Chapitre II :

Oscillations libres non amortis des systèmes à un degré de liberté

II.1 Les systèmes libres non amortis (Oscillateurs libres)

Un système oscillant en absence de toute force d'excitation (forces extérieures) est appelé libre (oscillateur libre non amorti). Le nombre des variables indépendantes décrivant le système est appelé degré de liberté (DDL).

II.2 Oscillateur harmonique

En mécanique, on appelle oscillateur harmonique qui, dés qu'il soit écarté de sa position d'équilibre d'une distance x (ou angle θ), est soumis à une force de rappel opposée et proportionnelle à l'écartement x (ou θ).

II.3 Équation du mouvement

L'équation différentielle d'un mouvement libre non amorti est de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

L'équation de Lagrange pour les oscillations libres d'un système conservatif est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

La solution de l'équation (II.1) est donnée par :

$$q(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\cos(\omega_0 \mathrm{t} + \varphi) \qquad \text{(II.3)}$$

A : Amplitude des oscillations, φ : Phase initial**.**

ω_0: La pulsation du système, elle dépend des éléments constitutifs (masse, ressort, fils…).

Les constantes A et φ sont calculés à partir des conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q_0} \end{cases} \qquad \text{(II.4)}$$

L'amplitude des oscillations d'un oscillateur harmonique libre ne dépend pas du temps.
De telles oscillations sont dites non amorties.

II.4 L'énergie cinétique et l'énergie potentielle

II.4.1 L'énergie cinétique E_c :

L'énergie cinétique est une notion fondamentale en physique, en particulier en dynamique. Comme toute énergie, l'énergie cinétique s'exprime en joules (J).
L'énergie cinétique d'un système est la somme des énergies cinétiques des corps qui le composent. On distingue deux formes d'énergie cinétique :

- l'énergie cinétique de translation ;
- l'énergie cinétique de rotation.

Dans le cas d'un corps en translation, de masse m et de vitesse v, l'énergie cinétique E_c est proportionnelle à la masse du corps et au carré de sa vitesse, soit la relation :

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad \text{(II.5)}$$

Dans le cas d'un corps en rotation, l'énergie cinétique est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, selon la relation :

$$E_c = \frac{1}{2}I_{/\Delta}\dot{\theta}^2 \qquad \text{(II.6)}$$

Où $I_{/\Delta}$ représente le moment d'inertie du système.

II.4.2 L'énergie potentielle E_p :

L'énergie potentielle est une notion fondamentale en physique, en particulier en dynamique. Comme toute énergie, l'énergie potentielle s'exprime en joules (J).À chaque type d'interaction correspond une énergie potentielle particulière : de pesanteur, électrique, élastique, etc.

II.4.2.1 Énergie potentielle de pesanteur :

L'énergie potentielle de pesanteur est proportionnelle à l'altitude h du corps et à l'intensité g du champ de pesanteur considéré. Elle se note E_p et est exprimée en joules (J). Cette énergie est définie par rapport à une position choisie arbitrairement servant de référence, en général :

$$E_p = mgh \qquad \text{(II.7)}$$

avec m en kilogrammes (kg), g en newtons par kilogramme ($N.kg^{-1}$) et h en mètres (m).

II.4.2.2 Énergie potentielle électrique :

Une particule chargée placée dans un champ électrique possède une énergie potentielle électrique, notée E_{pe}. Cette énergie dépend de la charge q de la particule et du potentiel électrique V du point où se trouve la particule :

$$E_p = q.V \qquad \text{(II.8)}$$

avec q en coulombs (C) et V en volts (V).

II.4.2.3 Énergie potentielle élastique :

L'énergie potentielle élastique est l'énergie potentielle emmagasinée dans un corps élastique lorsque ce dernier est compressé ou étiré par rapport à sa position naturelle. Lorsque la force comprimant ou étirant le corps élastique cesse, celui-ci tend naturellement à retourner à sa position naturelle et transforme ainsi son énergie potentielle en énergie cinétique.

Dans le cas classique d'un ressort, l'énergie potentielle élastique E_p dépend de l'allongement ou du raccourcissement du ressort, noté x, et de la constante de raideur K du ressort selon la relation :

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \text{(II.9)}$$

Avec K en newtons par mètre $(N.m^{-1})$ et x en mètres (m).

