Chapitre III :

Oscillations libres amorties des systèmes à un degré de liberté

III.1 Introduction

Dans les oscillations amorties, les forces de frottement sont prisent en considération. Les frottements sont visqueux et dépend de la vitesse.

III.2 Oscillateur amorti

Le mouvement oscillatoire harmonique n'existe pas dans la réalité : tout système mécanique réel présentant un frottement, une partie de l'énergie mécanique est dissipée en chaleur, et les oscillations du système sont amorties.

III.3 Frottement et coefficient d'amortissement

III.3.1 Frottements visqueux :

La force de frottement visqueux est proportionnelle à la vitesse de déplacement et de sens contraire.

$$\vec{F} = -\alpha.\vec{v} \qquad (III.1)$$

α : Le coefficient de frottement visqueux (kg/s).

III.3.2 Frottements solides :

La force de frottement est constante et opposée au mouvement.

III.4 Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système libre amorti s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad (III.2)$$

On définit la fonction de dissipation par :

$$D = \frac{1}{2}\alpha.\dot{q}^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \alpha.\dot{q}, \dot{q} = \dot{x}_\alpha \qquad (III.3)$$

x_α: le déplacement de l'amortisseur

La forme de l'équation différentielle est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad (III.4)$$

Avec :

δ est le coefficient d'amortissement.

ω_0 : la pulsation propre.

III.5 Régimes de l'oscillateur amorti

L'équation différentielle d'un oscillateur amorti est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0.$$

Il existe trois régimes possibles:

III.5.1 Régime apériodique ($\delta > \omega_0$), les frottements sont importants, la valeur du coefficient d'amortissement est grande, le système revient lentement à sa position d'équilibre sans effectuer des oscillations et la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$q(t) = A_1 e^{\left[-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0{}^2}\right]t} + A_2 e^{\left[-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0{}^2}\right]t} \qquad \text{(III.5)}$$

$A_1\ et\ A_2$ sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales.

III.5.2 Régime critique ($\delta = \omega_0$), le retour à la position d'équilibre se fait sans oscillation et rapidement. Il permet de fixer la limite entre les régimes pseudopériodique et apériodique, la solution est de la forme :

$$q(t) = (A_1 + A_2)e^{-\delta t} \qquad \text{(III.6)}$$

$A_1\ et\ A_2$: Constantes d'intégration définies par les conditions initiales.

III.5.3 Régime pseudopériodique ($\delta < \omega_0$), (régime des faibles amortissements) on observe que l'amplitude des oscillations est toutefois décroissante, elle est pondérée au fil du temps par un facteur exponentiel décroissant dépendant du frottement, et la solution de l'équation différentielle est de la forme :

$$q(t) = Ae^{-\delta t}cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{(III.7)}$$

$A\ et\ \varphi$ sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

ω est la pseudo pulsation définie par :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^{\,2}} \qquad \text{(III.8)}$$

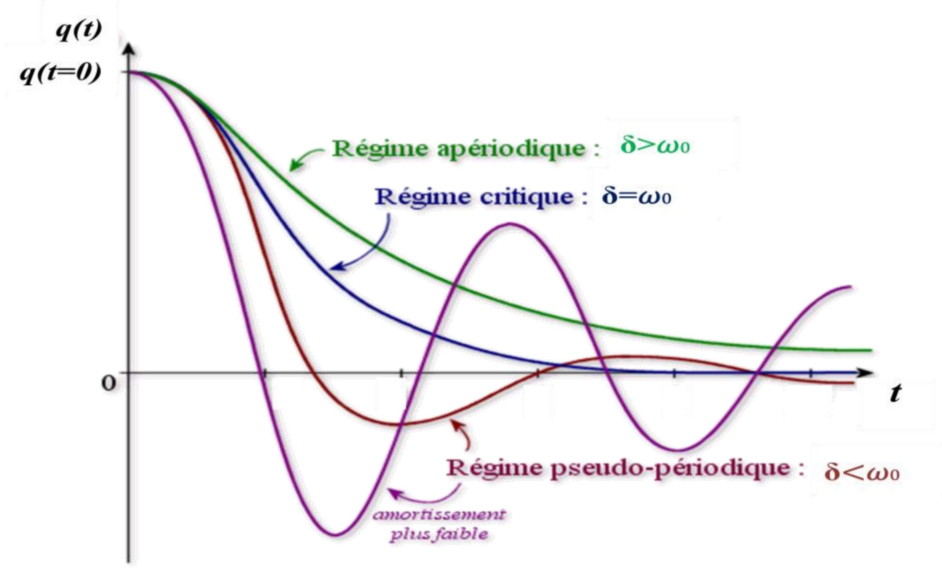


Figure III.1 : La variation de q(t) en fonction du temps t pour les trois régimes (Régime apériodique, Régime critique et Régime pseudopériodique).

La figure III.1 illustre la variation de q(t) en fonction du temps t pour les trois régimes (Régime apériodique, Régime critique et Régime pseudopériodique).

