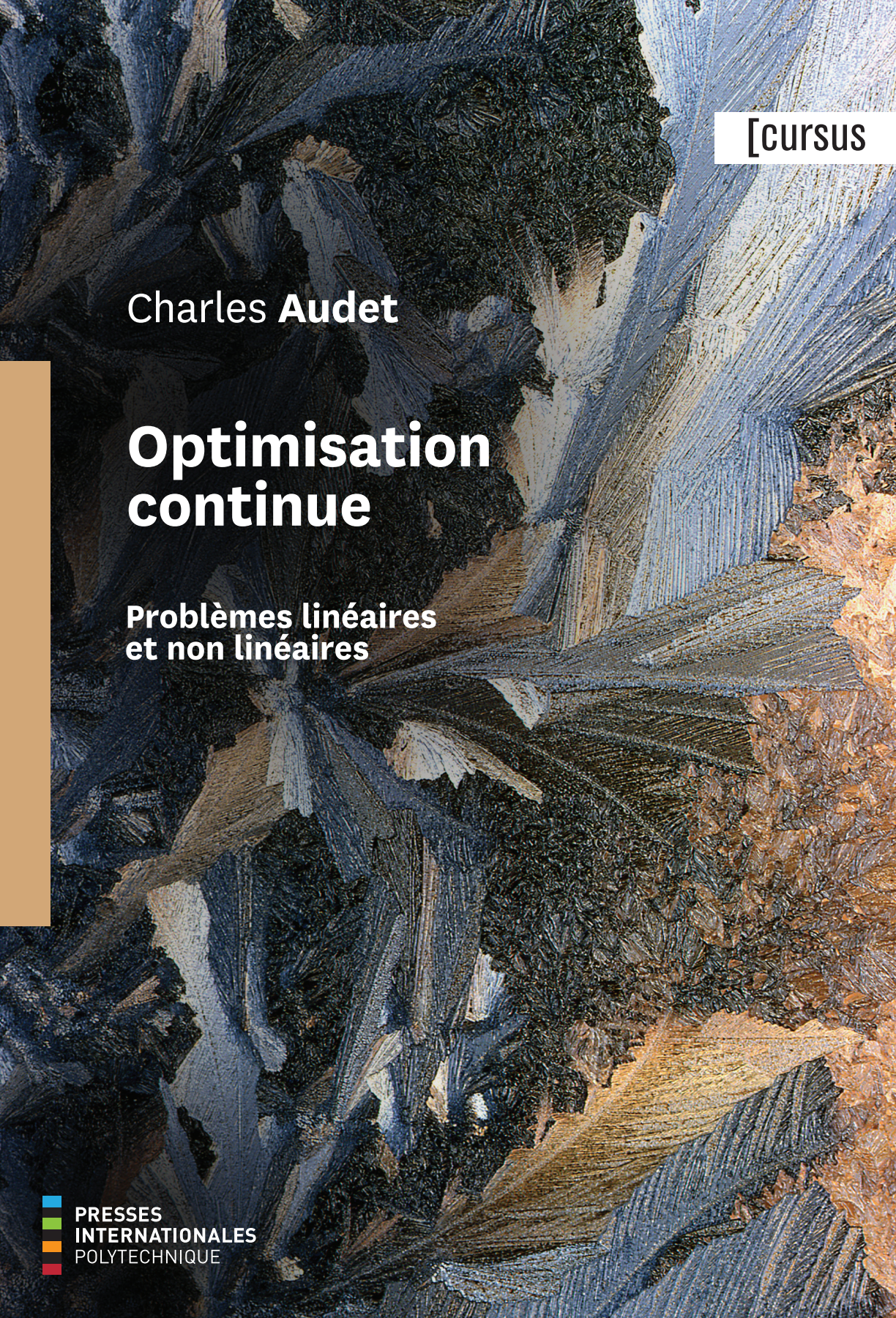


[cursus

Charles **Audet**

Optimisation continue

Problèmes linéaires et non linéaires

PRESSES INTERNATIONALES POLYTECHNIQUE

[CURSUS

Charles **Audet**

Optimisation continue

Problèmes linéaires et non linéaires

PRESSES
INTERNATIONALES
POLYTECHNIQUE

Optimisation continue - Problèmes linéaires et non linéaires
Charles Audet

Conception et mise en pages de l'intérieur : Charles Audet
Conception de la couverture : Bénédicte Stordeur
Photo de la couverture : Pierre Audet
Révision : Nicole Blanchette
Coordination éditoriale : Luce Venne-Forcione

Pour connaître nos distributeurs et nos points de vente, veuillez consulter notre site Web à l'adresse suivante : www.pressespoly.ca

Courriel des Presses internationales Polytechnique : pip@polymtl.ca

Nous reconnaissons l'appui financier du gouvernement du Canada.
We acknowledge the financial support of the Government of Canada.

