Chapitre I :

Généralités sur les Vibrations et les équations de Lagrange

I.1 Définitions

I.1.1 Définition d'une oscillation (Vibration)

La vibration est un phénomène physique oscillatoire d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre.

I.1.2 Mouvement périodique :

Un mouvement périodique c'est un mouvement qui se répète et dont chaque cycle se reproduit identiquement. La durée d'un cycle est appelée période T qui s'exprime en seconde (s).

- Le nombre de répétition par seconde est appelé fréquence (notée f, mesurée en (Hertz) ou (s^{-1})). Elle est reliée à la période par :

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{(I.1)}$$

- Le nombre de tours par seconde est appelé pulsation (notée ω, mesurée en rad/s.)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(I.2)}$$

Mathématiquement, le mouvement périodique de période T est défini par : $x(t + T) = x(t)$.

I.I.3 Mouvement vibratoire :

Un mouvement vibratoire est un mouvement périodique se produisant de part est d'autre d'une position d'équilibre.

I.1.4 Mouvement sinusoïdale :

Un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si l'élongation x (y ou z) d'un point vibrant est une fonction sinusoïdale simple du temps de type :

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \text{ Ou bien } x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$x(t)$ est appelée l'élongation (ou la position) à l'instant t.

A : l'amplitude d'un mouvement ou L'élongation maximale.

ω: La pulsation du mouvement et exprimée en $(rad\ /s)$.

φ : la phase initiale, correspond à la phase à l'instant $t = 0$

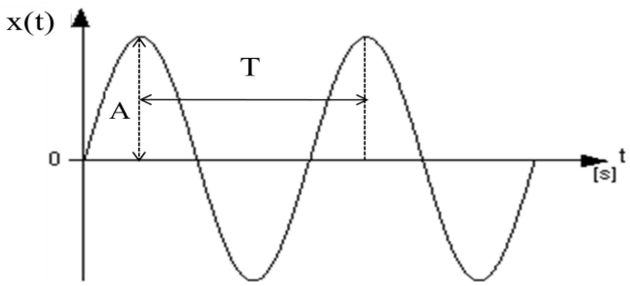


Figure I.1 Exemple d'un mouvement périodique sinusoïdal

Exemple : Sur la figure I.1 considérons un mouvement vibratoire sinusoïdal de la forme :

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, de période T= 1s et d'amplitude 1cm.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6.28}{1} = 6.28 \text{ rad.s}^{-1}$$

$A = 1 \Rightarrow x(t) = \cos(2\pi t + \varphi)$.

À $t = 0 \Rightarrow x(0) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x(t) = \cos(2\pi t + \frac{\pi}{2})$ (cm)

I.1.5 Mouvement Oscillatoire :

Un système oscillant est caractérisé par des mouvements périodiques au voisinage d'une position d'équilibre sous l'effet d'une perturbation extérieure. Lorsque le mouvement est sinusoïdal, l'oscillateur est dit harmonique.

On distingue deux types de types de vibrations (oscillations) :

- Les oscillations mécaniques (pendule simple, corde vibrante, …)
- Les oscillations électromagnétiques (Lumière, ondes radio, …)

I.2 Coordonnées généralisées d'un système physique

I.2.1 Coordonnées généralisées :

Les coordonnées généralisées sont tout ensemble de variables permettant de spécifier l'état d'un système physique. Les coordonnées généralisées ne sont pas toujours supposées indépendantes, et leur intérêt, par rapport aux seules coordonnées cartésiennes, est de pouvoir choisir les coordonnées les plus adaptées pour représenter le système, en tenant compte de ses contraintes.

Exemple : dans le cas d'un pendule, il est avantageux d'utiliser l'angle du pendule parmi les coordonnées généralisées.

Les coordonnées généralisées sont au nombre de n ≤3N, où N est le nombre de points permettant de décrire le système et sont souvent notées : $q_1(t)$, $q_2(t)$ … … … $q_N(t)$.

I.2.2 Degré de liberté :

On appel degré de liberté (ddl) d'un système, la capacité de ce système d'effectuer le mouvement de translation et de rotation par rapport aux axes. Où, le nombre de coordonnées généralisées liées, pour configurer tous les éléments du système à tout instant moins (-) le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles : $d = N - r$.

d: Degré de liberté.
N **:** Nombre de coordonnées généralisées.
r **:** Nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles.

- **Exemple :**

Un cylindre homogène de masse M et de rayon R, roule sans glisser sur une plate-forme horizontale.