II.5 Conditions d'équilibre

Deux conditions définissent le mouvement vibratoire :

- La condition d'équilibre : $\left.\frac{\partial E_p}{\partial q}\right|_{q=0} = 0$
- La condition de stabilité est donnée par : $\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\right|_{q=0} > 0$

La figure II.1 montre la variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x. Dans un mouvement vibratoire, l'énergie totale est constante. L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle. Quand l'énergie cinétique diminue, l'énergie potentielle augmente et vis versa. Cette propriété est appelée conservation de l'énergie totale du système.

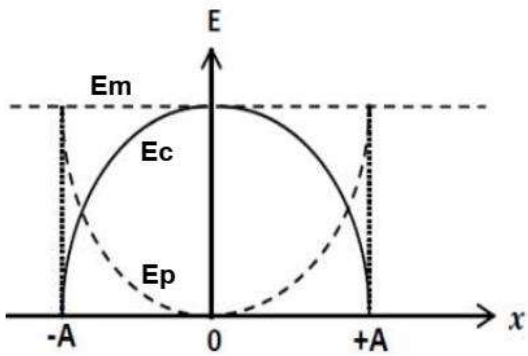


Figure. II.1 : Variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x

L'énergie totale du système est égale à une constante. Elle est proportionnelle au carré de l'amplitude et de la fréquence de l'oscillation.

$$E_m = E_c + E_p \qquad \text{(II.10)}$$

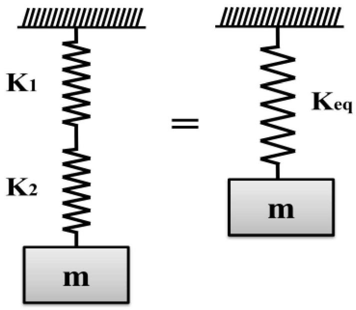
II.6 Systèmes équivalents

C'est un système simple qu'on représente en générale par un ressort équivalent ou une masse équivalente.

II.6.1 Ressorts équivalents : On a deux cas :

II.6.1.1 Ressorts en série

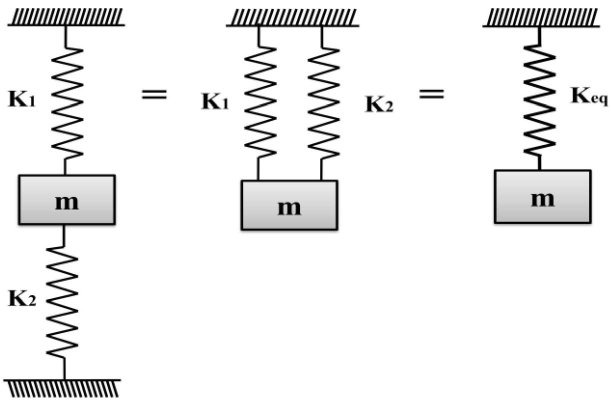
La constante de ressort équivalent $\mathbf{K_{eq}}$:



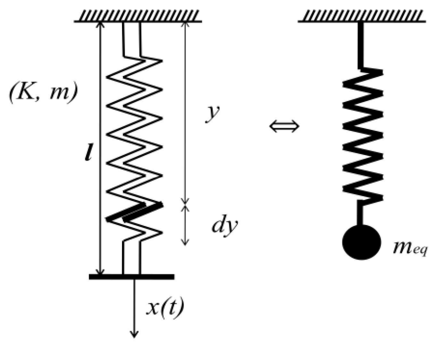
II.6.1.2 Ressorts en parallèle et solide intercalé entre deux ressorts

La constante de ressort équivalent $\mathbf{K_{eq}}$:

$K_{eq} = K_1 + K_2$



II.6.2 Cas d'un ressort de masse non négligeable.



m : La masse du ressort.

Au repos :

- l : La longueur du ressort.
- dm : masse élémentaire située à une distance y du point de suspension.

En mouvement :

- $x(t)$: Déplacement instantané de l'extrémité mobile du ressort.

- $dy = \frac{y}{l}x(t)$: Déplacement de la masse élémentaire
  $sa\ vitesse = \frac{y}{l}\dot{x}(t)$

-La masse linéique du ressort à une distance l: $\overline{\rho} = \frac{m}{l} \Rightarrow m = \overline{\rho} l$

-La masse de l'élément dy du ressort : $m_s = \overline{\rho} dy = \frac{m}{l}dy$

⇒L'énergie cinétique= $\sum$ tous les énergies de ses éléments

$$\Rightarrow E_c = \int \frac{1}{2}\left(\frac{m}{l}dy\right) \times \left(\frac{y}{l}\dot{x}(t)^2\right)$$

$$E_c = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{m}{l^3}\dot{x}(t)^2 y^2 dy = \frac{1}{2}\frac{m}{l^3}\dot{x}(t)^2 . \frac{y^3}{3}\Big|_0^l$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{3}\right)\dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}(t)^2, \qquad m_{eq} = \frac{m}{3}$$