III.6 Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique est la mesure logarithmique de la décroissance périodique d'une grandeur oscillatoire (amplitude du mouvement).

$$D = ln\frac{A(t_1)}{A(t_2)} = ln\frac{A(t_1)}{A(t_1+T)} = -ln\frac{A(t_1+T)}{A(t_1)} \qquad (\text{III}.9)$$

Ou :

$$\text{D} = \frac{1}{\text{n}}\ln\frac{\text{A(t)}}{\text{A(t+nT)}} \qquad (\text{III}.10)$$

n : le nombre de périodes

En remplaçant les formules des amplitudes, on obtient à :

$$D = \delta.\text{T} \qquad (\text{III}.11)$$

δ est le coefficient d'amortissement.

T est le pseudo période. Elle est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (III.12)$$

ω est la pseudo pulsation, elle est égale à :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \qquad (III.13)$$

III.7 Coefficient de Qualité :

Est une mesure sans unité du taux d'amortissement d'un oscillateur. Le coefficient de qualité permet de quantifier la qualité d'un système oscillatoire. Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande. Or Q est d'autant plus grand.

$$Q = 2\pi \cdot \frac{E_{sys}}{E_{diss}} = \frac{\omega_0}{2\,\delta} \qquad (III.14)$$

III.8 Energie Mécanique

Pour le cas d'un système faiblement amorti ($\delta \ll \omega_0$), l'énergie mécanique s'écrit :

$$E(t) = E_0 . e^{-2\delta t} \qquad (III.15)$$

$E_0 = E(0)$ Energie totale initiale (à t =0), $E_0 = E(0) = E_c(0) + E_p(0)$

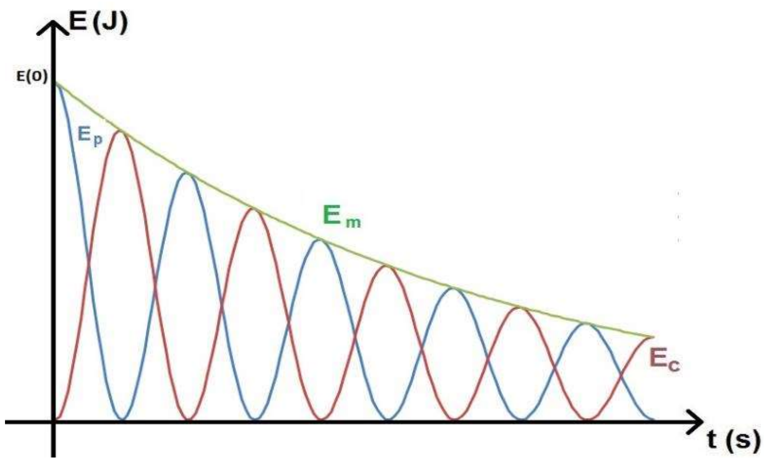
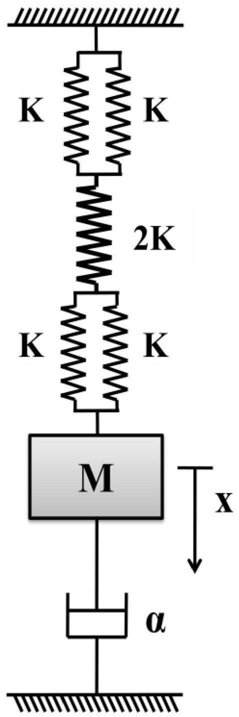


Figure III.2 : La variation de l'énergie totale (mécanique) en fonction de temps t avec frottement

Le système amorti perd de l'énergie par des phénomènes de dissipation (frottement). L'énergie totale du système décroît au cours du temps.

III.9 Exercices résolus

Exercice N°1



Soit un système mécanique constitue d'une masse $M = 0.5$ kg , d'un ensemble de ressorts et d'un amortisseur de $\alpha = 1$ kg/s. (voir le schéma ci-contre).

On donne : $K = 60$ N/m , $x(0) = 0.1$ m , $\dot{x}(0) = 2$ m.s^{-1}

1- Quel est le nombre de degré de liberté du système ?

2- Simplifier le schéma en calculant le ressort équivalent

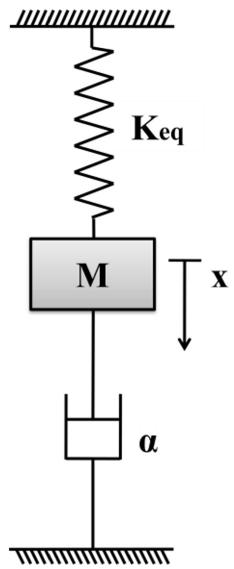
3- Trouver l'énergie cinétique, potentielle et de dissipation.

4- Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le régime des faibles amortissements.

5- Calculer l'énergie totale à $t = 0$ et donner son expression finale en fonction du temps.

6- Calculer la valeur de **α** pour que l'amplitude atteint une valeur de 1mm après une oscillation pseudo-périodique.

