Exercice n°01 :

La position d'un point sur une droite orientée étant donnée par les fonctions suivantes:

- x = 5 cos (25 t + π / 3)
- x = 5 cos 3 π t
- x = 3 sin (10 t - π / 4) ou x est en centimètres, t en secondes, la phase en radians, évaluez:

  a) l'amplitude.
  b) la pulsation, la fréquence et la période du mouvement.
  c) La phase initiale.
  d) L'expression de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps dans chaque cas.

Solution :

Un mouvement d'un point de matériel où le déplacement est harmonique s'écrit par la forme suivante :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

-Déplacement
-Elongation
(m)

Amplitude maximale
(m)

Pulsation=impulsion
« fréquence angulaire »
(rad/s)

Phase initiale=déphasage
(rad)

Equation	A (m)	ω (rad/s)	f(Hz)	T(s)	ϕ (rad)	$v(t) = \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}(t)$	$\gamma(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = \ddot{x}(t)$
eq1	5	25	$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{25}{2\pi}$	$\frac{1}{f} = \frac{2\pi}{25}$	$\frac{\pi}{5}$	$-25 * 5\sin(25t + \frac{\pi}{3})$	$-25^2 * 5\cos(25t + \frac{\pi}{3})$
eq2	5	3π	$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{f} = \frac{2}{3}$	0	$-15\pi\sin(3\pi t)$	$-75\pi\cos(3\pi t)$
eq3	3	10	$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{5}{\pi}$	$\frac{1}{f} = \frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$-30\sin(10t + \frac{\pi}{4})$	$-300\cos(10t + \frac{\pi}{4})$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{\partial x}{\partial t}[la\ vitesse] = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$$

$$\gamma(t) = \ddot{x}(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}[l'accélération] = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$$

Dans l'équation 3, il faut convertir le « sin » au « cos » avec $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}(Hz)\,, \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}\ (s)$$

Exercice n°02 :

Un point effectue des oscillations le long de l'axe x conformément à l'équation :

x = a cos (ωt - π / 4)

a) tracer les diagrammes approximatifs de l'élongation x, de la projection de la vitesse Vx et de la projection de l'accélération γ_x en fonction du temps.

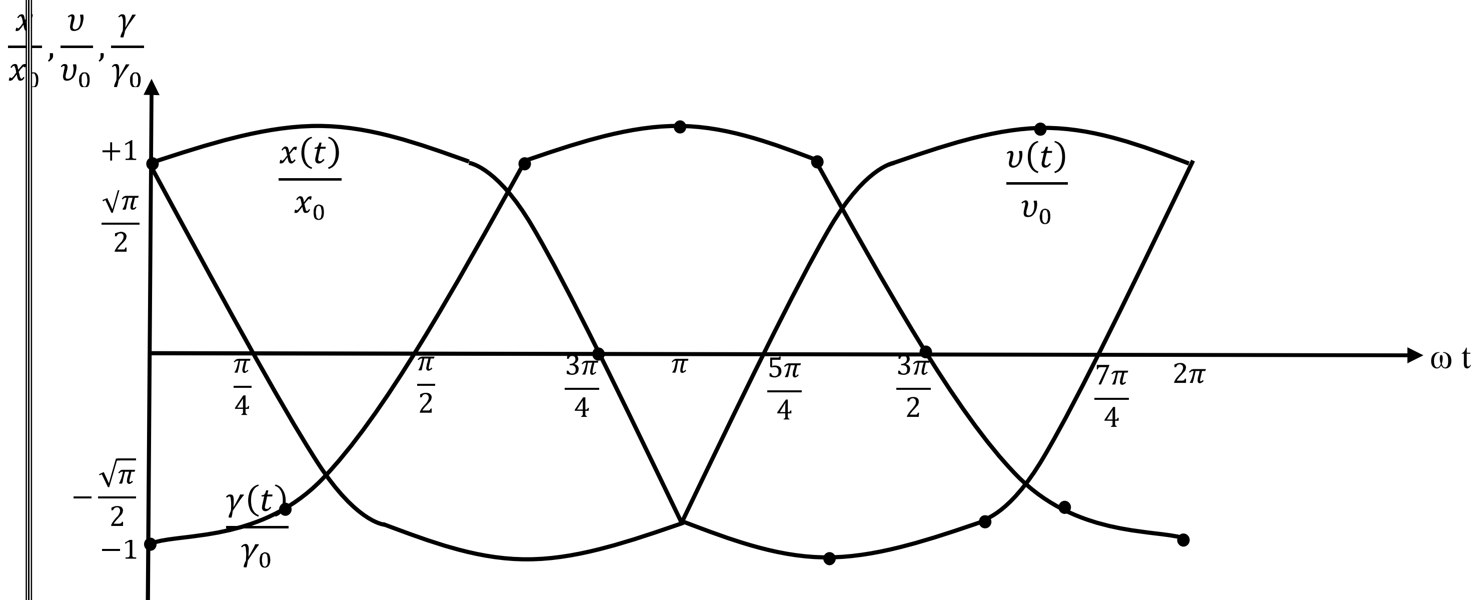
b) tracer les diagrammes de la projection de la vitesse Vx et de la projection de l'accélération γ_x en fonction de l'abscisse x.

Solution :

a)$x(t) = a\cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) = -a\omega\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \\ \ddot{x}(t) = \gamma(t) = -a\omega^2\cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x(t)}{x_0} = \cos(\omega t - \dfrac{\pi}{4}) & /x_0 = a \\ \dfrac{v(t)}{v_0} = -\sin(\omega t - \dfrac{\pi}{4}) & /\, v_0 = a\omega \\ \dfrac{\gamma(t)}{\gamma_0} = -\cos(\omega t - \dfrac{\pi}{4}) & /\, \gamma_0 = a\omega^2 \end{cases}$$

ωt	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\frac{x(t)}{x_0}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{v(t)}{v_0}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\gamma(t)}{\gamma_0}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

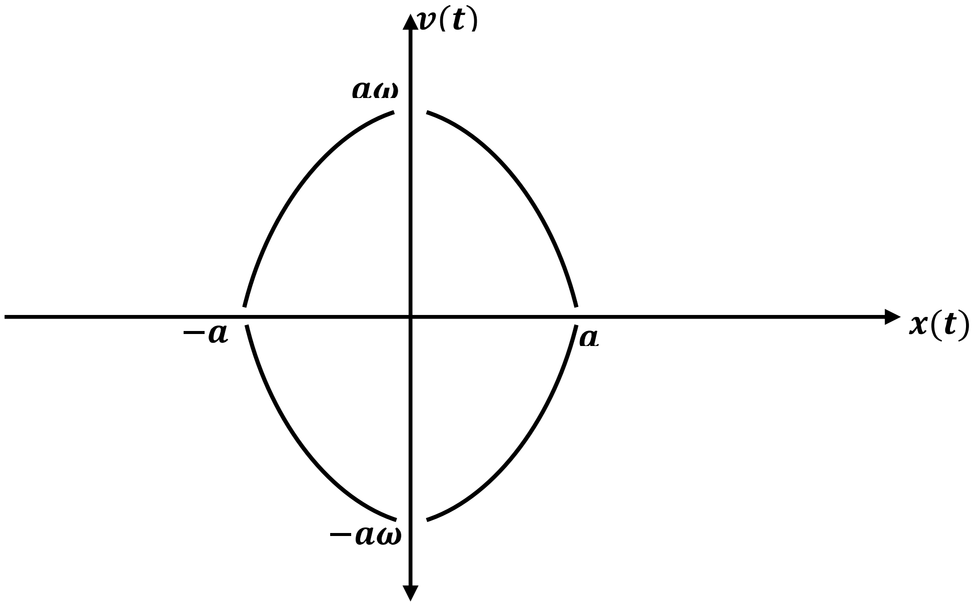


b) Nous avons :