II.7 Moments d'inertie des solides réguliers

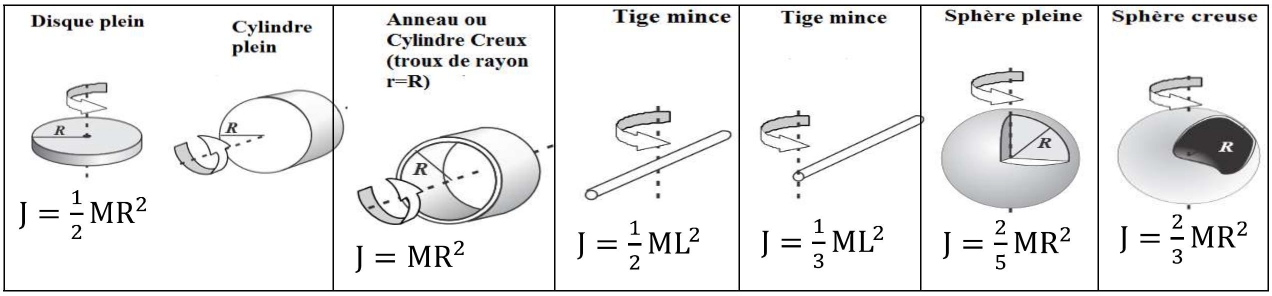


Figure. II.2 : Moments d'inertie des solides

- Le moment d'inertie d'une tige de masse M de longueur L autour de centre de gravité G est $J = \frac{1}{12}ML^2$

- Le moment d'inertie d'un disque de masse M de rayon R autour de centre de gravité G

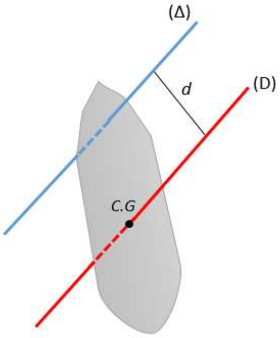
est $J = \frac{1}{2}MR^2$

-Théorème des axes parallèles (Huygens) : Le moment d'inertie d'un solide par rapport à l'axe de rotation (Δ) parallèle à l'axe (D) passant par le centre de gravité (C.G) :

$$J_{(\Delta)} = J_{(D)}(C.G) + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Md^2$$

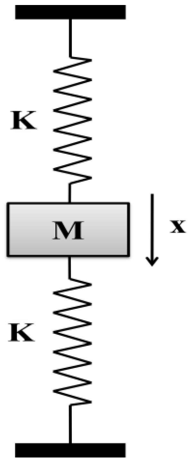
$J_{(D)}(C.G)$: le moment d'inertie de l'objet par rapport à l'axe (D) passant par (C.G).

d : la distance entre l'axe de rotation (Δ) parallèle à l'axe (D) passant par (C.G).



II.8 Exercices résolus

Exercice N°1



Soit un système modélisé par une masse M et deux ressorts de raideur K.

(Voir le schéma ci-contre).

Valeurs numériques : M=0.5 kg, K=100 N/m.

1- Quelle est le type du système ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p.

3- Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de x.

4- Donner la solution finale si : $x(0) = 1\ cm\ ; \dot{x}(0) = 0$.

5- Calculer l'énergie totale.

Solution N°1

1- Le type du système : Système libre à 1 ddl.

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p :

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(K)} = \frac{1}{2}K\,x^2 + \frac{1}{2}K\,x^2 = K\,x^2$$

$$L = E_c - E_P$$

3- L'équation du mouvement:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{x}}\right) + \frac{dE_p}{dx} = 0$$

$$\frac{dE_c}{d\dot{x}} = M\dot{x}\ \ ;\ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{x}}\right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{dE_p}{dx} = 2Kx$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$M\ddot{x} + 2kx = 0\ \Rightarrow\ \ddot{x} + \frac{2k}{M}x = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0$

la pulsation propre :$\omega_0^2 = \frac{2K}{M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{200}{0.5}} = 20\ \mathrm{rad.s^{-1}}$

La période propre T_0 **:** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{200}} = 0{,}314\ \mathrm{s}$

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{0.5}} = 3{,}184\ \mathrm{Hz}$

4-la solution finale est :

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0 \\ x(0) = A = 1\ \mathrm{cm} = 0.01\mathrm{m} \end{cases}$$