On a deux coordonnées généralisées x et θ donc : $N = 2$.

x et θ sont liées avec une relation: $x = r\theta$ donc : $r = 1$.

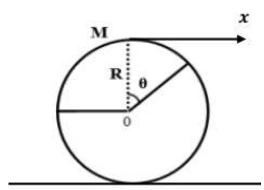


Figure I.2 : cylindre

Donc : le nombre de degrés de liberté $d = N - r = 1$.

Il est possible aussi de déterminer le degré de liberté DDL par la relation suivante : DDL= [nombre de coordonnée générales]-[coordonnée = 0 ou Cst]. Nous pouvons citer quelques exemples :

- **Exemple : Particule en chute libre :**

Sur les trois coordonnées x, y, z

Nombre de coordonnée générales : 03.

On a deux coordonnées constantes : y et z.

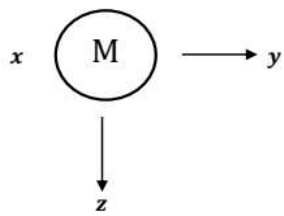


Figure I.3 : Particule

DDL= 3-2 =1.

I.3 Choix de la méthode

Le choix de la méthode de calcul à utiliser pour en aboutir à l'équation du mouvement (EDM), on distingue :

- L'équation de Newton.
- L'équation de Lagrange.

I.3.1 Equation de Newton :

Ce formalisme est basé sur le principe fondamental de la dynamique il est appliqué selon le cas de figure du mouvement à savoir : translation ou bien rotation.

I.3.1.1 Mouvement de translation :

Si un système de masse m est soumis à des forces extérieures, la loi fondamentale de la dynamique (L.F.D.) nous donne :

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{\gamma}_i = m\vec{a}_i \qquad (I.3)$$

I.3.1.1 Mouvement de rotation :

La Loi fondamentale de la dynamique d'un mouvement de rotation s'écrit :

$$\sum_i M_\Delta\left(\vec{F}_i\right) = J\,\ddot{\theta} = J\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (I.4)$$

- **Exemple : (Masse-ressort)**

Considérons une masse attachée à un ressort de constante de raideur K, appliquant un déplacement sur la masse dans la direction x

F : Force de rappel du ressort : $F = -Kx$

L'application du formalisme de newton (PFD) en translation conduit:

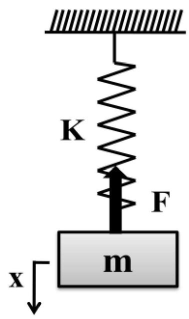


Figure I.4 : Masse-ressort

$$\sum \vec{F} = M\ddot{x} \;=>\; -Kx = M\ddot{x} \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \frac{K}{M}x = 0$$

De la forme : $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0 = 0 => \;\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

I.3.2 Equation de Lagrange :

La fonction de Lagrange (lagrangien du système) qui est la différence de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p :

$$L = E_c - E_P \qquad (I.5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{ext,q} \qquad (I.6)$$

avec :

q: est la coordonnée généralisée qui caractérise le mouvement vibratoire.

$F_{ext,q}$: Les forces extérieures généralisées.

I.3.2.1 Cas des systèmes conservatifs :

Pour un système conservatif, la force appliquée dérive d'un potentiel, l'équation de Lagrange des systèmes conservatifs en absences des forces dépendantes du temps (libres) et définis par une seule cordonnée généralisée (1DDL) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad (I.7)$$

Pour un mouvement unidimensionnel x (translation), l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad (I.8)$$

Pour un mouvement rotationnel θ (rotation), l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \qquad (I.9)$$

- L'énergie cinétique de translation Ec_{tran} d'une masse " m "et de vitesse " v " est :

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad (I.10)$$

- L'énergie cinétique de rotation Ec_{rot} d'un corps de moment d'inertie $I_{/\Delta}$ est :

$$E_c = \frac{1}{2}I_{/\Delta}\dot{\theta}^2 \qquad (I.11)$$

- L'énergie potentielle Ep d'une masse dans un champ gravitationnel :

$$E_p = mgh \qquad (I.12)$$

- L'énergie potentielle d'un ressort :

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 \qquad \text{(I.13)}$$

- **Exemple :**

Reprenons le même exemple déjà traité par le formalisme de Newton, par le formalisme de Lagrange (Masse-ressort).

$$E_c = \frac{1}{2}M\,\dot{x}^2$$

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}K\,x^2$$

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}M\,\dot{x}^2 - \frac{1}{2}K\,x^2$$