$x(t)=a\cos(\omega t-\frac{\pi}{4})$……………..[1]

$\upsilon(t)=-a\omega\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$………..[2]

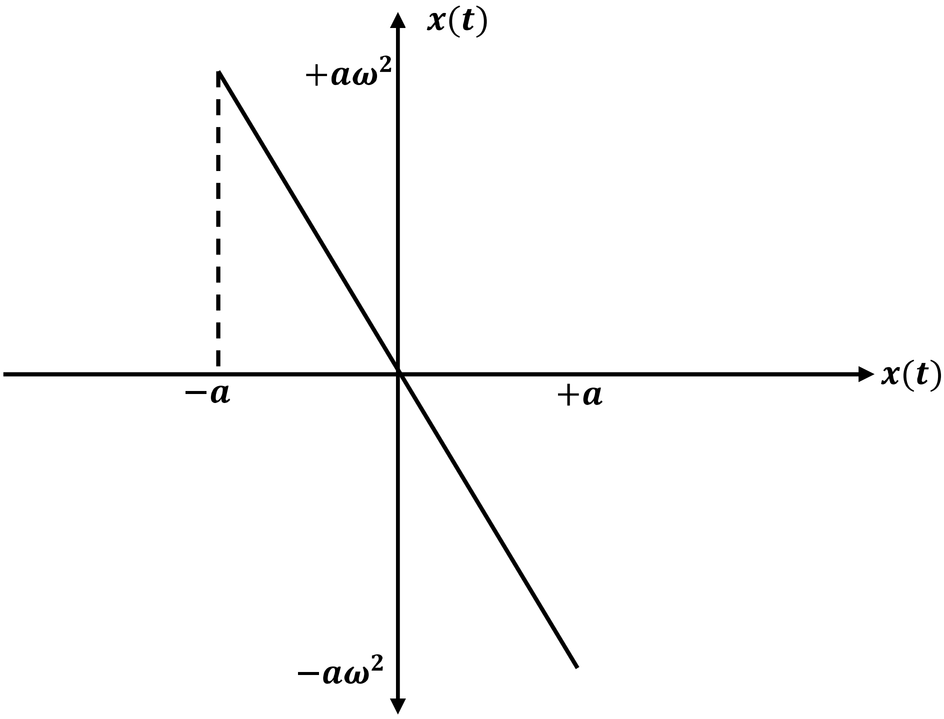
$$[1]^2+[2]^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2\cos^2(\omega t-\frac{\pi}{4})=x^2(t) \\ a^2\omega^2\sin^2\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)=\upsilon^2(t) \end{cases} + \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2(t)}{a^2}+\frac{\upsilon^2(t)}{a^2\omega^2}=1 \\ \cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x^2(t)+\frac{\upsilon^2(t)}{\omega^2}=a^2}$$



$*\gamma(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$

$$\boxed{\gamma(t) = -\omega^2 x(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Si\ x(t) = 0 \Rightarrow \gamma(t) = 0 \\ Si\ x(t) = +a \Rightarrow \gamma(t) = -a\omega^2 \\ Si\ x(t) = -a \Rightarrow \gamma(t) = +a\omega^2 \end{cases}$$



Exercice n°03 :

Le déplacement d'un point étant donné par:

x = A cos (ωt + Φ). Déterminer:

a) l'amplitude, la période, la pulsation et la fréquence des oscillations.

b) Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps.

c) Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération en fonction du déplacement.

d) Donner l'expression de la phase initiale Φ à t = 0 en fonction de la vitesse et du déplacement.

Solution :

a) $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$……………….. [1]

L'amplitude : A , la période : $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

La pulsation : ω , la fréquence : $f = \frac{\omega}{2\pi}$

b) $v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$ / $v(t) = \frac{\partial x}{\partial t}$………..[2]

$\gamma(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$ / $\gamma(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$……..[3]

c) Nous avons : $[1]^2 + [2]^2 \Rightarrow \begin{cases} v^2 = A^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) \\ x^2 = A^2\cos^2(\omega t + \phi) \end{cases} + \Rightarrow \begin{cases} \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \sin^2(\omega t + \phi) \\ \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \cos^2(\omega t + \phi) \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow v = \pm\omega\sqrt{1^2 - x^2}$$

La vitesse en fonction du déplacement

d) A : t = 0 ➔ $\begin{cases} x(0) = x_0 = A\cos\phi \dots\dots\dots\dots\dots [I] \\ v(0) = v_0 = -A\omega\sin\phi \dots\dots\dots.. [II] \end{cases}$

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \Rightarrow \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = -\frac{v_0}{\omega x_0} \Rightarrow tg\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \Rightarrow \boxed{\phi = arc\ tg\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)}$$

Exercice n°04 :

Dans un certain mécanisme, un point à un mouvement sinusoïdal rectiligne de fréquence 10 Hz. Son amplitude est de 3 cm. A l'instant choisi comme t = 0, x = 2 cm et la vitesse est négative.

a) quelle est l'équation du mouvement.
b) Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération à l'instant t.

Solution :

a)L'équation du mouvement : $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

On a : $f = 10Hz \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \omega = 20\pi\ (\frac{rad}{s})$

On a : A= 3cm

On détermine ϕ ➔ on utilise toujours les conditions initiales.

A : t = 0 ➔ X= 2cm ➔$X = A\cos\phi$➔$\cos\phi = \frac{X}{A} = \frac{2}{3}$

➔$\boxed{\phi = 48° \simeq 0.84rad \simeq 0.26\pi r}$ or $\boxed{\phi = 312° \simeq 1.4\pi r}$

Donc : $\boxed{x(t) = 3\cos(20\pi t + 0.84)\ (cm)}$

b)$v(t) = -60\pi\sin(20\pi + 0.84)\ \ (cm)$

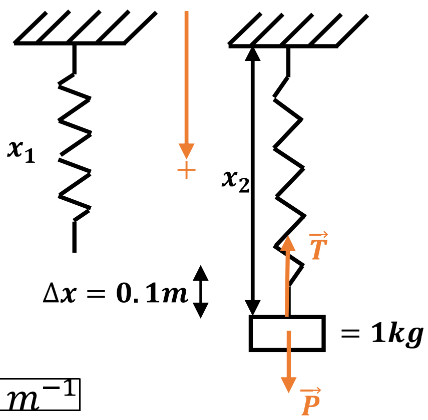
$$\gamma(t) = -1200\pi^2\cos(20\pi t + 0.84)\ (cm)$$

Exercice n°05 :

On suspend une masse de 1 Kg à un ressort hélicoïdal dont les spires sont initialement séparées et on observe, à l'équilibre qu'il s'est allongé de 0.10 m. la masse étant en équilibre, on lui donne un choc vers le haut qui la met en oscillation avec une amplitude de 0.05 m.

- **a)** Evaluez la constante du ressort.
- **b)** Calculer la période d'oscillation.
- **c)** Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps.
- **d)** A quel instant après le départ, la masse passe t-elle pour la première fois à x = + 0.03 m ? pour la deuxième fois ?.