Alors : $x(t) = 0{,}01\cos(\omega_0 t)\ \mathrm{m} \Rightarrow x(t) = 0{,}01\cos(20t)\ \mathrm{m}$

5- Energie Totale :

$E(t) = E_c(t) + E_p(t)$

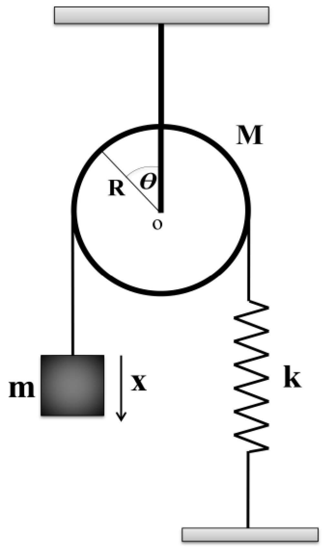
$E(t) = E(0) = E_c(0) + E_p(0) = \frac{1}{2} M\,\dot{x}^2(0) + K\,x^2(0) = K.A^2 = 100 \times (0.01)^2$

$E(t) = 0.01\ \mathrm{J}$

Exercice N°2

Une poulie homogène de masse $M = 2\ \mathrm{kg}$ et de rayon $R = 0.2\mathrm{m}$.

On note : $I_{/o} = J_{/o} = \frac{1}{2} MR^2$, le moment d'inertie de la poulie.



La poulie est suspendue par une corde inextensible a un bâti fixe. Aux Extrémités de la poulie sont fixés un ressort de raideur $k = 60\ \mathrm{N/m}$, et une masse $m = 0.5\ \mathrm{kg}$ par un fil inextensible de masse négligeable. On néglige aussi la masse du ressort et le frottement autour de l'axe de la poulie. Si x est le déplacement vertical de la masse m.

1- Donner l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système

en fonction de θ.

2- Trouver le lagrangien L et déduire l'équation du mouvement.

3- Trouver la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0.

4- Trouver la solution finale en prenant comme conditions initiales : $\theta(0) = \frac{\pi}{25}$; $\dot{\theta}(0) = 0$.

<u>Solution N°2</u>

1- l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p :

$$E_c = E_M + E_m$$

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \text{ , avec } x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta}^2$$

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow E_P = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

2- Fonction de Lagrange :

$$L = E_c - E_P$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kR^2\theta^2$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kR^2\theta$$

Donc : $\left(\frac{M}{2} + m\right)R^2\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2k}{M+2m}\theta = 0$

3- la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0 :

La pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{2K}{M+2m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M+2m}} = \sqrt{\frac{120}{3}} = 6{,}324 \text{ rad.s}^{-1}$

La période propre T_0 **:** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M+2m}{2K}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{120}} = 0{,}992 \text{ s}$

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{M+2m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{120}{3}} = 1{,}007 \text{ Hz}$

4-la solution finale est :

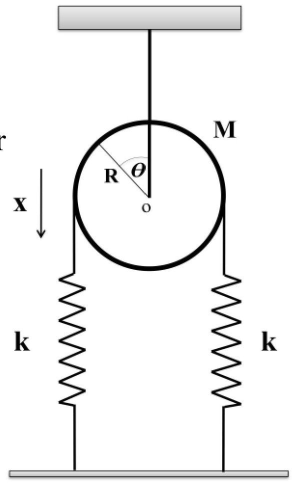
$$\theta(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = A\omega_0 cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = A\omega_0 cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta(0) = A\sin(\varphi) = \dfrac{\pi}{25} \Longrightarrow A\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{25} \Longrightarrow A = \dfrac{\pi}{25} \end{cases}$$

Donc :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{25}\ \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \theta(t) = \frac{\pi}{25}\ \sin\left(6{,}324t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Exercice N°3



Soit une poulie (cylindre creux) de masse M et de rayon R peut tourner librement autour de son axe fixe. La poulie est suspendue en son centre par une corde inextensible a un bâti fixe. De part et d'autre de la poulie on fixe sur sa périphérie deux ressorts de même raideur k. les deux ressorts ont leur autre extrémité reliée au sol. On donne le moment d'inertie $J_{cylindre/O} = MR^2$.

Valeurs numériques : M=1 kg, K=50 N/m, R=0.2 m

1- Quelle est le type du système ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p.

3- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ.

4- Trouver la solution finale en prenant comme conditions initiales: $\theta(0) = 0$; $\dot{\theta}(0) = 5\omega_0$.

