
- c. **Fluides viscoélastiques** : modification de **la rhéologie** des matériaux complexes par rapport à celle des **fluides simples** ; solution de **polymères** ; **gels** ; **pâtes** ; **poudres** ; **sables**.

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématique

## 1.3. Rappels Mathématiques

### Application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

- ✓ Image d'un vecteur par l'application linéaire  $\underline{A}$  :

$$\vec{a} \xrightarrow{A} \underline{A} \cdot \vec{a} \quad \underline{A} \vec{a} \quad (\text{Notation à ne pas confondre avec le produit scalaire}).$$

- ✓ Les applications linéaires peuvent représenter sous forme de matrice dont la **trace** et le **déterminant** sont :

$$\mathbf{tr}(\underline{A}) \text{ et } \mathbf{det}(\underline{A}).$$

- ✓ L'application transposée est définie par :

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \vec{b} \cdot (A^T \cdot \vec{a}) = \vec{a} \cdot (A^T \cdot \vec{b})$$

- ✓ La composition de deux applications  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$ , est notée :  $\underline{A} \circ \underline{B}$

$$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (A \circ B) \cdot \vec{a} = A \cdot (B \cdot \vec{a}) \text{ Parfois notée : } \underline{A} \circ \underline{B}$$

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématique

## 1.3. Rappels Mathématiques

### Application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$

✓ Les parties symétriques et les parties non symétriques de A sont :

$$A^s = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

$$A^A = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

- A symétrique  $\Rightarrow A = A^T \Leftrightarrow A^A = 0.$
- A anti- symétrique  $\Rightarrow A = -A^T \Leftrightarrow A^s = 0.$

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématique

## 1.3. Rappels Mathématiques

### Notations matricielles

❖ Une base **orthonormée**  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$   $\Rightarrow \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

❖  $\underline{A}$  représentée par  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

❖  $\underline{A}^T$  : représentée par  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$  ;  $\vec{c} = \underline{A} \cdot \vec{b}$  Représenté par  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^T$

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématique

## 1.3. Rappels Mathématiques

### Notations indicielles

- Ecriture d'un **vecteur** :  $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \cdot \vec{e}_i$ .

$$\text{Si : } \vec{c} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b} : \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{32}b_3 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow C_i = a_{ij} \cdot b_j.$$

❖ Symbole de Kronecker : le symbole est donné par :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$

- La matrice identité s'écrit :  $\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = [\delta_{ij}]$ .

- En particulier, pour les **vecteurs de base** ( $e_i$ ):  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ .

- Ecriture d'un **produit scalaire** :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \vec{e}_i + b_j \vec{e}_j = a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i$$

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématiques

## 1.3. Rappels Mathématiques

### Notations indicielles

Symbole de permutation :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } i, j, k \text{ Permutation } \textit{paire} \text{ de } 123. \\ -1, & \text{si } i, j, k \text{ Permutation } \textit{impaire} \text{ de } 123. \\ 0, & \text{si } i \neq j \text{ Deux indices } \textit{répétés}. \end{cases}$$

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i)$$

**Produits vectoriels** des vecteurs dans la base  $(e_i)$  :

$$(\vec{e}_i) \wedge (\vec{e}_j) \Rightarrow \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = a_i \vec{e}_i \wedge b_j \vec{e}_j = a_i b_j (\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j)$$

$$= \epsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k.$$

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématiques

## 1.3. Rappels Mathématiques

### Calcul différentiel :

Soient les fonctions d'une variable spatiale :  $\vec{x}$  de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs scalaires, **vecteur** et **tenseur**.

### $\vec{F}$ : Champ scalaire :

1. Le **gradient**  $\Rightarrow df = \overline{\text{grad}} F \cdot d\vec{x} = \overline{\text{grad}} F = \overline{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x_i} \vec{e}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} \end{bmatrix}$  **Vecteur**.
2. Le **Laplacien**  $\Rightarrow \nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \right)$  **Scalaire**.

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématiques

## 1.3. Rappels Mathématiques

$\vec{F}$  : Champ vectoriel

1. Divergence :  $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$  (scalaire)

2. Laplacien :  $\mathbf{D}\vec{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \vec{e}_i$  (Vecteur)

3. Rotationnel :  $\text{rot } \vec{v} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \vec{e}_i$  (Vecteur)

4. Gradient  $\vec{v} \Rightarrow d\vec{v} = \text{grad } \vec{v} d\vec{x}$  ;  $\nabla \vec{v} = \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$  (Tenseur).

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématiques

## 1.4. Exercices

EX01 :

On considère les matrices suivantes

$$\mathbf{A} (1 \ 2 \ 3) ; \mathbf{B} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Quels sont les **produits matriciels possibles** ? Quelles sont les **matrices carrées** et les **matrices symétriques**.

Solution

**NB:** Pour multiplier  $[\mathbf{A}] \times [\mathbf{B}]$ , il faut que le **nbre de lignes**  $[\mathbf{A}]$  soit égal au **nbre de colonnes** de  $[\mathbf{B}]$ .

On peut effectuer les produits  $AC, AE, CB, DB, DD, EC, EE$ . Seules les matrices  $D$  et  $E$  sont carrées, et seule la matrice  $D$  est symétrique.

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématiques

## 1.4. Exercices

EX02 :

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits  $AB$  et  $BA$  dans chacun des cas suivants :

1-  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; 2-  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ; 3-  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Solution

1- Puisque  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées de même ordre, les deux produits  $AB$  et  $BA$  sont possibles. On trouve :

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En particulier,  $AB=BA=0$  alors que ni  $A$  ni  $B$  ne sont nuls.

2- Le produit  $AB$  n'est pas défini car  $A$  à trois colonnes et  $B$  deux lignes. Pour  $BA$ , on trouve:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

3- Le produit  $BA$  n'est pas défini. En revanche, on a:  $AB = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématiques

## 1.4. Exercices

### EX03 :

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant calculer leur inverse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}. \quad I = \begin{bmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution

A est inversible. On trouve son inverse:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

B est inversible. On trouve son inverse:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématiques

## 1.4. Exercices

### Solution

- La matrice  $C$  n'est donc pas inversible
- $I$  est inversible et son inverse est:

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ -1 & 3i/4 & i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

# Introduction à l'élasticité et rappels mathématiques

## 1.4. Exercices

### EX04 :

Soient :  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$  deux vecteurs, calculer : a).  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  ; b).  $\vec{w} \cdot \vec{v}$  ; c).  $\vec{v} \cdot \vec{v}$  ; d).  $\vec{w} \cdot \vec{w}$  ; e).  $\|\vec{v}\|$  ; f).  $\|\vec{w}\|$  .

### EX05 :

On donne les vecteurs :  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Calculer et comparer : **a).**  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  et  $\vec{v} \wedge \vec{u}$  ; **b).**  $\vec{u} \wedge (2 \cdot \vec{v})$  ;  $(2 \cdot \vec{u}) \wedge (2 \cdot \vec{v})$  ;  $2 \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$  . **c).**  $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})$  et  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$  ; **d).**  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  ;  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$  .

### EX05 :

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$