Solution :



a)$\sum\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = 0 \Rightarrow P - T = 0$

$$\Rightarrow mg - k\Delta x = 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{mg}{\Delta x}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1kg.10ms^{-1}}{0,1m} \Rightarrow \boxed{k = 100N.m^{-1}}$$

b) Calcul de la période T :

O a l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ,\ \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}\ (s)}$$

c) $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ / $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \simeq 10\ (rad.s^{-1})}$

à t = 0 ➔ X = 0 (puisque le ressort est à l'équilibre)

$$\Rightarrow A\cos\phi = 0 \Rightarrow \boxed{\phi = \pm\frac{\pi}{2}}$$

Donc $x(t) = 0{,}05\cos(10t \pm \frac{\pi}{2}) \Rightarrow x(t) = \pm 0{,}05 \sin 10t$

$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$
$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$

➔ $\boxed{x(t) = -0{,}05\sin 10t}$ puisque le déplacement est vers le haut

➔ $v(t) = -0{,}5\cos 10t$

➔ $\gamma(t) = 5\sin 10t$

d) Si x = 0,03 ➔ $\sin 10t = -\frac{0{,}03}{0{,}05} \Rightarrow 10t = \sin^{-1}(0{,}6)$

➔ $\boxed{t_1 = \frac{\sin^{-1}(0{,}6)}{10} \simeq 0{,}38\ (s)}$

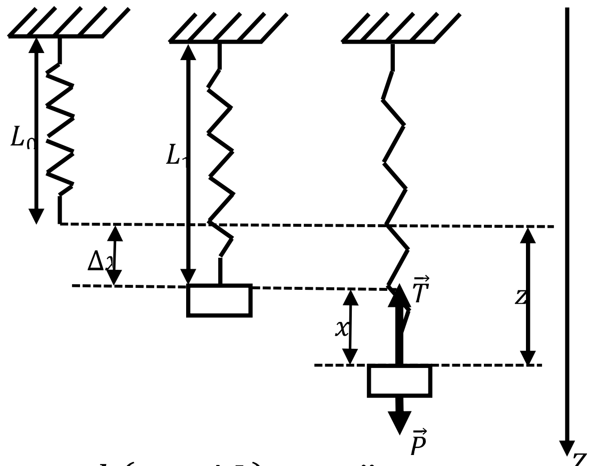
* $t_2 = t_1 + T \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{\sin^{-1}(0{,}6)}{10} + \frac{\pi}{5} \simeq 1{,}01\ (s)}$

<u>Exercice n°06</u> :

On considère un ressort d'élasticité k fixé au plafond. Soit L sa longueur à vide. On suspend à l'extrémité libre une masse m. la masse m est déplacée verticalement à partir de cette position d'équilibre, puis abandonnée à elle-même. Soit z son abscisse par rapport au plafond.

- **a)** quelle est la résultante des forces qui s'exercent sur elle?
- **b)** Ecrire l'équation différentielle régissant son mouvement. Un changement de variable s'impose. Lequel ?
- **c)** Résoudre cette équation différentielle sachant qu'à un instant pris pour origine l'abscisse de la masse est z_0 et sa vitesse v_0. Donner pour tout instant ultérieur l'abscisse, la vitesse et l'accélération de la masse m.

<u>Solution :</u>



b) A l'équilibre de la masse :

$$\sum \vec{F} = 0 \;\Rightarrow mg - k(L_1 - L_0) = 0$$

$\Rightarrow \boxed{mg - k\Delta L = 0}$…….**(1)**

En mouvement :

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \;\; mg - k(z) = m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

$mg - k(x + \Delta L) = m\ddot{x}$le changement de variable est $\left| \begin{array}{l} z = x + \Delta L \\ \ddot{z} = \ddot{x} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \; mg - k\Delta L - kx = m\ddot{x} \;\Rightarrow\; m\ddot{x} + kx = 0$$

$\Rightarrow \; \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ Équation différentielle de 2ème ordre.

c)La résolution d'une équation différentielle de 2ème ordre $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$est :

$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$…….[1] / $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$……….[2]

* Il faut déterminer A et ϕ dans l'équation [1] à l'aide des conditions initiales :

Dans les conditions initiales : t=0 ➔

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = A\cos\phi \ldots\ldots\ldots.\ldots I \\ v(0) = v_0 = -A\sin\phi \ldots\ldots\ldots\ldots II \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d'après\ (I)^2 + (II)^2 & \boxed{A^2 = {x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}} \\ d'après\ (II)/\ (I) & tg\phi = -\frac{v_0}{x_0\omega_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}} \\ \phi = arc\ tg\left(-\frac{v_0}{x_0\omega_0}\right) \end{cases}$$ lorsqu'on utilise Z_0 au lieu de $X_0 \Rightarrow$ $$\begin{cases} A = \sqrt{{z_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}} \\ \phi = arc\ tg\left(-\frac{v_0}{z_0\omega_0}\right) \end{cases}$$

En conclusion :

$$Z(t) = \sqrt{{z_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}}\cos\left[\omega t + arc\ tg\left(-\frac{v_0}{z_0\omega_0}\right)\right]$$

$$v(t) = -\sqrt{{\omega_0}^2{z_0}^2 + {v_0}^2}\sin\left[\omega t + arc\ tg\left(-\frac{v_0}{z_0\omega_0}\right)\right]$$

$$\gamma(t) = -{\omega_0}^2\sqrt{{z_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{{\omega_0}^2}}\cos\left[\omega t + arc\ tg\left(-\frac{v_0}{z_0\omega_0}\right)\right]$$

Résumé

Mouvement oscillatoire ➔$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$équation différentielle du 2ème ordre.

La solution est : $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

-Déplacement
-Elongation
(m)

Amplitude
maximale
(m)

Pulsation
(rad/s)

Phase initiale
(rad)

f (fréquence) $= \frac{\omega}{2\pi}\,(Hz)$

T (période) $= \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}\ (s)$

- $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
- $v(t) = \frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \phi)$
- $\gamma(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \ddot{x}(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \phi)$

1) $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = 0 \Rightarrow P - T = 0$

$$\Rightarrow \boxed{mg - k\Delta x = 0}$$

2) $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = m\vec{\gamma} \Rightarrow mg - k(x + \Delta x) = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow mg - k\Delta x - kx = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Les relations trigonométriques

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha\,, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha\,, \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha\,, \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\,, \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha\,, \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha\,, \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$$

Exercice n°07 :

Soit deux ressorts de constantes de raideur k_1, k_2 placés en série et en parallèle (**voir Fig. 01**).

a) calculer k_{eq} la constante équivalente en fonction de k_1 et k_2 dans les deux cas.
On charge le ressort équivalent (en série) d'une masse m

b) Ecrire la condition d'équilibre du système.
c) Calculer l'énergie potentielle totale du système.

d) Retrouver la condition d'équilibre du système en utilisant E_p.
e) Monter que E_p peut se mettre sous la forme: $E_p = 1/2\ k_e\ x^2 + C$.
f) Etablir l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse m.

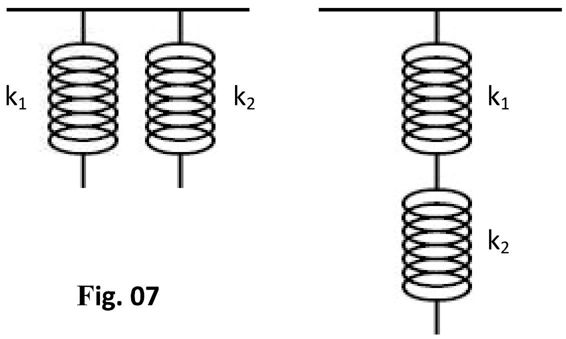
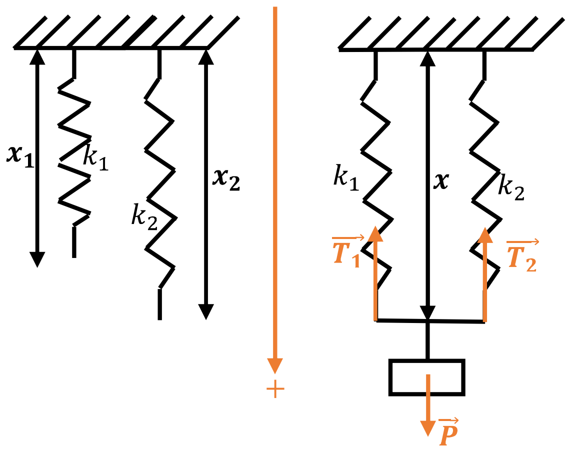


Fig. 07

Solution :



a)<u>Calcul de K_{eq}</u> :