5- Calculer l'énergie totale

Solution N°3

1- Le type du système : Système libre à 1 ddl.

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p :

$$E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

$E_P = E_{P(K)} + E_{P(K)} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\,x^2 = k\,x^2 \quad , x = R\theta$

$E_P = kR^2\theta^2$

$L = E_c - E_P$

3- L'équation de Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \ ou \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{dE_c}{d\dot{\theta}} = MR^2\dot{\theta} \ ; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{\theta}}\right) = MR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{dE_P}{d\theta} = 2KR^2\theta$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$MR^2\ddot{\theta} + 2kR^2\theta = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{\theta} + \frac{2k}{M}\theta = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

la pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{2K}{M} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$

La période propre T_0 **:** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{2K}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{100}} = 0{,}628 \text{ s}$

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{100}{1}} = 1{,}592 \text{ Hz}$

4-la solution finale est :

$$\begin{cases} \theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{\theta}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta(0) = 0 \Rightarrow A\sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \sin(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0 \\ \dot{\theta}(0) = A\omega_0\cos(\varphi) = 5\omega_0 \Rightarrow A = \dfrac{5}{\cos(\varphi)} = \dfrac{5}{\cos(0)} = 5 \end{cases}$$

Donc : $\theta(t) = 5\sin(10t)$ m

5- Energie Totale :

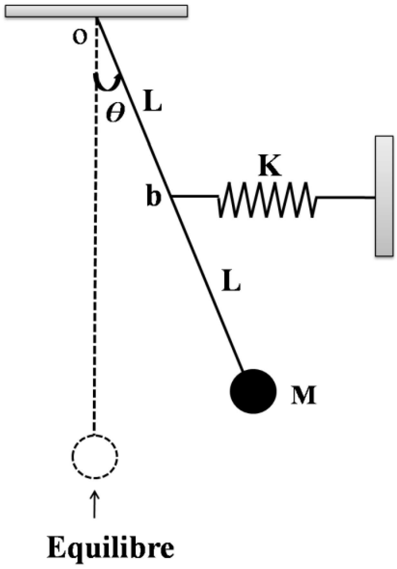
$E(t) = E_c(t) + E_p(t)$

$$E(t) = E(0) = E_c(0) + E_p(0) = \frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2(0) + kR^2\theta^2(0) = \frac{1}{2}MR^2(5\omega_0)^2$$
$$= \frac{1}{2}(1 \times (0.2)^2) \times (0.01)^2 = 2 \times 10^{-6}\text{J}$$

Exercice N°4

On considère le système mécanique représenté à la figure ci-contre. La tige de masse négligeable et de longueur 2L

La tige effectue des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe fixe passant par le point O. Le milieu de la tige (point b) est relié à un bâti par un ressort de raideur K et son extrémité libre porte une masse M.



1- Quel est le nombre de degré de liberté du système étudier.

2- Trouver l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système (pour la variable θ).

3- En déduire l'équation différentielle du mouvement de ce système, utiliser la variable θ, et préciser sa fréquence propre f_0.

4- La solution de l'équation différentielle est de la forme : $\theta(t) = Asin(\omega_0 t + \varphi)$.

Déterminer l'amplitude A et la phase initiale φ si à l'instant $t = 0$,

$\theta(0) = \frac{\pi}{20}$; $\dot{\theta}(0) = 0$

Solution N°4

1- Le nombre de degré de liberté du système :

Le système oscille à un degré de liberté car il y a une seule variable indépendante qui caractérise le mouvement.

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p (variable θ):

$$E_C = E_{CM} = \frac{1}{2} J_M \dot{\theta}^2, \ J_M = M(2L)^2 = 4ML^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}(4ML^2)\dot{\theta}^2 \Rightarrow E_c = 2ML^2\dot{\theta}^2$$

$$E_P = E_{P(M)} + E_{P(K)}$$

$$E_p = Mgh + \frac{1}{2}Kx^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$

$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\,\theta$

$$h = 2L(1-\cos\theta) \Rightarrow h = 2L\left(1-1+\frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = L\theta^2$$

$$E_p = Mgh + \frac{1}{2}KL^2\theta^2$$

$$E_p = MgL\theta^2 + \frac{1}{2}KL^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(2MgL+KL^2)\theta^2$$