Canada

Gouvernement du Québec – Programme d'aide aux entreprises du livre et de l'édition spécialisée – Gestion SODEC.

Société de développement des entreprises culturelles Québec

Tous droits réservés
© Presses internationales Polytechnique, 2021

On ne peut reproduire ni diffuser aucune partie du présent ouvrage, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit, sans avoir obtenu au préalable l'autorisation écrite de l'éditeur.

Dépôt légal : 3e trimestre 2021
Bibliothèque et Archives nationales du Québec
Bibliothèque et Archives Canada

ISBN 978-2-553-01739-1
Imprimé au Canada

Avant-propos

Ce livre est conçu pour accompagner le cours d'études supérieures MTH6420 – OPTIMISATION CONTINUE de Polytechnique Montréal. Il est constitué de trois parties. La première, la plus courte, comprend deux chapitres portant sur des notions fondamentales en optimisation. La deuxième partie recèle cinq chapitres traitant des méthodes algorithmiques et de la théorie de l'optimisation linéaire. La dernière partie contient elle aussi cinq chapitres et se concentre sur l'analyse et sur les méthodes d'optimisation non linéaire, avec et sans contraintes.

L'ouvrage s'adresse principalement aux étudiants en mathématiques appliquées au niveau de la maîtrise ou du doctorat, mais est aussi accessible aux étudiants en ingénierie. Une base en algèbre linéaire et en calcul différentiel et intégral est prérequise. Le livre introduit un ensemble de méthodes et d'algorithmes d'optimisation continue, et présente à la fois les intuitions qui en sont à l'origine et leurs fondements mathématiques. Tous les résultats énoncés sont formellement et rigoureusement démontrés. Cette analyse permet une compréhension des rouages des méthodes et de leur fonctionnement.

Chacun des 12 chapitres correspond à une semaine dans un cours étalé sur un trimestre universitaire typique. Ils comportent tous cinq sections. Les trois premières présentent les définitions, les méthodes, la théorie, l'analyse ainsi que de courts exemples illustratifs. Le grand nombre de figures facilite la compréhension des éléments techniques. La quatrième section propose une application détaillée et concrète du sujet du chapitre à des problèmes de sciences ou de génie. Enfin, la dernière section contient 12 exercices à

difficultés variables, dont certains requièrent l'utilisation d'un ordinateur. De brèves réponses aux exercices de numéro impair sont incluses en fin d'ouvrage.

Ce livre a vu le jour au cours de la pandémie de COVID-19. Auparavant, le cours était offert par un enseignement magistral en classe. Les notes de cours étaient écrites au tableau et les étudiants les retranscrivaient. La pandémie m'a forcé à modifier mon type d'enseignement, et ce livre est l'évolution des notes de cours qui ont été considérablement restructurées, retravaillées et peaufinées pour former un document complet et indépendant.

Enfin, j'aimerais remercier sincèrement l'ensemble des gens qui ont contribué à l'amélioration de l'ouvrage, en particulier, les étudiants de la classe de 2020 qui l'ont lu et commenté, et qui y ont proposé des ajustements à la fois au fond et à la forme. Leurs commentaires ont grandement et positivement impacté le résultat final. De plus, j'aimerais remercier Paul Patience qui a proposé de judicieuses améliorations et qui, avec son œil aiguisé, a suggéré un grand nombre de corrections techniques et de mise en forme. Merci aussi à Joseph Dzahini pour la validation et la vérification des exercices de fin de chapitre. Je suis également très reconnaissant au personnel des Presses internationales Polytechnique, et plus particulièrement à Luce Venne-Forcione, chargée de projets, et à Nicole Blanchette, réviseure. Elles ont rendu le texte beaucoup plus fluide. Finalement, j'aimerais exprimer ma gratitude à mon père, Pierre, pour avoir accepté de m'offrir la spectaculaire photo de givre qui orne la couverture de cet ouvrage. Elle illustre les aspects linéaires et non linéaires du monde qui nous entoure.