L'équation de Lagrange est donnée comme suit :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow M\ddot{x} + Kx = 0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{x}} + \frac{K}{M}x = 0$ de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$

Pulsation propre du système $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$

I.3.2.2 Cas des forces de frottement dépendant de la vitesse :

Dans le cas de présence des forces de frottement qui dépendent de la vitesse [Amortissement], l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \qquad \text{(I.14)}$$

D est la fonction de dissipation donnée par : $D = \frac{1}{2}\Gamma\dot{q}^2$

I.3.2.3 Cas d'une force extérieure dépendant du temps

Dans le cas d'une force extérieure dépendant du temps, l'équation de Lagrange s'écrit comme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q} \qquad \text{(I.15)}$$

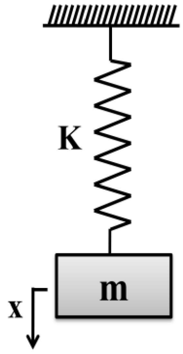
Et pour un système à plusieurs degrés de liberté, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q_i} \text{ , } i = 1,2 \dots . N \qquad (I.16)$$

I.4 Exercices corrigés sur les vibrations

Exercice N°1

Un mouvement vibratoire est caractérisé par le déplacement suivant :



$$x(t) = 10\cos(50t + \frac{\pi}{2})$$

Ou x en centimètres (cm), t en secondes (s) et la phase en radians (rad).

1- Déterminer l'amplitude maximale.

2- Donner la pulsation,

3- la fréquence et la période du mouvement.

4- Exprimer la phase initiale (déphasage à l'origine).

5- Calculer le déplacement x et la vitesse v a l'instant t=0s.

Solution N°1

L'équation $x(t) = 10\cos(50t + \frac{\pi}{2})$ De la forme $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ alors :

1- L'amplitude maximale est 5 cm. (A=5cm).

2- La pulsation est ω=50 rad.s^{-1}

3- La fréquence *f* : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{50}{2\pi}$ =7.98 Hz , la période $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{7.98}$ = 0.125 s.

4- La phase initiale :$\varphi = \frac{\pi}{2}$ rad.

5- Le déplacement, la vitesse :

$$\text{A t = 0 s, } x(0) = 10\cos\left(50(0) + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ m}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v(0) = \dot{x}(0) = -10 * 50\sin(50(0) + \frac{\pi}{2}) = -500 \text{ m/s}^2$$

Exercice N°2

Les oscillations harmoniques d'un point matériel sont décrites par l'équation :

$x(t) = 0.5\sin(25t + \frac{\pi}{4})$ (m)

1- Trouvez l'amplitude **A** et la pulsation **ω**.

2- Déterminer la fréquence **f**, la période du mouvement **T** et déphasage initiale **φ**.

Solution N°2

1- L'amplitude A= 0.5 (m), La pulsation est ω=25 rad.s^{-1}.

2- La fréquence f : $f=\frac{\omega}{2\pi} = \frac{25}{2\pi}$=3.98 Hz.

- La période $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.98} = 0.25$ s,

- La phase initiale :$\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad

Exercice N°3

Une particule vibre autour d'une position d'équilibre prise comme origine avec une fréquence de 100 Hz et une amplitude de 2 mm. Sachant que $v(0) = 0$. Ecrire l'équation horaire du mouvement sous la forme $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

Solution N°3

1- l'équation horaire :

- L'amplitude A= 2.10^{-3} (m)
- La pulsation $\omega = 2\pi f$, ω=628 rad.s^{-1}

a- L'équation horaire : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

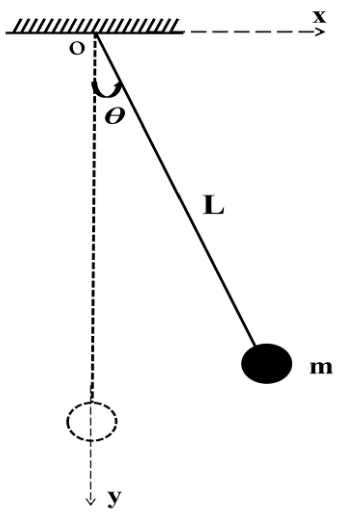
$$v(0) = \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow \sin(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

L'équation horaire demandée s'écrit : $x(t) = 2.10^{-3}\cos(628.t)$ m

b- L'équation horaire : $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

L'équation horaire demandée s'écrit : $x(t) = 2.10^{-3}\cos\left(628.t + \frac{\pi}{2}\right)$ m

Exercice N°4



1- Déterminer l'équation de mouvement d'un pendule simple de la Figure ci contre, constitué d'une masse m et fils de longueur L de masse négligeable pour des faibles oscillations par la méthode de Lagrange.