3- L'équation différentielle du mouvement et la fréquence propre :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0\ ou\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{dE_c}{d\dot{\theta}} = 4ML^2\dot{\theta}\ ;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{dE_c}{d\dot{\theta}}\right) = 4ML^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = (2MgL+KL^2)\theta$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$4ML^2\ddot{\theta} + (2MgL+KL^2)\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(2MgL+KL^2)}{4ML^2}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g}{2L}+\frac{K}{4M}\right)\theta = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$

$$\omega_0^2 = \left(\frac{g}{2L}+\frac{K}{4M}\right) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{g}{2L}+\frac{K}{4M}\right)}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{g}{2L}+\frac{K}{4M}\right)}$$

4- L'amplitude A et la phase φ :

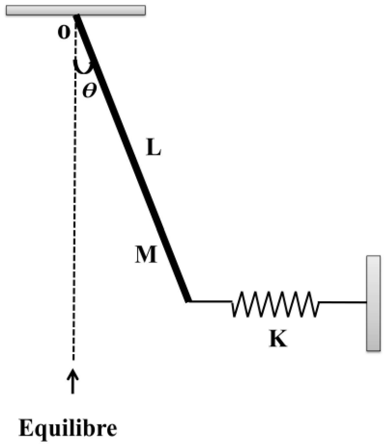
La solution de l'équation différentielle est :
$\theta(t) = Asin(\omega_0 t+\varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = A\omega_0 cos(\omega_0 t+\varphi)$

$$\begin{cases} \dot\theta(0) = 0 \Rightarrow A\omega_0 cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta(0) = \dfrac{\pi}{20} \Rightarrow A\sin(\varphi) = \dfrac{\pi}{20} \Longrightarrow \mathrm{A}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{20} \Longrightarrow \mathrm{A} = \dfrac{\pi}{20} \end{cases}$$

Les conditions donnent : $\mathrm{A} = \frac{\pi}{20}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$

<u>Exercice N°5</u>

Un système mécanique est constitué une barre de masse M et de longueur L oscille autour de l'articulation O dans le plan de la figure. A l'extrémité de cette barre, on place un ressort de constante de raideur K. A l'équilibre, la barre est verticale et le ressort de raideur K est au repos.



1- Donner le moment d'inertie du système (en utilisant le Théorème de Huygens).

2- Donner l'expression l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système dans le cas des faibles oscillations (pour variable θ).

3- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ.

4- Trouver la solution finale en prenant comme conditions initiales: $\theta(0) = \frac{\pi}{22}$; $\dot\theta(0) = 0$.

<u>Solution N°5</u>

1- Le moment d'inertie total J_M :

$$J_M = J_{M/CG} + J_{M/O}$$

$$J_M = \frac{ML^2}{12} + ML^2 \Rightarrow J_M = \frac{13ML^2}{12}$$

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p (variable θ):

$$\mathrm{E_C} = \frac{1}{2}\mathrm{J_M}\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{13ML^2}{12}\right)\dot\theta^2$$

$$\mathrm{E_P} = \mathrm{E_{P(M)}} + \mathrm{E_{P(K)}}$$

$$\mathrm{E_p} = \mathrm{Mgh} + \frac{1}{2}\mathrm{Kx}^2$$

Faibles oscillations $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\theta$

$$h = L(1-\cos\theta) \Rightarrow h = L\left(1-1+\frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{L\theta^2}{2}$$

$$E_p = Mg\frac{L\theta^2}{2} + \frac{1}{2}KL^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(MgL + KL^2)\theta^2$$

Fonction de Lagrange :

$$L = E_c - E_P$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{13ML^2}{12}\right)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(MgL + KL^2)\theta^2$$

3- l'équation différentielle du mouvement en fonction de θ :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{13ML^2}{12}\right)\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{13ML^2}{12}\right)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -(MgL + KL^2)\theta$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\left(\frac{13ML^2}{12}\right)\ddot{\theta} + (MgL + KL^2)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{12g}{13L} + \frac{12K}{13M}\right)\theta = 0$$

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$

la pulsation propre : $\omega_0^2 = \left(\frac{12g}{13L} + \frac{12K}{13M}\right) \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{12g}{13L} + \frac{12K}{13M}\right)}$

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{12g}{13L} + \frac{12K}{13M}\right)}$