Solution N°1



1- le nombre de degré de liberté : 1

2-le schéma équivalent et le ressort équivalent k_{eq}:

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \Rightarrow k_{eq} = \frac{2k}{3}$$

$$k_{eq} = \frac{2 \times 60}{3} = 40 \text{ N/m}$$

3- l'énergie cinétique, potentielle et de dissipation :

- l'énergie cinétique: $E_c = \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$
- l'énergie potentielle: $E_P = E_{P(Keq)} = \frac{1}{2}K_{eq}\,x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2K}{3}\right)x^2 = \frac{1}{3}Kx^2$

- l'énergie de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

4- l'équation différentielle du mouvement dans le régime des faibles amortissements :

Formalise de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_P}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = M\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial x} = K_{eq}x$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + K_{eq}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{M}\dot{x} + \frac{K_{eq}}{M}x = 0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{\alpha}{M} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2M} = \frac{1}{2 \times 0.5} = 1\ s^{-1}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{K_{eq}}{M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{eq}}{M}} = \sqrt{\frac{2k}{3M}} = \sqrt{\frac{2 \times 60}{3 \times 0,5}} = 8,944\ rad.s^{-1}$$

La pseudo-pulsation ω :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \sqrt{80 - 1} = \sqrt{79} = 8,888\ rad.s^{-1}$$

Le pseudo période T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{8{,}888} = 0{,}706 \ \text{s}$$

La solution de l'équation différentielle du mouvement :

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} sin(\omega t + \varphi)$$

5- l'énergie totale à t = 0 s :

$$E_0 = E(0) = E_c(0) + E_p(0) = E(0) = \frac{1}{2} M\dot{x}^2(0) + \frac{1}{2} K_{eq}\, x^2(0)$$

$$E(0) = \left(\frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 2\right) + \left(\frac{1}{2} \times 40 \times (0{,}1)^2\right) = 0{,}7 \ \text{J}$$

L'expression de l'énergie totale du système :

$$E(t) = E_0 . e^{-2\delta t} = 0{,}7 e^{-2t} \ \text{J}$$

6- La valeur de **α** pour que l'amplitude atteint une valeur de 1mm après une oscillation

pseudo-périodique :

Le décrément logarithmique D :

$$D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)}$$

$$D = \ln \frac{100}{1} = 4.6$$

$$D = \delta . T = \delta \ \frac{2\pi}{\omega} = \delta \frac{2\pi}{\omega_0^2 - \delta^2}$$

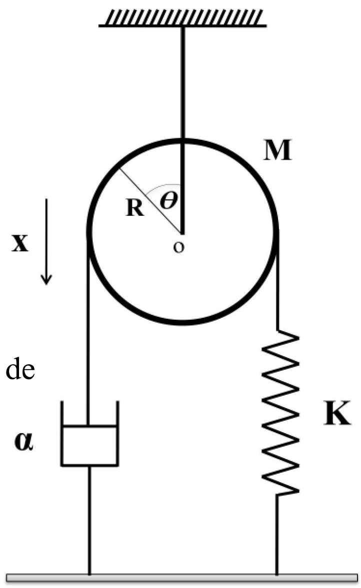
$$D^2 = \frac{4\pi^2 \delta^2}{\omega_0^2 - \delta^2} \ \Rightarrow \ D^2(\omega_0^2 - \delta^2) = 4\pi^2 \delta^2 \Rightarrow \delta^2(4\pi^2 + D^2) = D^2 \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{D\omega_0}{\sqrt{4\pi^2 + D^2}} = 6.3854 \ \text{s}^{-1}$$

$$\alpha = 2\delta M = 2 \times 6.3854 \times 0.5 = 6.3854 \ \text{kg/s}$$

$$\alpha = 6.3854 \ \text{kg/s}$$

Exercice N°2



Soit une poulie (cylindre creux) de masse M et de rayon R peut tourner librement autour de son axe fixe. La poulie est suspendue par une corde inextensible a un bâti fixe. Aux Extrémités de la poulie sont fixés un ressort de raideur K, et une masse M par un fil inextensible de masse négligeable. On néglige aussi la masse du ressort et le frottement autour de l'axe de la poulie. On donne le moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$.

Valeurs numériques :

$M = 1\text{kg}, K = 50\ \text{N/m},\ R = 0.2\ \text{m}, \alpha = 1\ \text{kg/s}.$

1- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p et l'énergie de dissipation E_D.

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ.

3- Donner la solution dans le régime des faibles amortissements **(** $\delta < \omega_0$**).**

4- Calculer le coefficient de qualité du système mécanique Q.

5- après 15 périodes, l'amplitude du mouvement diminue de 30% de sa valeur initiale.

Calculer le décrément logarithmique D.

Solution N°2

1- L'énergie cinétique E_c, potentielle E_p et de dissipation E_D:

L'énergie cinétique E_c:

$$E_c = \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}Kx^2\ \text{, avec}\ x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_P = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

2- L'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ.

Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = 0 \; ou \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = 0$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial\theta} = kR^2\theta$$

$$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + kR^2\theta = 0$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M}\dot{\theta} + \frac{2K}{M}\theta = 0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{2\alpha}{M} \Rightarrow \; \delta = \frac{\alpha}{M} = \frac{1}{1} = 1\ s^{-1}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{2K}{M} \Rightarrow \; \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{2\times 50}{1}} = 10\ rad.s^{-1}$$

3- la solution dans le régime des faibles amortissements.

$$\theta(t) = A_0e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \sqrt{100-1} = \sqrt{99} = 9.949\ rad.s^{-1}$$

4- le coefficient de qualité du système mécanique Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{10}{2 \times 1} = 5 \Rightarrow \quad Q = 5$$

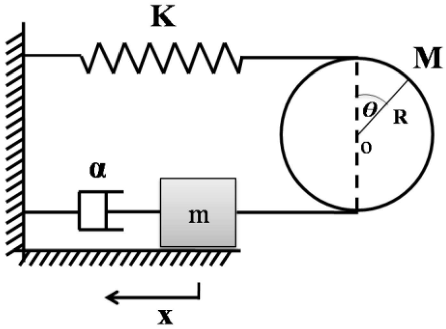
5- Le décrément logarithmique D :

$$D = \frac{1}{n} \ln \frac{A(t)}{A(t + nT)} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{15} \ln \frac{100}{100 - 30} = 0.0237$$

$$D = 0.0237$$

<u>Exercice N°3</u>

Dans le système ci-contre, un disque homogène de masse M et de rayon R peut tourner librement avec un angle θ autour de son axe fixe. La masse m sur le plan horizontal est reliée à un amortisseur de coefficient α et au disque par un fil inextensible et non glissant.



Valeurs numériques : $M = 2\text{kg}, m = 1\text{kg}, R = 0.2\ \text{m}, \alpha = 1\ \text{kg/s}\ K = 72\text{N/m}$.

1- Trouver la relation entre x et θ.

2- Donner l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable x, ainsi la solution dans le régime des faibles amortissements **(** $\delta < \omega_0$**).** Le moment d'inertie du disque autour de son axe est : $J_{/0} = \frac{1}{2} MR^2$.

3- Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement en fonction de variable x .

4- Calculer le coefficient de Qualité é du système mécanique Q.

5- Définir et calculer le décrément logarithmique D.

6- Donner le nombre de périodes n pour lequel l'amplitude du mouvement devient 60% de sa valeur initiale.

Solution 3

1- la relation entre x et θ : $x = R\theta$

2- l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable x :

- L'énergie cinétiqueE_c :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm}$$

$$E_c = \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}Kx^2$$

- L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

3- Le Lagrangien est :

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

Le Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_P}{\partial x} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial x} = Kx$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\left(m+\frac{M}{2}\right)\ddot{x}+\alpha\dot{x}+Kx=0 \;\Rightarrow \ddot{x}+\frac{\alpha}{m+\frac{M}{2}}\dot{x}+\frac{K}{m+\frac{M}{2}}x=0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta=\frac{\alpha}{m+\frac{M}{2}} \Rightarrow \;\delta=\frac{\alpha}{M+2m}=\frac{2}{2+(2\times 1)}=0{,}5\;s^{-1}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2=\frac{K}{m+\frac{M}{2}} \Rightarrow \;\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m+\frac{M}{2}}}=\sqrt{\frac{72}{1+\frac{2}{2}}}=6\;rad.s^{-1}$$

La solution est :

$$x(t)=A_0e^{-\delta t}sin(\omega t+\varphi)$$

4- le coefficient de qualité du système mécanique Q :

$$Q=\frac{\omega_0}{2\delta}=\frac{6}{2\times 0.5}=4 \Rightarrow \;\; Q=6\,,Q=6\gg 1$$

Le régime des faibles amortissements.

5- Le décrément logarithmique D :

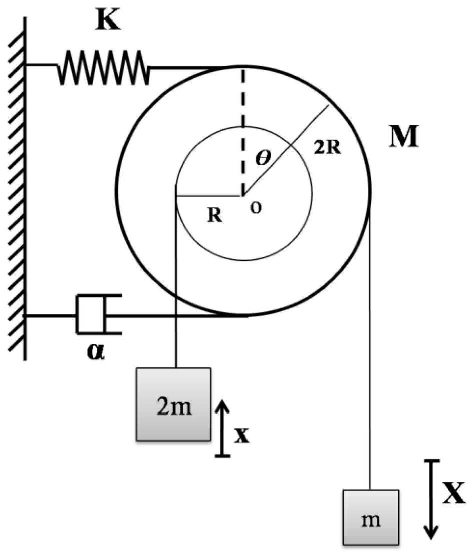
$$D=\delta.T=\frac{2\pi\delta}{\omega}=\frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}=\frac{2\times 3{,}14\times 0{,}5}{\sqrt{36-1}}\;=0{,}810\;\Rightarrow\;\; D=0{,}530$$

6- Le nombre de périodes n :

$$D=\frac{1}{n}\ln\frac{A(t)}{A(t+nT)}\;\Rightarrow n=\frac{1}{D}\ln\frac{A(t)}{A(t+nT)} \Rightarrow\;\; n=\frac{1}{0.53}\ln\left(\frac{100}{60}\right)=3.14$$

$n\approx 3$ oscillations

Exercice N°4



Un disque homogène de masse M et de rayon 2R est relié à sa périphérie à un ressort de raideur K et à un amortisseur de coefficient de frottement **α**. Une masse 2m est suspendue à un fil enroulé autour de la périphérie du disque et une autre masse **m** suspendue à un fil enroulé autour d'un sillon de rayon **R** gravé sur la surface du disque.

Les fils sont supposés inextensibles et non glissants.

Le disque peut tourner librement autour de son axe fixe.

Le moment d'inertie du disque autour de son axe est : $J_{/0} = \frac{1}{2} MR^2$.