L'objective : décrire l'équilibre du mouvement sous la forme : $\boxed{mg = k_{eq}(x - x_0)}$

1er cas : en parallèle

$$\sum \vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow mg - k_1(x - x_1) - k_2(x - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow mg - (k_1 + k_2)x + k_1x_1 + k_2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow mg = (k_1 + k_2)\left[x - \frac{k_1x_1 + k_2x_2}{k_1 + k_2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} k_{eq} = k_1 + k_2 \\ x_0 = \dfrac{k_1x_1 + k_2x_2}{k_1 + k_2} \end{cases}}$$

2ème cas : en série

En point A

$$\vec{T_1} + \vec{T_2} = 0$$

$$\Rightarrow -k_1\Delta x_1 + k_2\Delta x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2} \;\ldots.\textbf{I}$$

Sur la masse

$$\vec{P} + \vec{T_3}$$

$$\Rightarrow P - T$$

$$\Rightarrow \boxed{mg = k_2\Delta x_2} \;\ldots.\textbf{II}$$

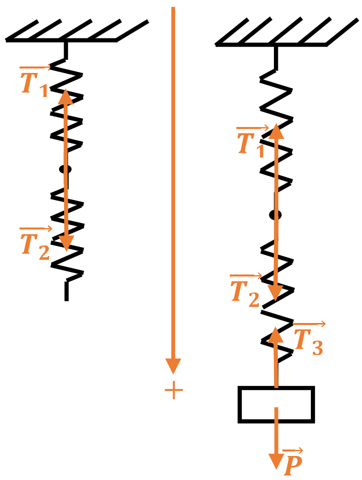
$\|\vec{T_3}\| = \|\vec{T_2}\|$

Même ressort

=

Même k et

même Δx



(I)$\Rightarrow \boxed{\Delta x_1 = \frac{k_2}{k_1}\Delta x_2}$

En série $\Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$……..**III**

On remplace **I** dans **III**$\Rightarrow \Delta x = \frac{k_2}{k_1}\Delta x_2 + \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{k_2}{k_1} + 1\right)\Delta x_2$

$\Rightarrow \boxed{\Delta x_2 = \Delta x\left(\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)}$**IV**

On remplace IV dans II, on obtient : $mg = k_2\left(\frac{k_1}{k_1+k_2}\right)\Delta x \;\Rightarrow \boxed{mg = \frac{k_2k_1}{k_1+k_2}\Delta x}$

$$\Rightarrow \boxed{k_{éq} = \frac{k_2k_1}{k_1 + k_2}}$$

b)Condition d'équilibre :$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow mg - k_{éq}\Delta x = 0 \Rightarrow \boxed{mg = k_{éq}\Delta x}$

c) Energie potentielle totale : $[E_P{}^{tot}]$

${E_P}^{tot} = {E_P}^{ressort} + {E_P}^{pesanteur(masse)}$ [il faut faire un mouvement pour calculer Ep]

$${E_P}^{tot} = \frac{1}{2}k_{éq}(x+\Delta x)^2 - mgx \Rightarrow {E_P}^{tot} = \frac{1}{2}k_{éq}(x^2+\Delta x^2+2x\Delta x) - mgx$$

$${E_P}^{tot} = \frac{1}{2}k_{éq}x^2 + \frac{1}{2}k_{éq}\Delta x^2 + x(k_{éq}\Delta x - mg)$$

$${E_P}^{tot} = \frac{1}{2}k_{éq}x^2 + \frac{1}{2}k_{éq}\Delta x^2 \Rightarrow \boxed{{E_P}^{tot} = \frac{1}{2}k_{éq}x^2 + const}$$

f) L'équation différentielle du mouvement de la masse **m** :

<u>1ère démonstration</u> :en équilibre $\sum \vec{F} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = 0 \Rightarrow \boxed{mg - k_{éq}\Delta x = 0}$$

En mouvement $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

$$\Rightarrow \vec{T} + \vec{P} = m\vec{\gamma} \Rightarrow mg - k_{éq}(\mathrm{x} + \Delta x) = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow mg - k_{éq}\Delta x - k_{éq}x = m\ddot{x}$$

$\Rightarrow -k_{éq}x = m\ddot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k_{éq}}{m}x = 0}$équation différentielle du 2ème ordre

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{éq}}{m}}$$

<u>2ème démonstration</u> :

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k_{éq}x^2 - C^{te}$$

L'équation de Lagrange : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{x}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \boldsymbol{I}$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathrm{x}}} = m\dot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{x}} = -k_{éq}x \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{I} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m\dot{x}) + k_{éq}x = 0 \;\Rightarrow\; m\dot{x} + k_{éq}x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{x} + \frac{k_{éq}}{m}x = 0} \;/\; \omega = \sqrt{\frac{k_{éq}}{m}}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Exercice n°08 :

Considérons un pendule pesant formé par une tige de masse m et de longueur l suspendue par une de ses extrémités (**voir Fig. 02**). La tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ supposé faible.

a) Ecrire les expressions des énergies cinétique et potentielle.
b) Ecrire le Lagrangien du système.
c) En déduire l'équation du mouvement ainsi que la pulsation propre ω_0.

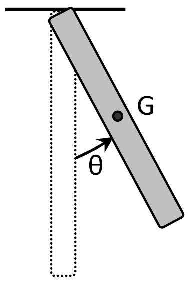
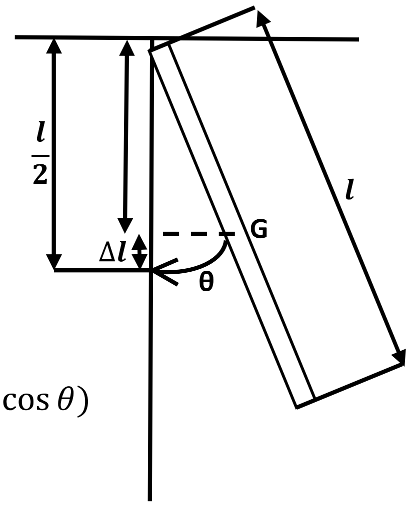


Fig. 08

Solution :



a) Energie cinétique et énergie potentielle :

$E_c{}^{syst} = E_c{}^{tige} = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 / \quad I = \frac{1}{3} ml^2 \quad (I\!: moment\ cinétique)$

$$E_c{}^{tige} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{E_c{}^{tige} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2}$$

$$E_p{}^{syst} = E_p{}^{tige} = mg\Delta l \quad \Rightarrow E_p{}^{tige} = mg\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

$\Rightarrow E_p{}^{tige} = mg\frac{l}{2}(1 - \cos\theta)$ lorsque θ est faible

$\Rightarrow E_p{}^{tige} = mg\frac{l}{2}\left(\frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{E_p{}^{tige} = \frac{1}{4}mgl\theta^2}$

b)Le Lagrangien du système est : $\mathcal{L} = E_c - E_p$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{4}mgl\ \theta^2}$$

c) Equation du mouvement et $\boldsymbol{\omega_0}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}=0 \Rightarrow \frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta}+\frac{1}{2}mgl\theta=0 \Rightarrow \frac{1}{3}l\ddot{\theta}+\frac{1}{2}g\theta=0$$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}+\frac{3}{2}\frac{g}{l}\theta=0}$ équation différentielle

$$\ddot{\theta}+{\omega_0}^2\theta=0 \quad / \quad \omega_0=\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$

Exercice n°09 :

Trois tiges rigides sans masses et solidaires à l'une de leur extrémités O ou elles présentent un angle droit entre elles, forment ainsi un T renversé articulé autour d'un axe horizontale fixe situé en O (**voir Fig. 03**).

Chacune de ces tiges porte à son extrémité libre une masse ponctuelle, la tige ℓ_3 étant attachée à un ressort de raideur k de sorte qu'à l'équilibre la tige ℓ_2 soit verticale. Sa position au cours du mouvement était donnée par l'angle θ.