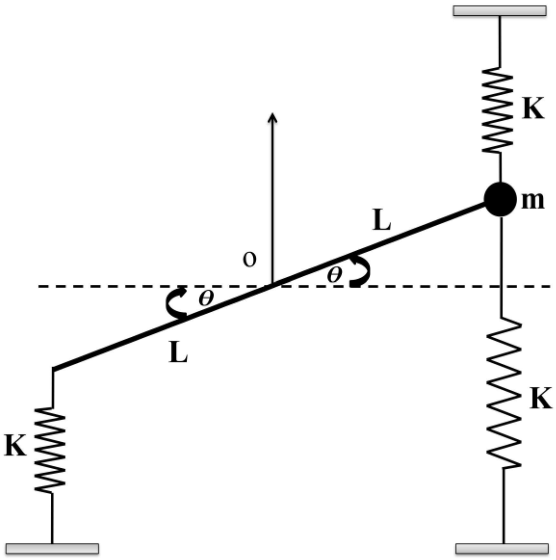
4-la solution finale est :

$$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = A\omega_0\cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta(0) = A\sin(\varphi) = \dfrac{\pi}{22} \Longrightarrow A\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{22} \Longrightarrow A = \dfrac{\pi}{22} \end{cases}$$

Donc : $\theta(t) = \frac{\pi}{22} \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

Exercice N°6



Pour le système mécanique de la figure ci-contre, on considère une barre de masse négligeable de longueur 2L. Sur ses extrémités sont fixés une masse m, et des ressorts de constante K.

La position d'équilibre correspond à $\theta(0) = 0$.

1- Quelle est le type du système ?

2- Déterminer l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système (pour la variable θ).

3- Etablir l'équation différentielle du mouvement libre pour de oscillations de faibles amplitudes.

4- Trouver la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0.

6- Trouver la solution $\theta(t)$.

Solution N°6

1-Le type du système : Système libre à 1 ddl

2- L'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p :

$$E_C = E_{CRot} = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2,\ J_m = m(L)^2 = mL^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\ mL^2\dot{\theta}^2$$

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(K)} + E_{P(K)}$$

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta$

$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\theta$

$$E_p = \frac{1}{2}K(L\theta)^2 + \frac{1}{2}K(L\theta)^2 + \frac{1}{2}K(L\theta)^2$$

$$E_p = \frac{3}{2}KL^2\theta^2$$

Le Lagrangien:

$$L = E_c - E_P \Rightarrow L = \frac{1}{2}\,mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{3}{2}KL^2\theta^2$$

3- L'équation différentielle du mouvement en fonction de θ :

Formalise de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = mL^2\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{3}{4}KL^2\theta$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$mL^2\ddot{\theta} + \frac{3}{4}KL^2\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3K}{4m}\theta = 0$$

4- la pulsation propre ω_0, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0 :

L'équation différentielle du mouvement est de la forme : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$

la pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{3K}{4m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{3K}{4m}}$

La période propre T_0 **:** $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{3K}}$

La fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3K}{4m}}$

5- Ecriture de la solution $\theta(t)$:

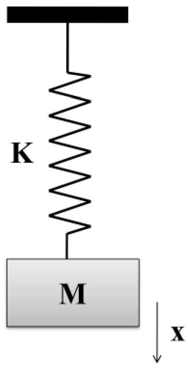
$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$ Système libre non amorti donc la solution est de la forme :

$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$.

II.9 Exercices supplémentaires

Exercice N°1

Un système mécanique est constitué d'un ressort de constante de raideur k relié à une masse ponctuelle M, oscille autour de sa position d'équilibre.



Données numériques : $M = 0,2\ \mathrm{kg}$, $K = 6\ \mathrm{N.m^{-1}}$

1- Déterminer l'énergie cinétique et potentielle du système.

2- Déduire le lagrangien.

3- Donner l'équation de mouvement et sa solution.

4- Calculer la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$, la période propre T_0 et la fréquence propre f_0.

5- Donner la solution finale si : $x(0) = 3\ \mathrm{mm}$; $\dot{x}(0) = 0$.

6- Calculer l'énergie totale de l'oscillateur harmonique. Conclure

Exercice N°2

Dans la figure ci-dessous, un système mécanique constitue d'une masse M=0.5 kg, d'un ensemble de ressorts.

On donne : $k = 60\mathrm{N/m}$.

1- Simplifier le schéma en calculant le ressort équivalent

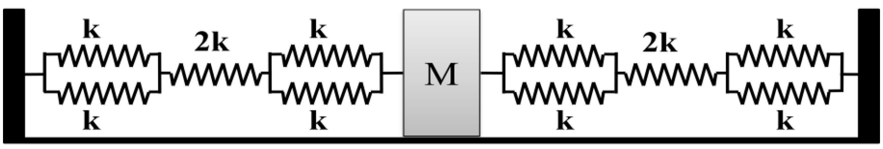
2- Trouver l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p.