Charles Audet

Table des matières

I Notions fondamentales d'optimisation **1**

1 Introduction à l'optimisation **3**

1.1 Optimisation : d'hier à aujourd'hui 3

1.2 Optimalité globale et locale 6

1.3 Formalisme et terminologie 11

1.4 Application : congestion routière 14

1.5 Exercices 17

2 Modélisation **21**

2.1 Formulation mathématique d'un problème concret 21

2.2 Classes et familles de problèmes d'optimisation 25

2.3 Existence d'une solution optimale 30

2.4 Application : problème de mélanges 34

2.5 Exercices 38

II Optimisation linéaire 43

3 Méthode du simplexe pour l'optimisation linéaire 45

3.1 Formes standards d'inégalités et d'égalités en optimisation linéaire 46
3.2 Idées derrière la méthode du simplexe 50
3.3 Dictionnaire et solution réalisable 54
3.4 Application : conception d'un alliage optimal 58
3.5 Exercices 62

4 Forme révisée de la méthode du simplexe 67

4.1 Notation révisée du simplexe 67
4.2 Méthode du simplexe révisée 72
4.3 Complexité et vitesse du simplexe 76
4.4 Application : classification par hyperplan 77
4.5 Exercices 81

5 Considérations pratiques en optimisation linéaire 87

5.1 Dictionnaire initial non réalisable 87
5.2 Dégénérescence et cyclage 92
5.3 Règle anti-cyclage de Bland 96
5.4 Application : le plus grand disque inscrit dans un polygone . 99
5.5 Exercices 105

6 Théorèmes de dualité faible et forte 109

6.1 Dual d'un problème linéaire 109
6.2 Dualité faible 114
6.3 Dualité forte 116
6.4 Application : aperçu de l'optimisation en nombres entiers . . 122
6.5 Exercices 126

7 Théorie de la dualité linéaire 131

7.1 Complémentarité 131
7.2 Théorème d'alternatives 135

7.3 Analyse de sensibilité 137
7.4 Application : théorie des jeux 144
7.5 Exercices 148

III Optimisation non linéaire 153

8 Convexité 155
8.1 Ensembles, fonctions et problèmes convexes 155
8.2 Dérivées secondes et matrices définies positives 161
8.3 Critère de la deuxième dérivée 166
8.4 Application : régressions de Ridge et de Lasso 169
8.5 Exercices 176

9 Conditions d'optimalité pour le cas sans contraintes 181
9.1 Approximations de Taylor 182
9.2 Condition nécessaire d'optimalité de premier ordre 188
9.3 Conditions nécessaire et suffisante de deuxième ordre 189
9.4 Application : distance sécuritaire de freinage 195
9.5 Exercices 199

10 Méthodes d'optimisation non linéaire sans contraintes 205
10.1 Vitesse de convergence 205
10.2 Méthode de Newton pour l'optimisation 209
10.3 Direction de descente 215
10.4 Application : algorithme de points intérieurs 218
10.5 Exercices 223

11 Recherche linéaire 229
11.1 Recherche linéaire exacte 229
11.2 Conditions d'Armijo et de Wolfe 232
11.3 Convergence globale 240
11.4 Application : réseaux de neurones 243
11.5 Exercices 247

12 Conditions d'optimalité pour le cas contraint **251**

12.1 Multiplicateurs de Lagrange pour contraintes d'égalité . . . 251

12.2 Contraintes d'inégalité 265

12.3 Contraintes mixtes et conditions de KKT 269

12.4 Application : forme d'une chaîne suspendue 275

12.5 Exercices 280

IV Annexe : Solutions **285**

Index **303**

Index

Algorithme
  de Newton
    pour la minimisation, 213
    pour un système d'égalités, 211
  de points intérieurs, 222
  recherche linéaire
    Armijo simple, 235
    Armijo-Wolfe, 239
    inexacte, 232
  simplexe
    à deux phases, 91
    dual, 124
    méthode, 55
    méthode révisée, 74
Analyse de sensibilité
  directionnelle, 141
  simple, 138
Approximation de Taylor, 182
argmin, 11