- **a)** Trouvez l'expression complète de l'énergie potentielle du système.
- **b)** Ecrire la condition d'équilibre.
- **c)** Simplifier l'expression précédente complète de l'énergie potentielle. Conclure.
- **d)** Donnez le Lagrangien du système.
- **e)** En déduire l'équation du mouvement et la pulsation propre.
- **f)** Quelle est la condition pour qu'il ait oscillations. La comparer avec la condition d'équilibre stable.

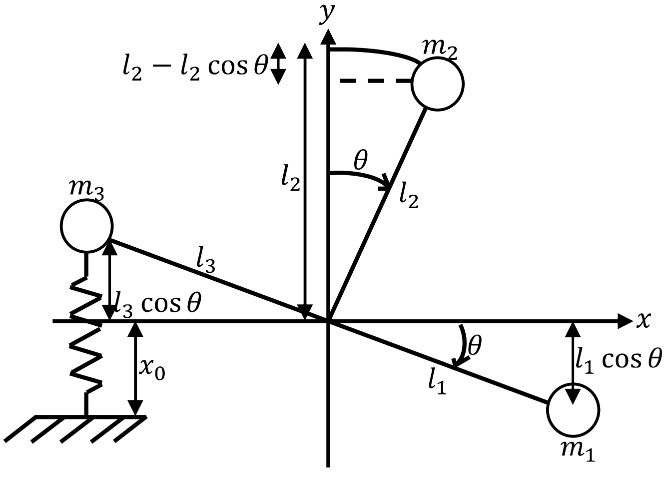
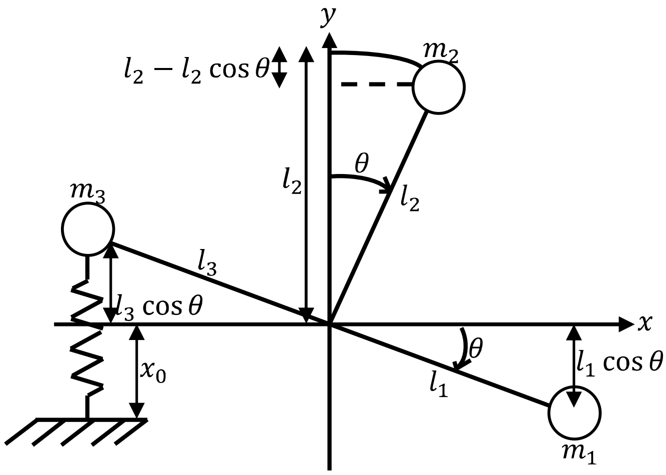


Fig 09

Solution :

a)Energie potentielle :



$$E_p{}^{syst} = E_p{}^{m_1} + E_p{}^{m_2} + E_p{}^{m_3} + E_p{}^{ressort}$$

$$E_p{}^{m_1} = -m_1 g l_1 \sin\theta \simeq -m_1 g l_1 \theta \ \ / \ \ \theta \lll$$

$$E_p{}^{m_2} = -m_2 g l_2 (1-\cos\theta)$$

$$E_p{}^{m_3} = m_3 g l_3 \sin\theta \simeq m_3 g l_3 \theta \ \ / \ \ \theta \lll$$

$$E_p{}^{ressort} = \frac{1}{2}k[(x_0 + l_3\sin\theta)^2]$$

$$\boxed{E_p{}^{syst} = (m_3 g l_3 - m_1 g l_1)\theta - m_2 g l_2 (1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k(l_3\theta + x_0)^2}$$ Energie potentielle du système

b) Condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \ \Rightarrow \ m_3 g l_3 - m_1 g l_1 - m_2 g l_2 \sin\theta + k l_3{}^2\theta + k l_3 x_0 = 0$$

$\left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0 \ \ \Rightarrow \ \boxed{m_3 g l_3 - m_1 g l_1 + k l_3 x_0 = 0}$ la condition d'équilibre

c)Expression simplifiée de l'énergie potentielle :

$$E_p^{\,syst} = (m_3gl_3 - m_1gl_1)\theta - m_2gl_2(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kl_3^{\,2}\theta^2 + kl_3x_0\theta + \frac{1}{2}kx_0^{\,2}$$

$$E_p^{\,syst} = (m_3gl_3 - m_1gl_1 + kl_3x_0)\theta - m_2gl_2(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kl_3^{\,2}\theta^2 + Cst$$

$$\boxed{E_p^{\,syst} = -m_2gl_2(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kl_3^{\,2}\theta^2 + Cst \Rightarrow E_p^{\,syst} = -\frac{1}{2}m_2gl_2\theta^2 + \frac{1}{2}kl_3^{\,2}\theta^2 + Cst}$$

d)$\mathcal{L} = E_c - E_p$

$$E_c^{\,syst} = E_c^{\,m_1} + E_c^{\,m_2} + E_c^{\,m_3} = \frac{1}{2}(m_1l_1^{\,2} + m_2l_2^{\,2} + m_3l_3^{\,2})\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1l_1^{\,2} + m_2l_2^{\,2} + m_3l_3^{\,2})\dot{\theta}^2 + m_2gl_2(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}kl_3^{\,2}\theta^2 - Cst}$$

e)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$ ⇒équation du mouvement

$$\Rightarrow (m_1l_1^{\,2} + m_2l_2^{\,2} + m_3l_3^{\,2})\ddot{\theta} - m_2gl_2\sin\theta + kl_3^{\,2}\theta = 0$$

$\Rightarrow \boxed{(m_1l_1^{\,2} + m_2l_2^{\,2} + m_3l_3^{\,2})\ddot{\theta} + \left(kl_3^{\,2} - m_2gl_2\right)\theta = 0}$ équation de mouvement

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{kl_3^{\,2} - m_2gl_2}{m_1l_1^{\,2} + m_2l_2^{\,2} + m_3l_3^{\,2}}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^{\,2}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0^{\,2} = \frac{kl_3^{\,2} - m_2gl_2}{m_1l_1^{\,2} + m_2l_2^{\,2} + m_3l_3^{\,2}} > 0$$

f)Condition des oscillations :➔ existence d'une pulsation ω_0

Condition d'équilibre stable ➔$\left.\frac{\partial^2E_p}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} > 0$

⇒$\boxed{kl_3^{\,2} - m_2gl_2 > 0}$➔Cond des oscillations⇔ Cond d'équilibre stable$\frac{\partial^2E_p}{\partial\theta^2} > 0$

Exercice n°10 :

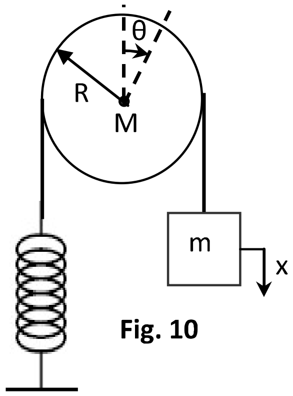


Fig. 10

Soit un système composé d'une masse m attachée à un fil enroulé autour d'une poulie de masse M et liée à un ressort de raideur k (**voir Fig. 04**).
On suppose le fil inextensible, de masse négligeable et ne glisse pas sur la poulie. Sachant que l'état du system est repéré par x(t) (déplacement vertical de m par rapport à sa position d'équilibre).

a) Trouver l'équation différentielle qui régit le mouvement de m.

b) Calculer la pulsation propre du système.