2- Quel est le nombre de degré de liberté. Justifier

Solution N°4

1- L'équation de Lagrange caractérisant le système est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0$$

Le lagrangien est donné par $L = E_c - E_P$

$$E_c = \frac{1}{2} I_{/\Delta} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_p = -mgh = -mgl\cos\theta$$

Pour les faibles oscillations $\sin\theta \approx \theta$ et

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

L'énergie potentielle s'écrit : $E_p = -mgh + mgl\frac{\theta^2}{2}$

Et le Lagrangien :

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgh + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

La pulsation propre du système $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

2- le nombre de degré de liberté :

On a trois coordonnées généralisées x, y et θ donc : $\boldsymbol{N} = 3$.

x et θ sont liées avec une relation: $x = L\cos\theta$

y et θ sont liées avec une relation: $y = l\sin\theta$

Donc $r = 2$.

Donc : le nombre de degrés de liberté $d = N - r = 1$.

Exercice N°5

Un oscillateur a pour équation réduite $\ddot{x} + 4\dot{x} + 16x = 0$.

Calculer sa pulsation propre ω_0, son coefficient d'amortissement δ, pseudo pulsation ω, sa pseudo-période T

Solution N°5

L'équation d'un oscillateur harmonique peut s'écrire sous la forme: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Par identification on trouve :

- La pulsation propre ω_0 : $\omega_0^2 = 16\, rad.s^{-1} \Rightarrow \omega_0 = 4\, rad.s^{-1}$
- le coefficient d'amortissement δ : $2\delta = 4 \Rightarrow \delta = 2s^{-1}$
- pseudo pulsation ω :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \Rightarrow \sqrt{16-4} = \sqrt{12}\, rad.s^{-1}$$

- le pseudo-période T:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{\sqrt{12}} = 1.815 \text{ s}$$

Exercice N°6

Un mouvement harmonique est décrit par : $x(t) = 10\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)t$, (x en (mm), t en secondes).

1- Déterminer la fréquence et la période du mouvement.

2- Déterminer l'amplitude du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

3- Le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants t=0 s et t=1,2 s

Solution N°6

$x(t) = 10\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)t$

1- La fréquence et la période du mouvement :

L'équation horaire : $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\omega = 2\pi f = \frac{\pi}{5} \Rightarrow f = \frac{1}{10} = 0.1\ \text{Hz}$$

la période du mouvement T :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.1} = 10\ s$$

2- l'amplitude du déplacement, de la vitesse et de l'accélération :

$x(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -A\omega sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow \ddot{x}(t) = -A\omega^2 cos(\omega_0 t + \varphi)$

$x(t) = 10\cos\frac{\pi}{5}t \Rightarrow \dot{x}(t) = -2\pi\sin\frac{\pi}{5}t \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\frac{10\pi^2}{25}\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)t$

-L'amplitude du déplacement A : $A = 10\ \text{mm}$

-L'amplitude du déplacement $\dot{x}_0$:

$\dot{x}_0 = -2\pi\ \text{mm.s}^{-1}$

-L'amplitude de l'accélération : $\ddot{x}_0$

$$\ddot{x}_0 = -10 \times \left(\frac{\pi}{5}\right)^2 = -3{,}943\text{mm/s}^2$$

3- Le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants t=0 s et t=1,2 s :

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 10\ \text{mm} \\ \dot{x}(0) = 0\ \text{mm.s}^{-1} \\ \ddot{x}(0) = -3{,}943\text{mm/s}^2 \end{cases}$$

$$\text{à } t = 1.2\ s \Rightarrow \begin{cases} x(1{,}2) = 7{,}29\ \text{mm} \\ \dot{x}(1{,}2) = 4{,}3\ \text{mm.s}^{-1} \\ \ddot{x}(1{,}2) = 1{,}23\text{mm/s}^2 \end{cases}$$

I.5 Exercices supplémentaires

Exercice N°1

Les oscillations harmoniques d'un point matériel sont décrites par l'équation :

$$x(t) = 0.2\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$$

Trouvez : l'amplitude A, la pulsation ω, la période T, la fréquence f et le déphasage initiale φ

Exercice N°2

Un mouvement harmonique est décrit par : $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Les conditions initiales sont : $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$

1- Calculer A et φ .

2- Exprimer $x(t)$ sous la forme $x(t) = B\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ et en déduire B et C.