Base, 68
Borne inférieure, 32
Boule de rayon ϵ, 9

Chaîne suspendue, 275
Classe
  $\mathcal{C}^k$, 161
  $\mathcal{C}^{k+}$, 183
Classification par hyperplan, 77
Combinaison convexe, 157
Conception d'un alliage, 58
Condition de Lipschitz, 183
Conditions
  nécessaires de
    deuxième ordre, 190
    deuxième ordre pour égalités, 261
    premier ordre, 188
    premier ordre de KKT, 270
    premier ordre de Lagrange, 256
    premier ordre pour inégalités, 267
  suffisantes de
    deuxième ordre, 191
    deuxième ordre pour égalités, 262
Cône
  définition, 176
  de récession, 178
  tangent, 260
Contrainte active, 132
Convergence globale, 240
Convexité
  ensemble, 155
  fonction, 157
  locale, 159
  optimalité globale, 168
  problème, 160
  stricte, 159

Coûts réduits, 55, 71
Critère
    d'Armijo, 233
    de Wolfe, 236
Cyclage, 94, 97

Dégénérescence, 94
Dérivée directionnelle, 140, 215
Dictionnaire, 54
Direction
    de descente, 218
    de descente stricte, 216
Disque inscrit dans un polygone, 99
Distance sécuritaire de freinage, 195
Dual, 111
Dualité
    faible, 115
    forte, 118

Écarts complémentaires, 132
Ensemble
    borné, 31
    compact, 31
    convexe, 155
    de niveau, 159
    fermé, 31
    ouvert, 31
Enveloppe convexe, 157
Épigraphe, 157

Fonction
    convexe, 157
    pseudo-convexe, 201
    quasi convexe, 201
Forme standard
    égalités, 47
    inégalités, 47

Hessien, 163
Hyperrectangle, 29

Inégalité de Jensen, 159
Infimum, 32
Interprétation
    des multiplicateurs, 274
    des variables duales, 137

Jacobien, 185
Julia, 104

Lagrangien, 270
Lemme de Farkas, 136
LICQ, 258
Limite, 31
Lipschitz, 183

Matrice
    définie positive, 164
    gradient, 185
    hessienne, 163
    jacobienne, 185
    pseudo-inverse, 198
    semi-définie positive, 164
    signe, 164
Minimum
    global, 8
    isolé, 18
    local, 9
    strict, 13
Modélisation, 21

Newton
    pour la minimisation, 213
    pour un système d'égalités, 211

Optimisation
    de boîtes noires, 27
    en nombres entiers, 122
    sans dérivées, 27

Paradoxe de Braess, 14
Pivot, 55
Point
    critique
        classification, 192
        sans contraintes, 188
        sous contraintes, 256
    extrême, 76, 157
    selle
        sans contraintes, 189
        sous contraintes, 257
    stationnaire sans contraintes, 188
Point d'accumulation, 31
Points intérieurs, 218

Primal, 111
Problème
  auxiliaire, 89
  biniveau, 30
  biobjectif, 30
  continu, 26
  convexe, 160
  de mélange, 34
  dual, 111
  linéaire, 26
  mixte, 26
  non linéaire, 26
  primal, 111

Recherche linéaire
  Armijo simple, 235
  Armijo-Wolfe, 239
  exacte, 230
  inexacte, 232
Réels
  étendus $\overline{\mathbb{R}}$, 11
  positifs ou nul $\mathbb{R}_+$, 26
Règle anticyclage de Bland, 97
Régression
  de Ridge, 169
  linéaire, 197
Relaxation, 20
Réseaux de neurones, 243

Signe d'une matrice, 164
Simplexe
  à deux phases, 91
  complexité, 76
  dual, 124
  en variables bornées, 83
  méthode, 55
  méthode révisée, 74
Solution
  de base
    non réalisable, 54
    réalisable, 54
  dégénérée, 94
  optimale, 8

Taylor
  erreur, 182
  polynôme, 182
  théorème, 185
Théorème
  écarts complémentaires, 132
  de Bland, 97
  de dualité faible, 115
  de KKT, 270
  de Taylor, 185
  existence du minimum, 33
  fondamental de sensibilité, 141
Théorie des jeux, 144

Valeur optimale, 11
Variable
  entrante, 72
  sortante, 72
Vitesse de convergence, 206