Solution :

a) $\mathcal{L} = E_c - E_p$

$E_c{}^{tot} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2$ / $I = \frac{1}{2}MR^2$ Moment de la poulie $\left[E_c{}^{tot} = E_c{}^{poulie} + E_c{}^{masse}\right]$

$E_c{}^{tot} = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ / $x = R\sin\theta = R\theta$ puisque $\theta \lll$

$$E_c{}^{tot} = \frac{1}{4}MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow E_c{}^{tot} = \frac{1}{2}R^2\left(\frac{M}{2} + m\right)\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_c{}^{tot} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)\dot{x}^2}$$

$$E_p{}^{tot} = E_p{}^{masse} + E_p{}^{ressort} + E_p{}^{poulie=0} \Rightarrow E_p{}^{tot} = E_p{}^{masse} + E_p{}^{ressort}$$

$$\Rightarrow E_p{}^{tot} = -mgx + \frac{1}{2}k(x + \Delta x)^2$$

Dans les conditions d'équilibre : $\left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \boxed{\Rightarrow -mg + k\Delta x = 0}$

$$\Rightarrow E_p{}^{tot} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 \Rightarrow \boxed{E_p{}^{tot} = \frac{1}{2}kx^2 + Cst}$$

Donc : $\mathcal{L} = E_c - E_p \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - Cst}$

L'équation du mouvement : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathrm{x}}}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{x}}=0$ ……**I** $\begin{cases}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathrm{x}}}=\left(\frac{M}{2}+m\right)\ddot{x} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{x}}=-kx\end{cases}$

I⇒ $\left(\frac{M}{2}+m\right)\ddot{x}+kx=0 \Rightarrow \ddot{x}+\frac{k}{\left(\frac{M}{2}+m\right)}x=0$ éq différentielle ⇒ $\ddot{x}+{\omega_0}^2x=0$

b)$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{\left(\frac{M}{2}+m\right)}}$

Résumé

- Etude par des lois de Newton :

En équilibre $\sum \vec{F}=\vec{0}$ / $P=mg$, $T=k\Delta x$

En mouvement $\sum \vec{F}=m\vec{\gamma}$ (on utilise les conditions d'équilibre pour résoudre cet état).

- Etude par Lagrangien :

$$\mathcal{L}=E_c-E_p$$

Equation de mouvement $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}=0$

${E_c}^{masse}=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ où $\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2$

$${E_c}^{tige}=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}ml^2\right]\dot{\theta}^2$$

$${E_c}^{poulie}=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mR^2\right]\dot{\theta}^2$$

${E_p}^{masse}=-mgx$ (le signe selon la direction choisie)

${E_p}^{ressort}=\frac{1}{2}kx^2$ la condition d'équilibre $\left.\frac{\partial E_p}{\partial q}\right|_{q=0}=0$

- Dans le cas des oscillations faibles :

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\sin\theta = \theta$$

- La condition des oscillations ⇒ existe $\omega_0 > 0$
- La condition d'équilibre stable : $\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2} > 0$

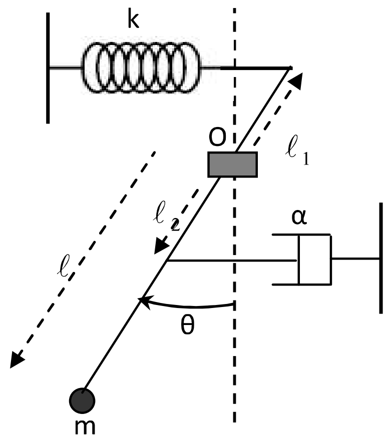
Exercice n°11 :

Une tige rigide, sans masse, de longueur $\ell + \ell_1$ porte une masse ponctuelle m à l'une de ses extrémités et constitue un pendule d'axe O fixe et situé à une distance ℓ de m. De part et d'autre de cet axe O et a des distances respectives ℓ_1 et ℓ_2 sont fixés un amortisseur de coefficient α et un ressort de raideur k (**voir Fig. 01**).

A l'équilibre statique la tige est verticale, la masse m en bas et le ressort a une déformation $\Delta\ell_{équi} = 0$.

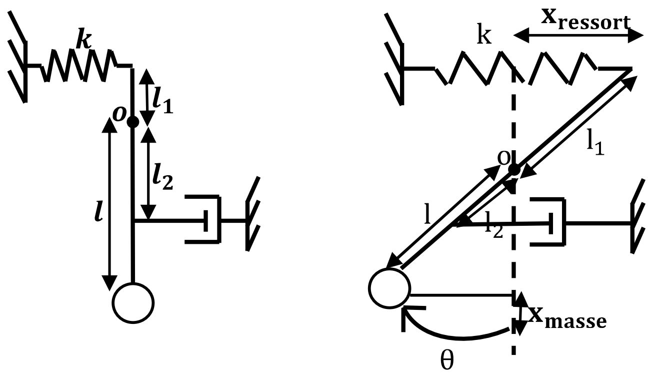
d) Ecrire le Lagrangien du système.
e) Ecrire l'équation différentielle du mouvement et déterminer la pseudo-période.

Fig. 11



Solution :

Cas d'éq Cas de mvt



$x^{ressort} = l_1 \sin\theta = l_1\theta$ / θ faible

$x^{amortisseur} = l_2 \sin\theta = l_2\theta$ / θ faible

$x^{masse} = l(1-\cos\theta)$

a) Lagrangien du système :

$$\mathcal{L} = E_c - E_p$$

$E_c = E_c{}^{masse} = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2$ / $I = ml^2$ $\Rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$

$$E_p = E_p{}^{m} + E_p{}^{ressort} + E_p{}^{amortisseur}$$

$$E_p = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k(l_1\theta + \Delta x)^2$$

$$E_p = mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k{l_1}^2\theta^2 + \frac{1}{2}\Delta x^2 + kl_1\theta\Delta x$$

$$E_p = mgl\left(\frac{\theta^2}{2}\right) + \frac{1}{2}k{l_1}^2\theta^2 + Cst + kl_1\Delta x\theta$$

$$E_p = \frac{1}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{2}k{l_1}^2\theta^2 + kl_1\Delta x\theta + Cst$$

La condition d'équilibre :$\left.\frac{\partial E_p}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = 0 \;\Rightarrow\; mgl\theta + k{l_1}^2\theta + kl_1\Delta x|_{\theta=0} = 0$

$\Rightarrow \boxed{kl_1\Delta x = 0}$ la condition d'équilibre

Donc : $\boxed{E_p = \frac{1}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{2}k{l_1}^2\theta^2 + C}$

Alors : $\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2 - \frac{1}{2}k{l_1}^2\theta^2 + C}$

b) Equation du mouvement :

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = 0$………**I**

$D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2{}_{amortisseur}$ $\Rightarrow D=\frac{1}{2}\alpha {l_2}^2\dot{\theta}^2$ $\Rightarrow \begin{cases} D: l'\acute{e}quilibre\ dissipative \\ \alpha: le\ coef\ d'amortissement \end{cases}$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] = ml^2\ddot{\theta}$ Equation différentielle du 2ème ordre

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl\theta - k{l_1}^2\theta \Rightarrow \boldsymbol{I} \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + \alpha{l_2}^2\dot{\theta} + \left[mgl + k{l_1}^2\right]\theta = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha{l_2}^2\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha{l_2}^2}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{mgl + k{l_1}^2}{ml^2}\theta = 0}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0$$

$$\delta = \frac{\alpha{l_2}^2}{ml^2} \quad et \quad {\omega_0}^2 = \frac{mgl + k{l_1}^2}{ml^2}\begin{cases} \delta: le\ facteur\ d'amortissementou\ de\ résistance \\ \omega_0: la\ pulsation\ propre \end{cases}$$

La pseudo-pulsation : $\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k{l_1}^2 + mgl}{ml^2} - \frac{\alpha^2{l_2}^4}{4m^2l^4}} \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{4mk{l_1}^2l^2 + 4m^2gl^3 - \alpha^2{l_2}^4}{ml^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{2ml^2}\sqrt{4ml^2(k{l_1}^2 + mgl) - \alpha^2{l_2}^4}}$$

La pseudo-période : $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi ml^2}{\sqrt{4ml^2(k{l_1}^2+mgl)-\alpha^2{l_2}^4}}}$

Exercice n°12 :

Une masse m est suspendue par deux ressorts de raideurs k_1 et k_2. Les frottements étant représentés par l'amortisseur de coefficient α (**voir Fig. 02**).

g) Calculer la pulsation ω_0 des petites oscillations libres non amorties du système.
h) Calculer la pulsation ω_a des petites oscillations amorties.

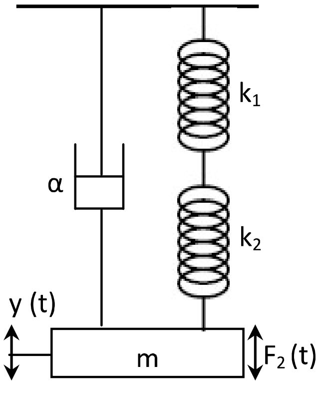


Fig. 12

Solution :

a) Les 2 ressorts sont alignés en série donc :

$k_{éq} = \frac{k_1.k_2}{k_1+k_2}$ (voir l'exercice 1 du fiche TD N°02) $\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k_{éq}}{m}}}$

b) Système amorti ➔ équation différentielle : $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + {\omega_0}^2 y = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\delta\frac{\partial y}{\partial t} + {\omega_0}^2 y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2(Ae^{rt})}{\partial t^2} + 2\delta\frac{\partial(Ae^{rt})}{\partial t} + {\omega_0}^2 Ae^{rt} = 0 \ / \ \ y(t) = Ae^{rt}$$

$$\Rightarrow Ar^2e^{rt} + 2\delta Ae^{rt} + {\omega_0}^2 Ae^{rt} = 0$$

$\Rightarrow r^2 + 2\delta r + {\omega_0}^2 = 0$équation de second ordre

$$\omega_a = \sqrt{\Delta'} \Rightarrow \boxed{\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}}$$

c) Calcul du coefficient de frottement α et le facteur de qualité Q :

* $E_p = \frac{1}{2}k_{éq}(y + \Delta y)^2 - mgy$

$$E_p = \frac{1}{2}k_{éq}y^2 + ky\Delta y - mgy + Cst$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_{éq}y^2 + y(k\Delta y - mg) + Cst \ \Rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2}k_{éq}y^2 + C}$$

*$E_c = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$

Equation du mouvement : $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0 \ / \ \ D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$

$$\Rightarrow \ m\ddot{y} + k_{éq}y + \alpha\dot{y} = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{k_{éq}}{m}y = 0$$

$$\Rightarrow \ \ddot{y} + 2\delta\dot{y} + {\omega_0}^2 y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \alpha = 2\delta m \ \ , \delta: facteur\ de\ résistance \\ Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \ \ Le\ facteur\ de\ qualité \end{cases}$$

d) Système d'oscillation amorti forcé :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathrm{y}}}\right]-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\mathrm{y}}}=F(t)$$ équation de mouvement

$$\Rightarrow \quad m\ddot{y}+k_{éq}y+\alpha\dot{y}=F_0\sin\omega_0 t$$

$$\ddot{y}+\frac{\alpha}{m}\dot{y}+\frac{k_{éq}}{m}y=\frac{F_0}{m}\sin\omega_0 t$$

Solution d'un système d'amortissement libre :

$$y(t)=A_0e^{-\delta t}.\cos(\omega_a t+\phi)\begin{cases} A_0=\dfrac{\omega_0}{\omega_a}y_0 \\ \phi=-arc\ tg\left[\dfrac{\delta}{\omega_a}\right]\end{cases}$$

Solution d'un système d'amortissement forcé :

$$y(t)=y_t(t)+y_p(t)\begin{cases} t\colon régime\ transitoire \\ p\colon régime\ permanent\end{cases}$$

$$y(t)=A_0e^{-\delta t}.\cos(\omega_a t+\phi)+A\sin(\omega_e t+\phi)$$

Avec : $A=\dfrac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{({\omega_0}^2-{\omega_e}^2)^2+4\delta^2{\omega_e}^2}}$, $\phi=arc\ tg\left[\dfrac{\frac{2\delta}{m}}{{\omega_0}^2-{\omega_e}^2}\right]$

<u>Exercice n°13</u> :

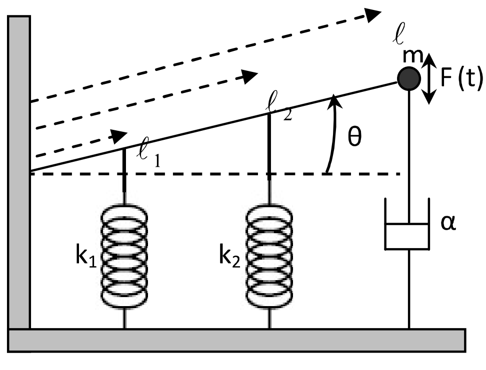
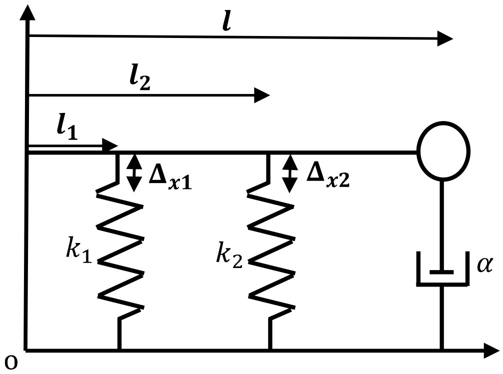
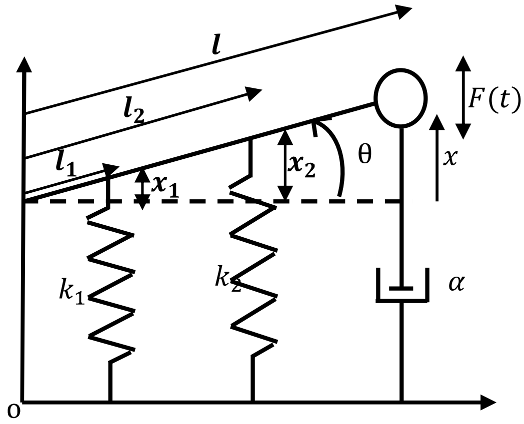


Fig. 13

Une tige rigide de longueur ℓ , de masse négligeable, articulée à l'une de ses extrémités O, porte à son autre extrémité libre une masse ponctuelle m.
A des distances respectives ℓ_1 et ℓ_2 de O,
deux ressorts verticaux de raideurs k_1 et k_2 sont attachés à la tige. Un amortisseur de coefficient α est également fixé à la masse m. la tige se trouve au repos en position horizontale (**voir Fig. 03**). La masse m est soumise à l'action d'une force verticale harmonique $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

Solution :





$$E_p = {E_p}^{k_1} + {E_p}^{k_2} + {E_p}^{m}$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(\Delta x_1 + x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(\Delta x_2 + x_2)^2 + mgx$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_1{x_1}^2 + \frac{1}{2}k_1{\Delta x_1}^2 + \frac{1}{2}k_2{x_2}^2 + \frac{1}{2}k_2{\Delta x_2}^2 + k_1\Delta x_1 x_1 + k_2\Delta x_2 x_2 + mgx$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(l_1\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k_1{\Delta x_1}^2 + \frac{1}{2}k_2(l_2\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2{\Delta x_2}^2 + k_1\Delta x_1 l_1\sin\theta + k_2\Delta x_2 l_2\sin\theta + mgl\theta$$

$$E_p = \frac{1}{2}k_1{l_1}^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2{l_2}^2\theta^2 + k_1\Delta x_1 l_1\theta + k_2\Delta x_2 l_2\theta + mgl\theta + C_1 + C_2$$