On donne : $\alpha = 8\ \mathrm{N.s/m}$, $K = 2\ \mathrm{N/m}$,$M = 2m = 1\mathrm{kg}, m = 0.5\mathrm{kg}$

1- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, ainsi la fonction de dissipation E_D pour $\theta \ll 1$. (à l'équilibre le ressort n'était pas déformé).

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement.

3- déduire la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement δ.

4- Trouver la nature de mouvement.

5- Quelle est la valeur de **α** qui ne pas dépasser pour avoir des oscillation.

Solution 4

1- L'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, ainsi la fonction de dissipation E_D :

- l'énergie cinétique E_c :

$$E_c = E_{c\ disque} + E_{c\ 2m} + E_{c\ m}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(2R)^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}(m)\dot{x}^2$$

Puisque le fil est non glissant et inextensible on a :

$$\begin{cases} x = R\theta \\ X = 2R\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = R\dot{\theta} \\ \dot{X} = 2R\dot{\theta} \end{cases}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M(2R)^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(m)4R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(2m)R^2\dot{\theta}^2$$

$E_c = MR^2\dot{\theta}^2 + 2mR^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\theta}^2$

$E_c = (M + 2m + m)R^2\dot{\theta}^2$

$E_c = (M + 3m)R^2\dot{\theta}^2$

- l'énergie potentielle E_p:

$E_P = E_{P(K)} + E_{P(2m)} + E_{P(m)}$

$E_P = \frac{1}{2}KX^2 + 2mgx - mgX$

$E_P = \frac{1}{2}K4R^2\theta^2 + 2mgR\theta - mg2R\theta \Rightarrow E_P = 2KR^2\theta^2$

- la fonction de dissipation E_D :

$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{X}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{X}^2$

$E_D = \frac{1}{2}\alpha 4R^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow E_D = 2\alpha R^2\dot{\theta}^2$

Le Lagrangien est :

$L = E_c - E_P = (M + 3m)R^2\dot{\theta}^2 - 2KR^2\theta^2$

2- L'équation différentielle du mouvement :

Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \ ou \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial \theta} = 0$

$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2(M + 3m)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2(M + 3m)R^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha R^2\dot{\theta}$

$\frac{\partial E_P}{\partial \theta} = 4kR^2\theta$

L'équation différentielle s'écrit :

$(M + 3m)R^2\ddot{\theta} + 4\alpha R^2\dot{\theta} + 4kR^2\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{4\alpha R^2}{2(M + 3m)R^2}\dot{\theta} + \frac{4kR^2}{2(M + 3m)R^2}\theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{(M + 3m)}\dot{\theta} + \frac{2k}{(M + 3m)}\theta = 0$

3- La pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement δ:

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{2\alpha}{M + 3m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{M + 2m} = \frac{8}{1 + 1} = 4\, s^{-1}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{(M + 3m)} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{(M + 3m)}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{1 + (3 \times 0.5)}} = 1.264\, rad.s^{-1}$$

4- La nature de mouvement :

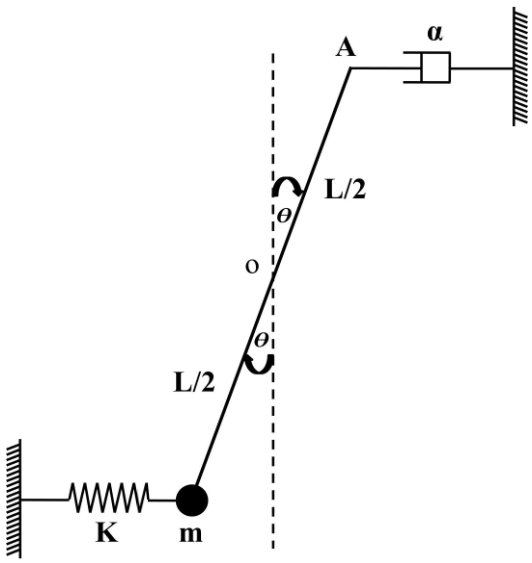
$\delta^2 - \omega_0^2 = (4)^2 - (1.264)^2 = 6.4 > 0 \Rightarrow$ Le mouvement apériodique.

5- Pour avoir des oscillations il faut que $\delta^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \delta < \omega_0 \Rightarrow \alpha < \sqrt{2K(M + 3m)}$

$\Rightarrow \alpha < 4$ Ns/m

<u>Exercice N°5</u>

On considère le système mécanique ci-contre, constitué d'une tige de longueur L et de masse négligeable pouvant tourner dans un plan vertical autour de son axe fixe O. Le point A est relié à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. A l'autre extrémité de la tige est fixée une masse ponctuelle m qui est reliée à un second bâti fixe par un ressort de raideur K.



On se place dans le cas des oscillations libres de faible amplitude.

1- Quel est le nombre de degré de liberté du système étudie. Justifier ?

2- calculer l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable θ.

3- Etablir l'équation différentielle du mouvement dans le régime des faibles amortissements ainsi que sa solution.

4- Après 15 périodes, l'amplitude du mouvement diminue de 25% de sa valeur initiale. Calculer le décrément logarithmique *D*.