3- Donner l'équation de mouvement et sa solution.

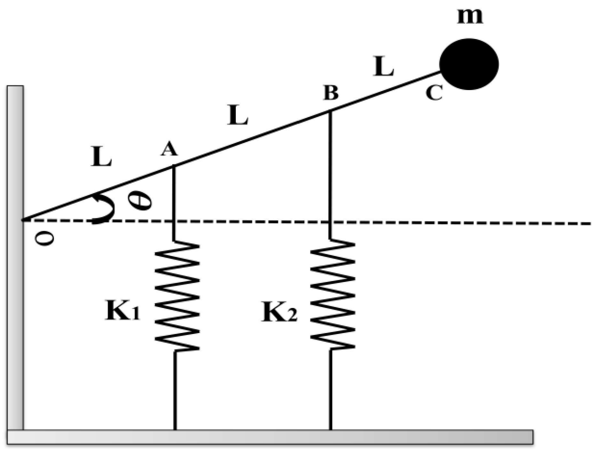
4- Calculer la pulsation propre $\boldsymbol{\omega_0}$, la période propre $\mathbf{T_0}$ et la fréquence propre $\boldsymbol{f_0}$.

5- Donner la solution finale si : $x(0) = 2\ \mathrm{cm}$; $\dot{x}(0) = 0$.

6- Calculer l'énergie totale.



Exercice N°3



Un système mécanique est constitué une tige de longueur 3L de masse négligeable est articulée O et porte à son extrémité C une masse m (Voir le schéma ci-contre). Deux ressorts de raideur K_1 et K_2 sont liés à la tige aux points A et B respectivement.

A l'équilibre, la tige est horizontale et elle est écartée d'un angle θ supposé très petit (les faibles oscillations).

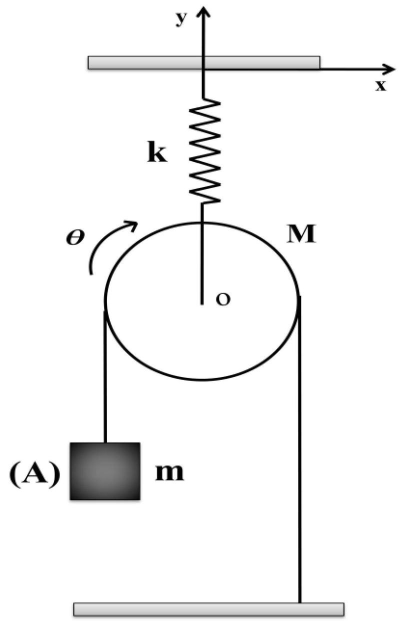
1- Calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.

2- Déduire le lagrangien.

3- Etablir l'équation du mouvement.

4- Trouver la solution θ(t) si $\theta(0) = \frac{\pi}{20}$; $\dot{\theta}(0) = 0$.

Exercice N°4



Un masse M (assimilable à un point matériel A) est suspendue à un fil passant par une poulie de masse m, de rayon R.

On note $J_{/o} = \frac{1}{2}MR^2$ le moment d'inertie de la poulie par rapport A l'axe Oy passant par O et perpendiculaire au plan de la poulie.

On admettra que le fil ne glisse pas sur la poulie.

La poulie est suspendue par son centre `a un ressort de constante de raideur k, et de longueur à vide l_0. On néglige les frottements. On appelle z et Z, respectivement, l'écarts de la masse M et de la poulie par rapport à leur position d'équilibre.

1- Donner l'énergie mécanique et l'énergie du système en fonction de z et de $\dot{z}$ (on n'explicitera pas l_e, longueur à l'équilibre du ressort).

2- Déterminer l'équation du mouvement.

3- Donner la période des petites oscillations de la masse autour de sa position d'équilibre.

Exercice N°5

Soit une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur $2\mathrm{L}$.

(Voir le schéma ci-dessous). La tige effectuée des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe O et perpendiculaire au plan du mouvement. Le point b de la tige, tel que $\mathrm{Ob} = \mathrm{L}$, est relié à deux bâtis fixes A_1 et A_2 respectivement par deux ressorts de raideur K_1 et K_2.

A l'équilibre, la tige est verticale.

1- Sachant qu'à l'équilibre, les deux ressorts ne sont pas déformés, établir l'équation différentielle du mouvement du système.

2- Si m, K_1,K_2 et L sont donnés, quelle condition doit satisfaire la longueur a pour que le système puisse osciller ?

3- Cette condition étant satisfaite, déterminer l'expression de la pulpation propre du système.