$\boxed{E_p = \frac{1}{2}\left(k_1{l_1}^2 + k_2{l_2}^2\right)\theta^2 + (k_1\Delta x_1 l_1 + k_2\Delta x_2 l_2 + mgl)\theta + C}$ l’énergie potentielle complète

b) Condition d’équilibre :

$$\left.\frac{\partial E_p}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = 0 \;\Rightarrow\; \left(k_1{l_1}^2 + k_2{l_2}^2\right)\theta + \left.(k_1\Delta x_1 l_1 + k_2\Delta x_2 l_2 + mgl)\right|_{\theta=0} = 0$$

$\Rightarrow \boxed{k_1\Delta x_1 l_1 + k_2\Delta x_2 l_2 + mgl = 0}$ condition d’équilibre

En conséquence : $\boxed{E_p = \frac{1}{2}(k_1{l_1}^2 + k_2{l_2}^2)\theta^2 + C}$

c) Le Lagrangien : $\mathcal{L} = E_c - E_p$ ……….**I**

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow \; E_c = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$\mathbf{I} \Rightarrow \ \mathcal{L} = -\frac{1}{2}(k_1 l_1^{\,2} + k_2 l_2^{\,2})\theta^2 - C + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(k_1 l_1^{\,2} + k_2 l_2^{\,2})\theta^2 - C}$$

d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = F(t)$ ……**II** / $D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2 \dot{\theta}^2$

$\mathbf{II} \Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} + (k_1 l_1^{\,2} + k_2 l_2^{\,2})\theta + \alpha l^2 \dot{\theta} = F_0 \cos \omega t$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha l^2}{m l^2}\dot{\theta} + \frac{k_1 l_1^{\,2} + k_2 l_2^{\,2}}{m l^2}\theta = \frac{F_0}{m l^2}\cos \omega t$$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{k_1 l_1^{\,2} + k_2 l_2^{\,2}}{m l^2}\theta = \frac{F_0}{m l^2}\cos \omega t}$………**III**

d)(III) $\Rightarrow \ \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^{\,2}\theta = \frac{F_0}{m l^2}\cos \omega_e t \ , \ 2\delta = \frac{\alpha}{m} \ , \omega_0^{\,2} = \frac{k_1 l_1^{\,2} + k_2 l_2^{\,2}}{m l^2}$

La solution est : $\theta(t) = \theta_t(t) + \ \theta_p(t)$

$$\theta_t(t) = A_0 e^{-\delta t}.\cos(\omega_a t + \phi) + A\cos(\omega_e t + \phi)$$

$\boxed{A_0 = \frac{\omega_0}{\omega_a}\theta_0}$, $\boxed{\omega_a = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}}$, $\boxed{\phi = -arc\ tg\left[\frac{\delta}{\omega_a}\right]}$

$\boxed{A = \frac{\frac{F_0}{m l^2}}{\sqrt{(\omega_0^{\,2} - \omega_e^{\,2})^2 + 4\delta^2\omega_e^{\,2}}}}$, $\boxed{\phi = arc\ tg\left[\frac{\frac{2\delta}{m l^2}}{\omega_0^{\,2} - \omega_e^{\,2}}\right]}$

Exercice n°14 :

On considère le circuit électrique R, L, C (**voir Fig. 04**). q = q(t) est la charge électrique du condensateur.

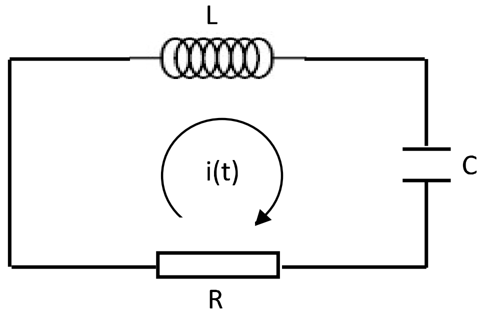


Fig. 14

g) Ecrire les équations de Kirchoff pour ce circuit.

h) En déduire l'équation différentielle qui régit les variations de la charge q(t).

i) Définir les constantes δ et ω_0 du circuit en fonction de R, L, C.

j) Résoudre l'équation différentielle obtenue dans le cas ou la résistance du circuit est faible.

Solution :

a)Les équations de Kirchhoff :

$v_R + v_L + v_C = 0$..........**I**

b)$v_R = R\, i(t)$

$$v_L = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$v_C = \frac{q(t)}{C}$$

De **I** et **II**⇒ $R\, i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$

De **I** et **II**⇒ $R\frac{dq(t)}{dt} + L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0$

⇒$\boxed{L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{c}q = 0}$équation différentielle

$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + {\omega_0}^2 q = 0}$équation différentielle

c)$2\delta = \frac{R}{L},\ {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{R}{2L}}$,$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$

d)R est faible ⇒ $\delta \ll \omega_0$Régime pseudo-périodique

$q(t) = A_0 e^{-\delta t}.\cos(\omega_a t + \phi)$avec$\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} \Rightarrow \quad \omega_a = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_a = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L - R^2C}{C}}}$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad \Rightarrow i(t) = -\omega_a A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega_a t + \phi) - A\delta e^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \phi)$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = -A_0 e^{-\delta t}[\delta\cos(\omega_a t + \phi) + \omega_a \sin(\omega_a t + \phi)]}$$

La force de rappel

F = Constante de rappel * élongation

$$F = -kx \quad [x\text{: élongation} \quad , \quad k\text{: constante de rappel}]$$

$E_p^{\ pesanteur}$ $\begin{cases} (-)ascendant \\ (+)descendant \end{cases} = -mgh$

potentiel d'une force extérieur dépend seulement de la position de l'objet

$E_p^{\ \acute{e}lastic}$

signe suivant la direction du mouvement

potentiel d′une force interne qui dépend essentiellement du différent de position (position relative)

$= \frac{1}{2} kx^2$

Pendule	**Ressort**
$F = -kx$	$F = -kx$
$\downarrow$	$\downarrow$
$k = P = mg$	$k = constante\ de\ raideur$

<u>Condition d'équilibre</u> : $\left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$

<u>Condition de stabilité (équilibre stable)</u> : $\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2} > 0$

Résumé

Oscillation amorti : $\ddot{q} + \frac{\alpha}{m}\dot{q} + \frac{k}{m}q = 0 \begin{cases} \alpha\text{: coefficient d'amortissement} \\ k\text{: const de rappelle} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q} + 2\delta\dot{q} + {\omega_0}^2 q = 0 \begin{cases} \delta\text{: facteur de résistivité (décroissement)} \\ \omega_0\text{: cpulsation propre} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad r^2 + 2\delta r + {\omega_0}^2 = 0$ ………… **(1)**

Le discriminant $\Delta' = \delta^2 - {\omega_0}^2$

Si $\Delta' < 0$ le régime est pseudo-périodique$\delta < \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega_0}{\delta} > 1 \Rightarrow \frac{\omega_0 m}{\alpha} > \frac{1}{2}$

$$\omega_a = \sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} \Rightarrow \boxed{Q > \frac{1}{2}} \ , \boxed{Q = \frac{\omega_0}{2\delta}}$$

$$\Rightarrow q(t) = A_0 e^{-\delta t}.\cos(\omega_a t + \phi) \begin{cases} A_0 = \dfrac{\omega_0}{\omega_a} q_0 \\ \phi = -arc\ tg\left[\dfrac{\delta}{\omega_a}\right] \end{cases} r_\pm = -\delta \pm i\sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_a$$

Si $\Delta' > 0$ le régime est apériodique $\delta > \omega_0 \Rightarrow \quad Q < \frac{1}{2}$

$q(t) = A_1 e^{r_+ t} + A_2 e^{r_- t}$, $r_\pm = -\delta \pm i\sqrt{{\omega_0}^2 - \delta^2}$solution de l'équation (1)

$$\omega_a = i\sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}$$

* A_1 et A_2 sont déterminés à l'aide des conditions aux limites.

Si $\Delta' = 0$ le régime est critique :

$$q(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\omega_0 t} \ , \ r = -\delta = -\omega_0 \Rightarrow \boxed{\omega_a = \omega = \delta}$$