5- En déduire le nombre de périodes pour lequel l'énergie total diminue avec le même pourcentage .conclure

<u>Solution N°5</u>

1-Le système oscille à un degré de liberté car il y a une seule variable indépendante qui caractérise le mouvement.

2- Les énergies cinétiqueE_c, potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D (variable θ) :

- L'énergie cinétique E_c:

$$E_C = E_{Cm} = \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2,\ J_m = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{4}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(m)} + E_{P(K)}$$

$$E_p = mgh + \frac{1}{2}Kx^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$x = \frac{L}{2}\sin\theta \Rightarrow x = \frac{L}{2}\theta$$

$$h = \frac{L}{2}(1-\cos\theta) \Rightarrow h = \frac{L}{2}\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{L}{4}\theta^2$$

$$E_p = mg\frac{L}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}K\frac{L^2}{4}\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}\left(\frac{mgL}{2} + \frac{KL^2}{4}\right)\theta^2$$

- L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha L^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

3- L'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial \theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{mL^2}{4}\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{mL^2}{4}\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{\alpha L^2}{4}\right)\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial \theta} = \left(\frac{mgL}{2} + \frac{KL^2}{4}\right)\theta$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\left(\frac{mL^2}{4}\right)\ddot{\theta} + \left(\frac{\alpha L^2}{4}\right)\dot{\theta} + \left(\frac{mgL}{2} + \frac{KL^2}{4}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(\frac{\alpha L^2}{4}\right)}{\left(\frac{mL^2}{4}\right)}\dot{\theta} + \frac{\left(\frac{mgL}{2} + \frac{KL^2}{4}\right)}{\left(\frac{mL^2}{4}\right)}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{2g}{L} + \frac{K}{m}\right)\theta = 0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2m}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \left(\frac{2g}{L} + \frac{K}{m}\right) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2g}{L} + \frac{K}{m}\right)}$$

La solution est :

$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

4- le décrément logarithmique D.

$$D = \frac{1}{n}\ln\frac{A(t)}{A(t+nT)} \Rightarrow D = \frac{1}{15}\ln\left(\frac{100}{100-25}\right) = 0.0191$$

$D = 0.0191$

5- le nombre de périodes pour lequel l'énergie total diminue avec le même

Pourcentage :

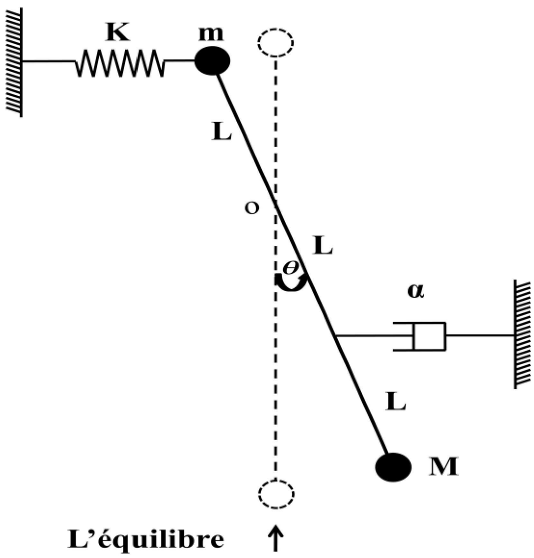
$$D = \frac{1}{2n}\ln\frac{E(t)}{E(t+nT)} \Rightarrow n = \frac{1}{2D}\ln\frac{E(t)}{E(t+nT)}$$

$$n = \frac{1}{2D}\ln\frac{E(t)}{E(t+nT)} = n = \frac{1}{2\times 0.0191}\ln\frac{100}{100-25} = 34.90$$

$n \cong 35$ oscillations

L'énergie totale du système décroit deux fois plus rapide que l'amplitude d'oscillation.

Exercice N°6



Une tige de longueur 3L porte en ses extrémités des masses M et m. La tige peut tourner autour d'un point o. L'ensemble des frottements est symbolisé par l'amortisseur de coefficient α. A l'équilibre le ressort était non déformé et la tige était verticale.

1- Quel est le nombre de degré de liberté du système étudie. Justifier ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable θ.

3- Trouver le Lagrangien et l'équation du mouvement. Déduire $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\omega_0}$.

4- Déterminer la solution dans le régime des faibles amortissements.

5- déduire le coefficient de qualité du système mécanique Q.

6- Donner l'expression de l'énergie mécanique.

7- Après 30 périodes, l'amplitude du mouvement diminue de 45% de sa valeur initiale.

Calculer le décrément logarithmique D.

Solution 6

1-Le système oscille à un degré de liberté car il y a une seule variable indépendante qui caractérise le mouvement.

2- l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D.

- L'énergie cinétique E_c:

$$E_C = E_{Cm} + E_{CM} = \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{M/o}\dot{\theta}^2$$

$$J_{m/o} = mL^2$$

$$J_{M/o} = M(2L)^2 = 4ML^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(4ML^2)\dot{\theta}^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}(m + 4M)L^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(m)} + E_{P(M)}$$

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + mgh - MgH$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\theta$$

$$h = L(1 - \cos\theta) \Rightarrow h = L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{L\theta^2}{2}$$

$$H = 2L(1 - \cos\theta) \Rightarrow h = 2L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow H = L\theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}KL^2\theta^2 + mg\frac{L\theta^2}{2} - Mg\,L\theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}KL^2\theta^2 + \frac{1}{2}g(m - 2M)L\theta^2$$

- L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

$E_D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$

3- L'équation différentielle du mouvement satisfaite par θ :

Fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P \Rightarrow L = \frac{1}{2}(m+4M)L^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KL^2\theta^2 - \frac{1}{2}g(m-2M)L\theta^2$

Formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = 0 \ \ ou \ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m+4M)L^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m+4M)L^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial\theta} = KL^2\theta + g(m-2M)L\theta = (KL^2 + g(m-2M)L)\theta$$

L'équation différentielle s'écrit :

$$(m+4M)L^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (KL^2 + g(m-2M)L)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha L^2}{(m+4M)L^2}\dot{\theta} + \frac{(KL^2 + g(m-2M)L)}{(m+4M)}\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{(m+4M)}\dot{\theta} + \frac{(KL^2 + g(m-2M)L)}{(m+4M)L^2}\theta = 0$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{\alpha}{(m+4M)} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2(m+4M)}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{(KL^2 + g(m-2M)L)}{(m+4M)L^2} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{(KL^2 + g(m-2M)L)}{(m+4M)L^2}}$$

4- la solution dans le régime des faibles amortissements :

$\theta(t) = A_0 e^{-\delta t} cos(\omega t - \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

5- le coefficient de qualité du système mécanique Q :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{\frac{(KL^2 + g(m-2M)L)}{(m+4M)L^2}}}{\frac{\alpha}{2(m+4M)}}$$

6- l'expression de l'énergie mécanique :

$$E(t) = E_0 . e^{-2\delta t}$$

7− Calculer le décrément logarithmique D :

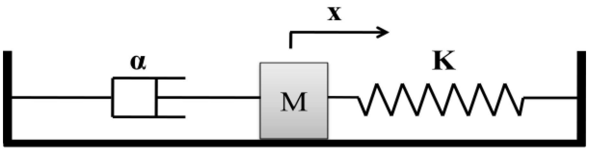
$$D = \frac{1}{n} \ln \frac{A(t)}{A(t+nT)} \Rightarrow D = \frac{1}{30} \ln\left(\frac{100}{100-45}\right) = 0.0199$$

$D = 0.0199$

III.10 Exercices supplémentaires

Exercice N°1

Un système mécanique constitue d'une masse $M = 1$ kg , d'un ressort de constante de raideur $K = 50$ N/m et d'un amortisseur de coefficient $\alpha = 2$ kg/s (voir le schéma ci-contre).



1- Déterminer l'équation du mouvement.

2- Déterminer : le coefficient d'amortissement δ, la pulsation propre ω_0, la pseudo-pulsation ω et le pseudo période T.

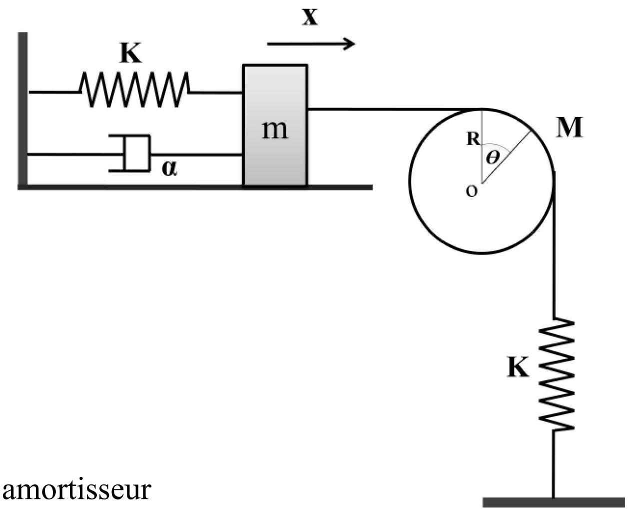
3- Trouver la solution de l'équation différentielle du mouvement si :

$x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 5\ m.s^{-1}$.

4- Donner l'expression de l'énergie mécanique (l'énergie totale du système).

5- Calculer le coefficient de qualité du système mécanique Q et le décrément logarithmique D.

<u>Exercice N°2</u>



Le système de la figure ci-contre est constitué d'un disque de masse $M = 2\text{kg}$ et de rayon R en rotation autour de son axe fixe.

Un fil inextensible de masse négligeable entraine le disque sans glissement sur sa périphérie.

Il porte à son extrémité une masse $m = 1\text{kg}$, un ressort de constante de raideur $K = 25\ \text{N/m}$ et un amortisseur de coefficient de frottement $\alpha = 2\ \text{kg/s}$.

A l'autre extrémité est attaché un autre ressort de raideur K.

1- Trouver la relation entre x et θ.

2- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable θ. Le moment d'inertie du disque autour de son axe est :

$J_{/0} = \frac{1}{2}\ MR^2$.

3- Donner l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable.

4- Donner la solution dans le régime des faibles amortissements **(** $\delta < \omega_0$**).**

5- Après 30 oscillations pseudopériodiques, l'énergie totale du système vibratoire diminue de 70% de sa valeur initiale.

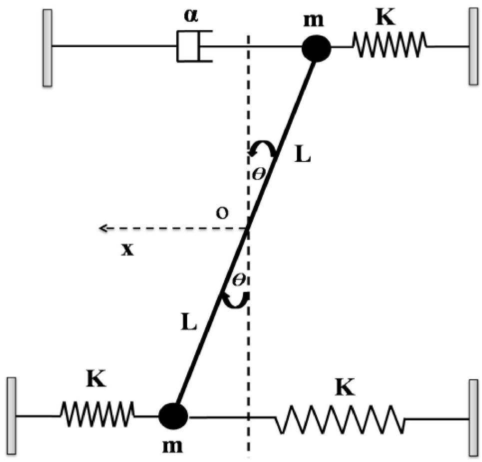
a- Calculer le décrément logarithmique D.

b- Après combien d'oscillations pseudopériodiques, l'amplitude du mouvement devient égale à 60% de sa valeur initiale

6- Quelle est la valeur de α pour laquelle le mouvement devient critique.

7- L'énergie totale du système est-elle conservative ? Expliquer.

Exercice N°3



Un système mécanique comprenant une barre horizontale de masse négligeable et de longueur 2L qui peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son milieu.

Dans le cas des oscillations de faibles amplitudes :

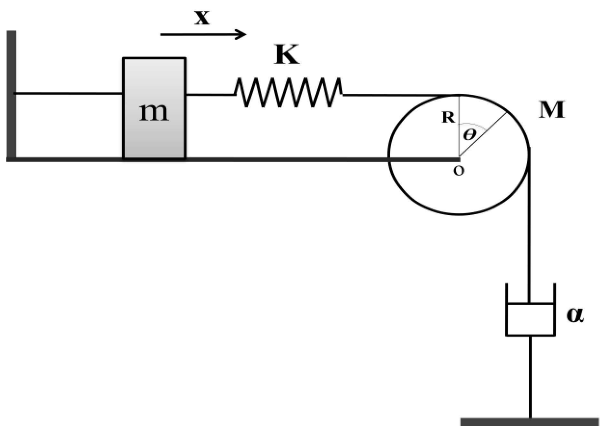
1- Trouvez le système équivalent.

2- Trouver l'équation différentielle du mouvement en fonction de la variable θ.

3- Donner la solution dans le cas $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{\omega_0}$.

4- Après 15 périodes, l'amplitude du mouvement diminue de 25% de sa valeur initiale. Calculer le décrément logarithmique D

Exercice N°4



Le système de la figure ci-contre est constitué d'une poulie de masse $M = 1$ kg , et de rayon $R = 0.2$ m , le moment d'inertie de la poulie $J_{/o} = \frac{1}{2}MR^2$. Cette poulie tourne sans frottement autour d'un axe fixe passant par le point O.

la masse $m = 0.5$ kg sur un plan horizontal est reliée à un ressort de raideur $K = 90$ N/m et au poulie par un fil inextensible et non glissant.

A l'autre extrémité de la poulie, est fixé Un amortisseur de coefficient $\alpha = 0.5$ kg/s.

1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction x et déduire la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement δ.

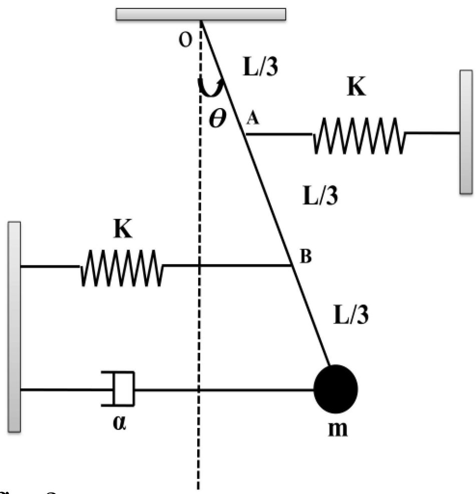
2- Donner la solution finale, si à $t = 0 : x(0) = 0 ; \dot{x}(0) = 2\,\omega$ $(\omega : \text{pseudo} - \text{pulsation})$.

3- Calculer le coefficient de qualité du système mécanique Q.

4- Calculer le décrément logarithmique.

5- Après combien d'oscillations, l'amplitude du mouvement diminue de 40% de sa valeur initiale.

Exercice N°7



La figure ci-contre représente un système mécanique faiblement amorti formé d'une masse m à l'extrémité d'une tige de masse négligeable est attaché a un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Le point A de la tige est relié à un bâti par un ressort de raideur K, et aussi le point B est relié a un bâti par un ressort de raideur K. Avec (OA=AB=BC=L/3)

1- Quel est le nombre de degré de liberté du système étudie. Justifier ?

2- Trouver l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable θ.

3- Donner l'équation du mouvement, déduire $\boldsymbol{\delta}$ et $\boldsymbol{\omega_0}$.

4- Déterminer la solution dans le régime des faibles amortissements.

5- Après 62 oscillations pseudopériodiques, l'énergie totale du système vibratoire diminue de 58% de sa valeur initiale. Calculer le décrément logarithmique D.

6- Après combien d'oscillations pseudopériodiques, l'amplitude du mouvement devient égale à 35% de sa valeur initiale.