Exercice N°3

Un système mécanique masse-ressort, oscille harmoniquement avec une amplitude $A = 2\text{cm}$, et une fréquence $f = 1\text{Hz}$. A l'instant $t = 0$, son déplacement est maximum. Sachant que la masse $m = 10$ kg.

Calculer l'énergie cinétique, potentielle et totale de cet oscillateur à l'instant $t = 2s$.

Exercice N°4

L'´equation d'un oscillateur harmonique peut s'´ecrire sous la forme:

$$\ddot{x} + 2\delta\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (*)$$

Si l'on considère que les solutions sont de la forme $x = e^{rt}$. Donner :

1- L'équation caractéristique.

2- Déterminer la solution de cette équation pour le cas $\Delta < 0$.

3- Dans le cas ou $\delta = 0$, déduire la solution de l'´equation (*).

Exercice N°5

On considère un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle de rayon R et de centre O contenu dans le plan XOY.

1- Traduire la liaison par une ou des relations mathématiques.

2- Quel est le nombre de degrés de liberté de ce point ?

3- quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour repérer ce point ?

Exercice N°6

On considère un point matériel astreint à se déplacer sur une sphère. Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent.

Exercice N°7

On considère un haltère constituée de deux masses identiques m, supposées ponctuelles, reliées par une tige de longueur L, de diamètre et de masses négligeables.

1- Comment s'écrit mathématiquement la liaison entre deux masses ?

2- Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ?

Exercice N°8

Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut repérer la position de trois points non alignés A, B et C de ce solide.

1- Traduire les liaisons physiques par des relations mathématiques; quel est le nombre de degrés de liberté de ce solide?

2- Quelles sont les coordonnées généralisées les plus couramment utilisées pour décrire le mouvement d'un solide?

Exercice N°9

Un oscillateur a pour équation réduite $\ddot{x} + 16\dot{x} + 64x = 0$.

1- Calculer sa pulsation propre ω_0, la fréquence propre f_0 et la période propre T_0.

2- Déterminer le coefficient d'amortissement δ

3- Déduire le pseudo- pulsation ω, pseudo période T

Exercice N°10

Dans les systèmes mécaniques représentés sur les figures ci-dessous, les positions d'équilibre sont représentées en pointillés.

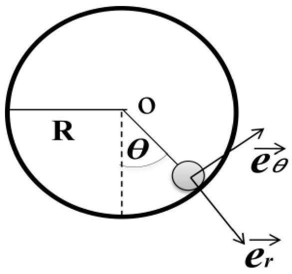


Figure (a)

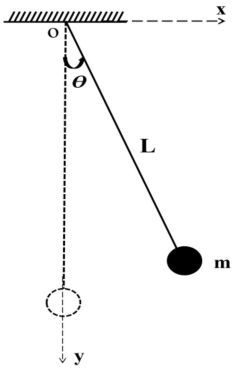


Figure (b)

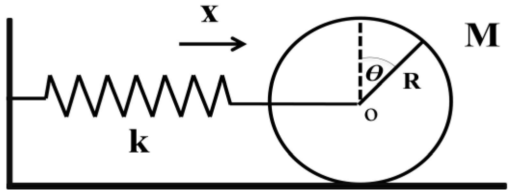
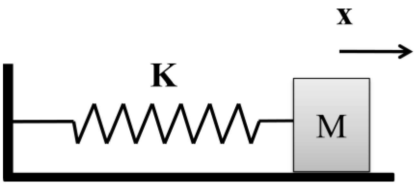


Figure (c)

1- Quel est le nombre de degré de liberté du point matériel dans chaque système.

2- Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour définir le mouvement de ce point.

Exercice N°11

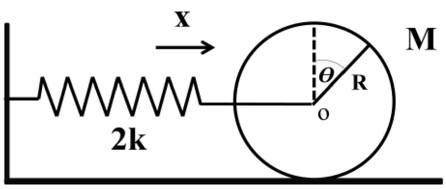


Un système mécanique est constitué d'un ressort de constante de raideur k relié à une masse ponctuelle m, oscille autour de sa position d'équilibre.

1- Quel est le nombre de degré de liberté. Justifier.

2- Retrouver l'équation différentielle du mouvement en appliquant les deux formalismes.

Exercice N°12



Un cylindre homogène de masse M et de rayon R, roule sans glisser sur une plate-forme horizontale. Le centre du cylindre est relié à un bâti par un ressort de raideur 2K (Voir le schéma ci-contre).

Rappel : le moment d'inertie du cylindre $J = \frac{1}{2}MR^2$

Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédent.