Chapitre V :

Oscillations des systèmes à plusieurs degrés de liberté

V.1 Introduction

On définit les systèmes à plusieurs degrés de libertés par les systèmes qui nécessitent plusieurs coordonnées indépendantes pour spécifier leurs. Le nombre de degré de liberté détermine les modes propres.

V.2 Systèmes libres à deux degrés de liberté

Les systèmes qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à deux degrés de liberté, les systèmes à deux degrés de liberté sont constitués de deux systèmes à un degré de liberté couplé.

V.2.1 Types de couplage

Il existe trois types de couplage : par élasticité, inertiel et visqueux.

V.2.1.1 Couplage Elastique :

Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par élasticité (un ressort). Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par capacité, ce qui est équivalent au couplage par élasticité.

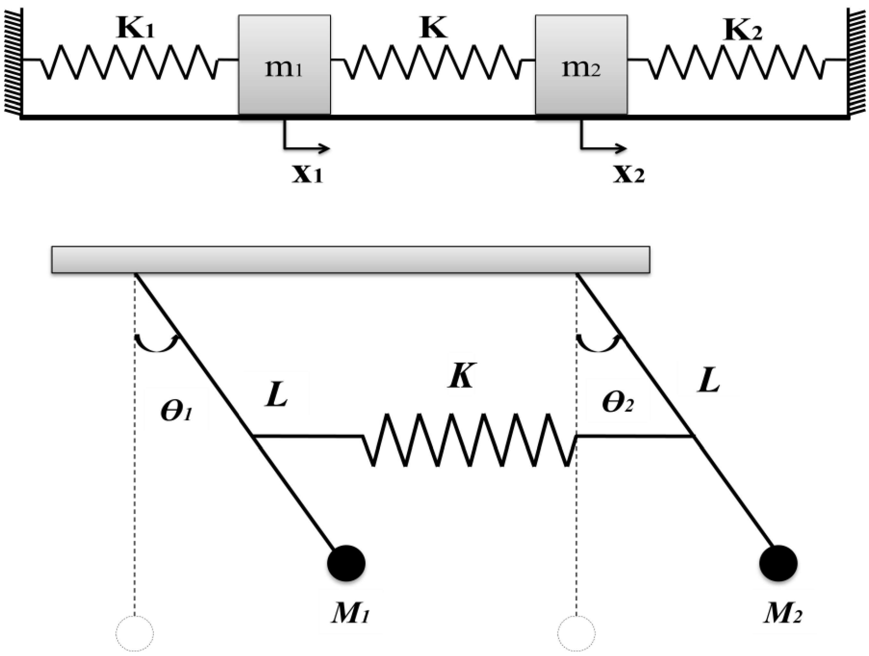


Figure V.1 Exemples des systèmes à 2 DDL couplés par élasticité

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases}\ddot{q}_1 + 2\delta\dot{q}_1 + \omega^2 q_1 = a_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta\dot{q}_2 + \omega^2 q_2 = a_2 q_1\end{cases} \qquad (V.1)$$

Tel que : a_1x_2 et a_2x_1 sont les termes de couplage. a_1 et a_2 sont des constantes.

V.2.1.2 Couplage Inertiel :

Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par inertie (une masse).

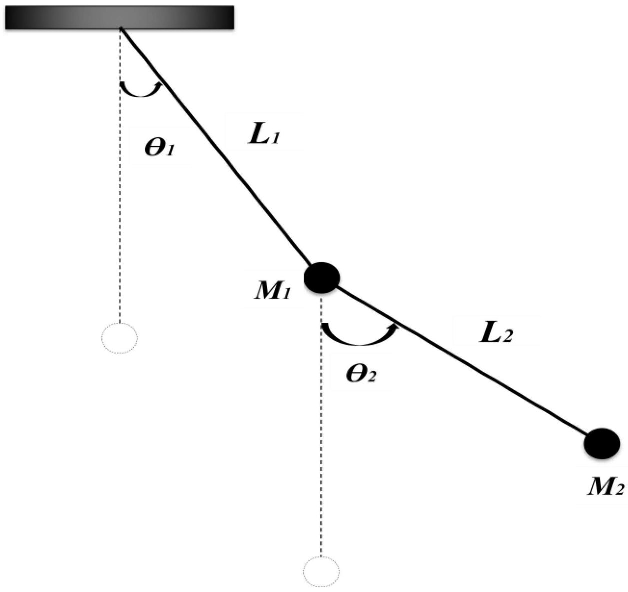


Figure V.2 Exemple d'un système à 2 DDL couplés par inertie

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases}\ddot{q}_1 + 2\delta\dot{q}_1 + \omega^2 q_1 = b_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta\dot{q}_2 + \omega^2 q_2 = b_2 q_1\end{cases} \qquad (V.2)$$

Tel que : b_1x_2 et b_2x_1 sont les termes de couplage. b_1 et b_2 sont des constantes.

V.2.1.3 Couplage Visqueux :

Le couplage dans les systèmes mécaniques est assuré par amortisseur. Dans les systèmes électriques, on trouve les circuits couplés par inductance, équivalents au couplage par inertie.

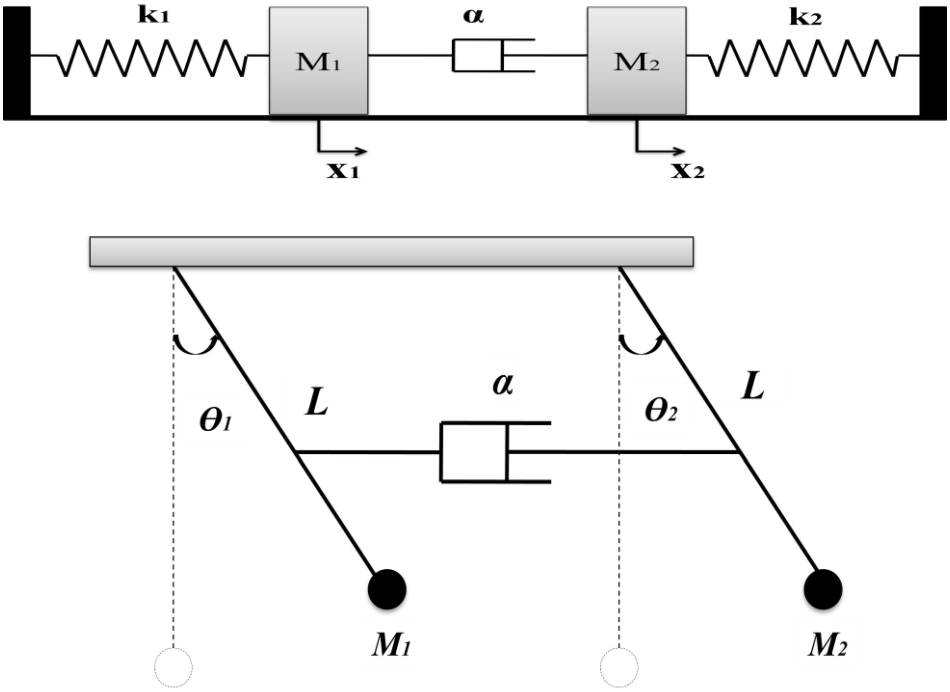


Figure V.3 Couplage visqueux des différents systèmes mécanique

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\delta\dot{q}_1 + \omega^2 q_1 = c_1 q_2 \\ \ddot{q}_2 + 2\delta\dot{q}_2 + \omega^2 q_2 = c_2 q_1 \end{cases} \qquad (V.3)$$

Tel que : c_1x_2 et $c_2x_1$sont les termes de couplage. $c_1$et $c_2$sont des constantes.

V.2.2 Equations différentielles du mouvement

Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial q_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial q_2}\right) = 0 \end{cases} \qquad (V.4)$$

q_1 et q_2 : les deux coordonnées généralisées qui caractérisent le système à deux degrés de liberté.

Le Lagrangien est :

$$L = E_c - E_P \qquad (V.5)$$

V.2.3 Méthode générale de résolution des équations de mouvement

Pour un système mécanique, la mise en équation du système couplé passe par la méthode à suivre suivante :

1- On écrit les deux équations différentielles en fonction des coordonnées généralisées.

2- On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques. Ce qui signifie que le système peut osciller avec la même pulsation pour tous les oscillateurs.

3- La résolution des systèmes d'équations permet d'obtenir deux pulsations particulières $\omega_1$et ω_2 : ce sont les pulsations propres.

4- On substitue ensuite ω_1 dans l'une des deux équations et l'on obtient le 1er mode propre.

5- On substitue ensuite ω_2 dans l'une des deux équations et l'on obtient le 2ème mode propre.

6- On écrit les deux solutions générales des équations différentielles du mouvement.

V.2.4 Etude d'un système mécanique libre à deux degrés de liberté:

V.2.4.1 Système complexe (masses-ressorts) :

Soit le système mécanique représenté sur la figure V.4 et composé de deux oscillateurs Harmoniques (m_1, K_1) et (m_2, K_2) couplés par un ressort de constante de raideur K. Les deux masses sont supposées se déplacer sans frottement sur un plan horizontal et leurs élongations par rapport à leurs positions d'équilibre sont repérées par x_1 et x_2 .

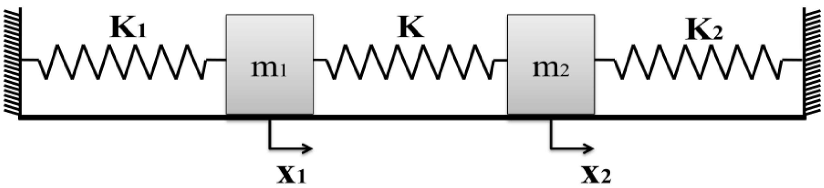


Figure V.4 : Mouvement oscillatoire d'un système couplé à deux degré de liberté

Lorsque ce système est écarté de sa position d'équilibre puis abandonné à lui même, il effectue un mouvement vibratoire libre.

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} K_2 (-x_2)^2$

Le Lagrangien du système s'écrit comme suit: $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}K_1x_1^2 - \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}K_2x_2^2$$

Les équations de Lagrange dans ce cas s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -(K_1 + K)x_1 + Kx_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -(K_2 + K)x_2 + Kx_1$$

Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

Les termes : $-Kx_1$ et $-Kx_2$ sont appelés : Termes de Couplage

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel. On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\omega^2 m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ -\omega^2 m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-m_1\omega^2 + K_1 + K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ -Kx_1 + (-m_2\omega^2 + K_2 + K)x_2 = 0 \end{cases} \ldots\ldots(\mathbf{1})$$

$$\begin{pmatrix} -m_1\omega^2 + K_1 + K & -K \\ -K & -m_2\omega^2 + K_2 + K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles si seulement si le déterminant =0

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + K_1 + K & -K \\ -K & -m_2\omega^2 + K_2 + K \end{vmatrix} = 0$$

Le déterminant $\Delta(\omega)$ est appelé déterminant caractéristique. L'équation $\Delta(\omega) = 0$ est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit

$$\Delta(\omega) = (K_1 + K - m_1\omega^2) \times (K_2 + K - m_2\omega^2) - K^2 = 0$$

$$\omega^4 - (\Omega_1^2 + \Omega_2^2)\omega^2 + \Omega_1^2\Omega_2^2(1 - K'^2) = 0$$

On définit les constantes suivantes comme suit:
$\Omega_1^2 = \frac{K_1}{m_1}$, $\Omega_2^2 = \frac{K_2}{m_2}$, $K'^2 = \frac{K^2}{(K_1+K)(K_2+K)}$

K' est appelée le coefficient du couplage

Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4K\Omega_1^2\Omega_2^2} \\ \omega_2^2 = \dfrac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + 4K\Omega_1^2\Omega_2^2} \end{cases}$$

La solution générale su système s'écrit sous la forme d'une superposition des deux modes propres, comme suit :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

A_1, A_2, B_1, B_2, φ_1 et φ_2 sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

Afin de simplifier le nombre d'inconnu; On détermine les rapports d'amplitudes aux modes propres: $\begin{cases} \omega = \omega_1;\ \frac{A_1}{A_2} \\ \omega = \omega_2;\ \frac{B_1}{B_2} \end{cases}$

Dans le cas d'un système symétrique $m_1 = m_2 = m$ et $K_1 = K_2 = k$, les relations (1) deviennent :

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + k + K)x_1 - Kx_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ -Kx_1 + (-m\omega^2 + K + k)x_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + k + K & -K \\ -K & -m\omega^2 + K + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles si seulement si le déterminant =0

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + K_1 + K & -K \\ -K & -m_2\omega^2 + K_2 + K \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\omega) = (-m\omega^2 + k + K)^2 - K^2 = 0$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 + k + K = K \\ -m\omega^2 + k + K = -K \end{cases} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m},\ \omega_2^2 = \frac{k+2K}{m}$$

Les deux pulsations propres sont : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$

- Les solutions du système :

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

V.2.4.2 Étude des modes propres

- Premier mode : on remplace dans (1) ou (2) par $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$

On obtient après calcul : $x_2 = x_1$

Dans ce mode : $\omega = \omega_1 \Rightarrow x_2 = x_1 \Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow \vec{V}_1\binom{1}{1}$, $\vec{V}_1$ est le 1er vecteur propre.

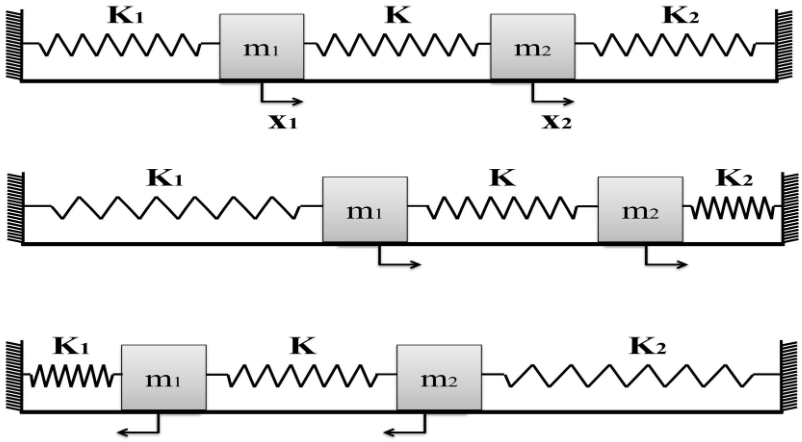


Figure V.5 : Etat du système pour le premier mode. « En phase »

Dans ce mode les deux masses oscillent à la même pulsation $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ avec la même amplitude A, en phase.

- Deuxième mode : on remplace dans (1) ou (2) par $\omega_2^2 = \frac{k+2K}{m}$

On obtient après calcul : $x_2 = -x_1$

Dans ce mode : $\omega = \omega_2 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow B_1 = -B_2 \Rightarrow \vec{V}_2\binom{1}{-1}$, $\vec{V}_2$ est le 2ème vecteur propre.

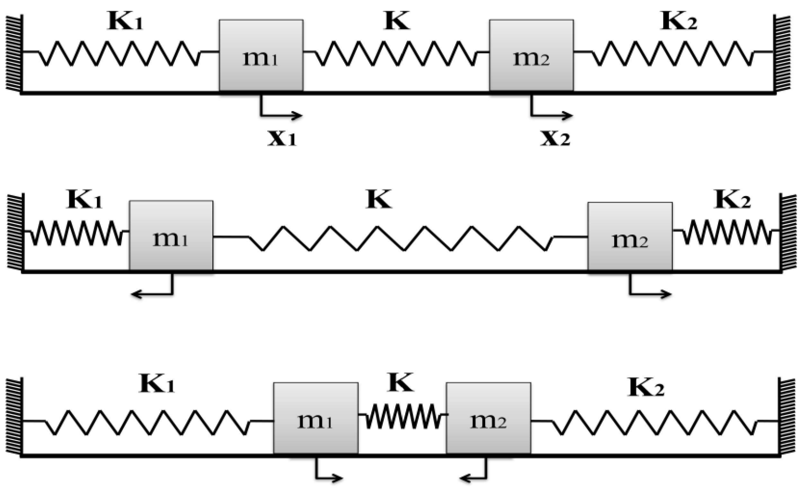


Figure V.6 : Etat du système pour le deuxième mode.
« En opposition de phase »

Dans ce mode les deux masses oscillent à la même pulsation $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$ avec la même amplitude B, en opposition de phase.

Donc les solutions générales deviennent alors :

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Où les constantes A, B, φ_1 et φ_2 seront définies par les conditions initiales.

V.2.4.3 Phénomène de battement :

Les solutions générales sont alors données par:

$$\begin{cases} x_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Pour des conditions initiales bien choisies, on peut écrire :

$$\begin{cases} x_1(t) = A\,(\cos\omega_1 t \; + \cos\omega_2 t) = \; 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \\ x_2(t) = A\,(\cos\omega_1 t \; - \cos\omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \end{cases}$$

Lorsque le couplage est faible (K faible), les pulsations propres des deux oscillateurs $(\omega_1$ et $\omega_2)$ sont voisines ($\omega_1 \approx \omega_2 \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ $est\ faible$), il se produit un phénomène de battement. Les deux oscillateurs se transmettent de l'énergie entre eux et vibres avec une pulsation ω égal à la moyenne des deux pulsations propres $\omega = \frac{(\omega_2+\omega_1)}{2}$ avec une période égale à $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\omega_2+\omega_1}$. Tandis que la pulsation du battement est égale à $\omega_B = \frac{(\omega_2-\omega_1)}{2}$ avec une période égale à $\mathrm{T_B} = \frac{4\pi}{\omega_2-\omega_1}$

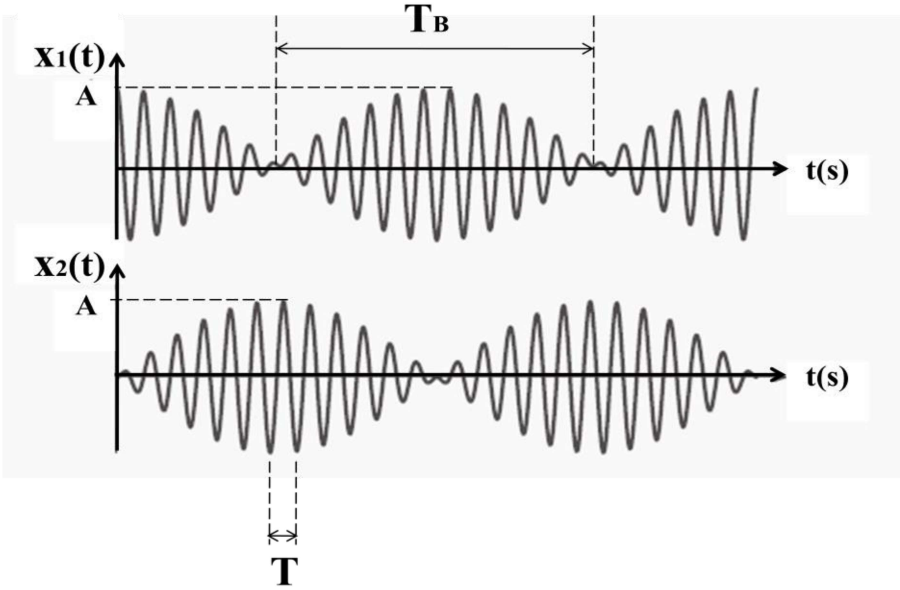


Figure V.7 : Phénomène de battements où Modulation d'amplitude

Une période de battement est donc le temps que fait l'énergie de vibration dans son aller-retour complet entre les deux oscillateurs.

V.3 Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté

V.3.1 Equations de Lagrange :

Les équations différentielles du mouvement oscillatoire forcé des systèmes à deux degrés de liberté sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = F_{q_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = F_{q_2} \end{cases} \qquad (V.6)$$

F_{q_1} et F_{q_2} sont les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées respectives q_1 et q_2.

Dans le cas où la coordonné est une rotation $(q = \theta)$ la force $F_q(t)$ est remplacée par le moment de cette force $\mathcal{M}(F_q(t))$

V.3.2 Equation différentielle d'un système forcé à deux degrés de liberté :

Soit le système à deux degrés de liberté (x_1, x_2) de la figure V.1, composé de : masses, ressorts et amortisseurs, dont leurs caractéristiques sont montrées sur la figure. Ce système est soumis à une force extérieure $F_{q_1} = F = F_0 \cos\Omega t$. K : ressort de couplage.

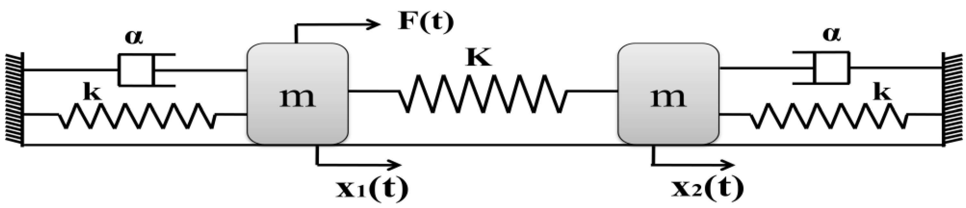


Figure V.8 Système à deux DDL couplé par un ressort de couplage

Les équations de Lagrange s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F(t) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(-x_2)^2$

$$E_P = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

L'énergie de dissipation E_D: $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$

D'où le Lagrangien : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\,\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

Les équations de Lagrange dans ce cas s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F_{x_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k+K)x_1 + \alpha\dot{x}_1 - Kx_2 = F \\ m_2\ddot{x}_2 + (k+K)x_2 + \alpha\dot{x}_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

V.3.3 Etude du régime permanent sinusoïdal (Résolution des d'équations différentielles):

La solution générale de système d'équations différentielles est égale à la solution de la solution du système homogène et d'une solution particulière. La solution de l'équation homogène, en raison de l'amortissement, tend vers zéro lorsque le temps augmente. Lorsque le régime permanent s'établit, la solution devient égale à la solution permanente et s'écrit

alors : $\begin{cases} x_1(t) \cong x_{1_p}(t) = X_1\cos(\Omega t + \phi_1) \\ x_2(t) \cong x_{2_p}(t) = X_2\cos(\Omega t + \phi_2) \end{cases}$

Pour calculer les amplitudes X_1 et X_2 , ainsi que les phases $\phi_1$et ϕ_2 utilisons les méthodes des nombres complexes.

On peut ainsi écrire :

$$x_1(t) = X_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_1}e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2\overline{X_1}e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_2}e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2\overline{X_2}e^{j\Omega t}$$

V.3.4 Calcul de X_1 et X_2 dans le cas de faible amortissement :

V.3.4.1 Amortissement négligeable :

Considérons d'abord le cas d'un amortissement suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que $\alpha \approx 0$. Le système d'équations différentielles s'écrit alors :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k+K)x_1 - Kx_2 = F(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + (k+K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

Les pulsations $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{2m}}$ sont les pulsations propres calculées au chapitre précédent.

$$F(t) = F_0\cos\Omega t = F_0 e^{j\Omega t}$$

$$\begin{cases} -m_1\Omega^2\overline{X_1} + (k+K)\overline{X_1} - K\overline{X_2} = F_0 e^{j\Omega t} \\ -m_2\Omega^2\overline{X_2} + (k+K)\overline{X_2} - K\overline{X_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} [(k+K) - m_1\Omega^2]\overline{X_1} - K\overline{X_2} = F_0 \\ -K\overline{X_1} + [(k+K) - m_2\Omega^2]\overline{X_2} = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont :

$$\overline{X_1} = \frac{F_0}{m}\frac{(\Omega_A^2 - \Omega^2)}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}$$

$$\overline{X_2} = \frac{KF_0}{m^2}\frac{1}{(\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2)}$$

La valeur de la pulsation Ω_A est : $\Omega_A = \sqrt{\frac{k+K}{m}}$

$\overline{x_1} = x_1 e^{j\Omega t}$ et $\overline{x_2} = x_2 e^{j\Omega t} \Rightarrow \phi_1$ et ϕ_2 peuvent avoir que des valeurs 0 et/ou π, vu que la partie imaginaire de $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ est nulle.

Sachant que : $X_1 = |\overline{X_1}|$ et $\phi_1 = -\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(\overline{X_1})}{\mathrm{Re}(\overline{X_1})}$

On aura au final : les amplitudes des déplacements X_1 et X_2

$$X_1 = \frac{F_0}{m} \frac{\left|\Omega_A^2 - \Omega^2\right|}{|\omega_1^2 - \Omega^2|\,|\omega_2^2 - \Omega^2|}$$

$$X_2 = \frac{KF_0}{m} \frac{1}{|\omega_1^2 - \Omega^2|\,|\omega_2^2 - \Omega^2|}$$

V.3.5 Les variations des amplitudes X_1 et X_2 :

La variation des amplitudes X_1 et X_2 sont en fonction de la pulsation de la force excitatrice Ω illustrée sur les figures V.9 et V.10.

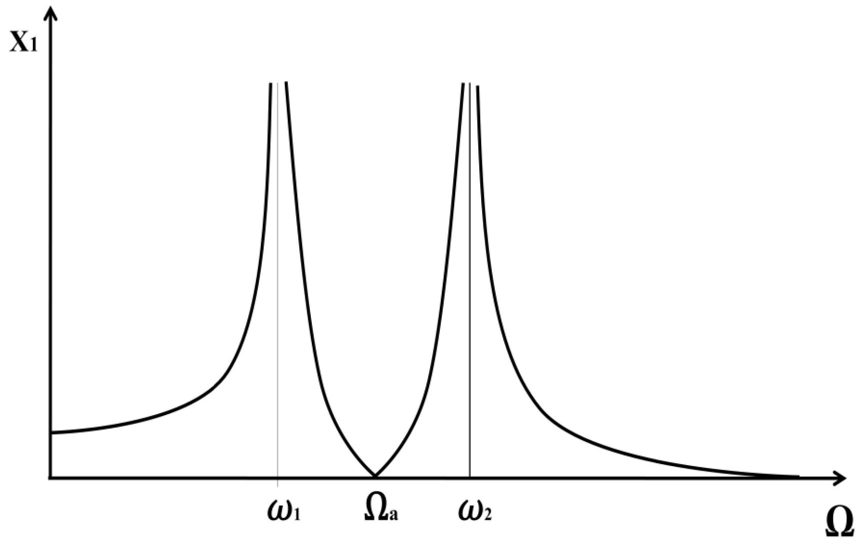


Figure V.9 : Variation de X_1 en fonction de Ω

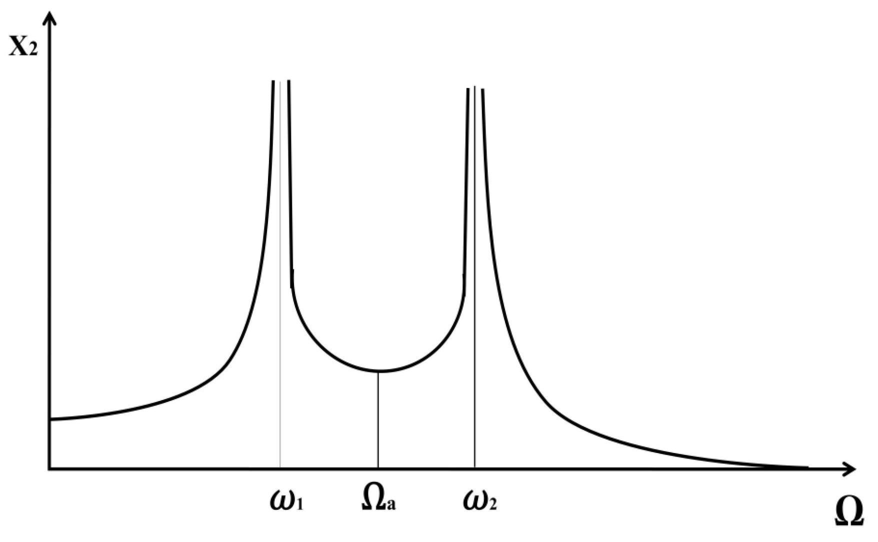


Figure V.10 : Variation de X_2 en fonction de Ω

- $\Omega = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{F_0}{m}\frac{|\Omega_A^2|}{|\omega_1^2||\omega_2^2|}$ et $X_2 = \frac{KF_0}{m|\omega_1^2||\omega_2^2|}$
- On note que le phénomène de résonance se produit pour X_1 comme pour X_2 lorsque la pulsation d'excitation Ω est égale à l'une des pulsations propres ω_1 et ω_2 du système (lorsque $\Omega = \omega_1$ et $\Omega = \omega_2 \Rightarrow$ Résonance).

  $\Omega = \omega_1 = \omega_{R1}$ (Appelée la première pulsation de résonance)

  $\Omega = \omega_1 = \omega_{R2}$ (Appelée la deuxième pulsation de résonance)
- Lorsque l'amortissement étant très faible, les amplitudes à la résonance sont très importantes.
- Lorsque la pulsation Ω devient très grande, ces amplitudes tendent vers zéro.
- Lorsque $\Omega = \Omega_A \Rightarrow$ Les amplitudes X_1 est égale à zéro $(A_1 = 0) \Rightarrow \Omega_A$: est appelée Pulsation d'antirésonance.

V.3.6 Application :

Soit le système mécanique ci-dessous, composé de : masses, ressorts et amortisseurs, dont leurs caractéristiques sont montrées sur la figure. Ce système est soumis à une force extérieure $F(t) = KA\cos\Omega t$

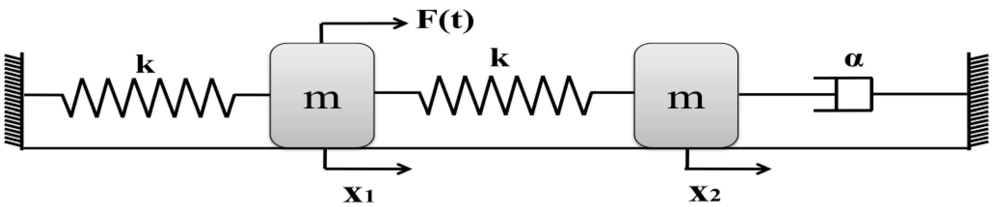


Figure V.11: Mouvement oscillatoire couplés de deux masses

1- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielleE_c et la fonction de dissipation E_D.

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement.

3- Trouver la réponse en régime permanant.

4- Si $\alpha = 0$, pour quelle valeur de Ω le système entre en résonance. Donner dans ce cas la condition pour que la masse excitée reste immobile ?

Solution :

1- L'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielleE_c et la fonction de dissipation E_D :

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$

L'énergie de dissipation E_D: $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$

Le Lagrangien : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2$$

2- L'équation différentielle du mouvement :

Les équations de Lagrange s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = F(t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_2} + \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m\ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) + \alpha\dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{k}{m}(x_1 - x_2) = F(t) \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

3- La résolution en régime permanant, en écriture complexe :

$$x_1(t) = X_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_1}e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2\overline{X_1}e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_2}e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2\overline{X_2}e^{j\Omega t}$$

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 + \dfrac{2k}{m} & -\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{k}{m} & -\Omega^2 + \dfrac{k}{m} + j\Omega\dfrac{\alpha}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{X_1} \\ \overline{X_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{ka}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcul le déterminant $\det(\Omega)$:

$$\det(\Omega) = \mathbf{0} \Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\overline{X_1} = \frac{1}{\det}\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right)$$

$$\overline{X_2} = \frac{1}{\det}\left(\frac{k^2}{m^2}\alpha\right)$$

4- Résolution des L'équation différentielle du mouvement pour $\alpha = 0$:

Calcul des pulsations pour $\alpha = 0$

$$\det(\Omega) = \mathbf{0} \Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\Omega^4 - \frac{3k}{m}\Omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

L'équation admet deux solutions : $\begin{cases} \omega_1 = \frac{k}{2m}\left(3 - \sqrt{5}\right) \\ \omega_2 = \frac{k}{2m}\left(3 + \sqrt{5}\right) \end{cases}$

Pour que la masse soit immobile :

$$\overline{X_1} = \frac{1}{\det}\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right) = 0 \text{ et } \alpha = 0 \Rightarrow -\Omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

V.4 Oscillations de système mécaniques à N degrés de liberté

V.4.1 définition

Un système oscillateur présente N degrés de liberté s'il nécessite N paramètres pour définir sa position à un instant t. Nous considérerons ici des systèmes linéaires dont la mise en équation aboutit à un système de N équations différentielles linéaires. Le nombre de degrés de liberté dépend de la structure du système. Le nombre de degrés de liberté dépend de la structure du système. S'il s'agit d'un :

- système à N particules, les mouvements sont des translations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égal à 3N.
- Si le système est constitué de N corps étendus, il faut ajouter les rotations et le nombre maximum de degrés de liberté sera égal à 6N.

V.4.2 Méthode de Lagrange de mise en équation de système à N degrés de liberté

Considérons les cas de systèmes conservatifs non excités (étape de toute façon utile pour rechercher les modes et les fréquences propres). Soient $q_1, \ldots, q_N$ les N coordonnées indépendantes qui définissent la position du système à un instant donné, E_c l'énergie cinétique, E_p l'énergie potentielle exprimée à l'aide des q_i et q_N. L'équation

de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad (\mathrm{i}=1,2,\ldots\ldots\mathrm{N}) \qquad (\mathrm{V.7})$$

Dans le cas général d'un système forcé à NDDL, il y'aura autant d'équation de Lagrange, donc N équations de Lagrange.

Système à NDDL ⇒ Coordonnées $q_i(\mathrm{i}=1,2,\ldots\ldots\mathrm{N})$.

Dans ce cas les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=F_{q_i}(t) \qquad (\mathrm{i}=1,2,\ldots\ldots\mathrm{N}) \qquad (\mathrm{V.8})$$

Dans le cas où la coordonné est une rotation $(q=\theta)$ la force $F_q(t)$ est remplacée par le moment de cette force $\mathcal{M}(F_q(t))$.

V.4.3 Mise en équation de système à N degrés de liberté

V.4.3.1 Cas général de N degrés de liberté

Les systèmes d'équations à résoudre sont de la forme :

$$[\mathrm{m}][\ddot{\mathrm{x}}]+[\mathrm{R}][\dot{\mathrm{x}}]+[\mathrm{K}][\mathrm{x}]=[\mathrm{F}]\cos\omega t \qquad (\mathrm{V.9})$$

Où [K] représentent une matrice carrée $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ et [x] un vecteur colonne.
Pour les systèmes libres non amortis à N degrés de liberté

$$[\mathrm{m}][\ddot{\mathrm{x}}]+[\mathrm{K}][\mathrm{x}]=0$$

Il apparaît donc que le nombre de fréquences propres est égal au nombre de degrés de liberté.

V.4.3.2 Modes propres de vibration d'un système mécanique à trois degrés de liberté

Considérons le système mécanique de trois masses m_1, m_2 et m_3 attachées entre elles horizontalement par des ressorts K_1, K_2, K_3 et K_4 (voire la figure V.12).

Les positions des masses par rapport à leurs positions d'équilibre sont données par les variables x_1, x_2 et x_3. Le mouvement est dans ce cas exclusivement sur une droite.

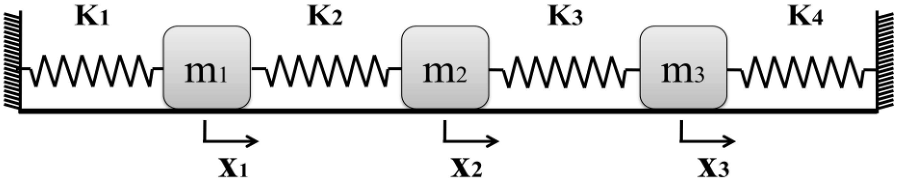


Figure V.12: Mouvement oscillatoire couplés de trois masses

Le système d'équations de mouvement du système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (K_2 + K_3)x_2 - K_2x_1 - K_3x_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 + (K_3 + K_4)x_3 - K_3x_2 = 0 \end{cases}$$

Ce qui peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ou encore sous une forme plus condensée :

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \qquad (V.10)$$

Où

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \ddot{x} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + K_3 & -K_3 \\ 0 & -K_3 & K_3 + K_4 \end{pmatrix} \text{ et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Il est possible de récrire l'équation ci-dessus sous forme

$$\ddot{x} + M^{-1}Kx = 0 \qquad (V.11)$$

Où M^{-1} est la matrice inverse de M

En posant $A = M^{-1}K$, l'équation (2) devient :

$$\ddot{x} + Ax = 0 \qquad (V.12)$$

Si la matrice A est diagonalisable (ce qui est vrai dans notre cas), celle-ci pourrait se mettre sous la forme : $A = PDP^{-1}$

Où P est une matrice dite de passage construite à partir des vecteurs propres de A comme étant ses colonnes.

D une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de la matrice A.
L'équation (3) devient alors :

$$\ddot{x} + PDP^{-1}x = 0 \qquad (V.13)$$

Multiplions l'équation ci-dessus par P^{-1}:

$$P^{-1}\ddot{x} + P^{-1}PDP^{-1}x = 0 \qquad (V.14)$$

Où encore en faisant le changement de variable suivant :

$$U = P^{-1}x \qquad (V.15)$$

Avec $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, nous obtenons l'équation suivante :

$$\ddot{U} + DU = 0 \qquad (V.16)$$

Cette équation est très intéressante car elle représente un système d'équations différentielles découplé puisqu'elle fait intervenir une matrice diagonale. En effet, l'équation ci-dessus peut se mettre sous une forme plus explicite :

$$\begin{cases} \ddot{u}_1 + v_1u_1 = 0 \\ \ddot{u}_2 + v_2u_2 = 0 \\ \ddot{u}_3 + v_3u_3 = 0 \end{cases}$$

Où v_1, v_2 et v_3 sont appelées coordonnées normales puisqu'elles permettent de découpler un système linéaire d'équations différentielles.

Elles représentent des mouvements harmoniques simples du système avec trois pulsations d'oscillations : $\omega_1 = \sqrt{v_1}$, $\omega_2 = \sqrt{v_2}$ et $\omega_3 = \sqrt{v_3}$; c'est à dire les modes propres du système.

Cependant, il est intéressant d'avoir l'évolution des coordonnées x_1, x_2 et x_3.

Pour cela, on utilise l'équation :

$$x = PU \qquad (V.17)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} x_1(t) = P_{11}u_1 + P_{12}u_2 + P_{13}u_3 \\ x_2(t) = P_{21}u_1 + P_{22}u_2 + P_{23}u_3 \\ x_3(t) = P_{31}u_1 + P_{32}u_2 + P_{33}u_3 \end{cases}$$

Les mouvements des masses du système sont finalement des combinaisons linéaires de mouvements harmoniques simples (modes propres du système) avec les pulsations correspondantes. Ces résultats nous ramène impérativement à diagonaliser la matrice A afin que l'étude du mouvement des masses soit complètement établie.

En guise d'exemple d'application, prenons le cas du système mécanique ci-dessus avec des masses et des ressorts égaux. La matrice correspondante s'écrit sous la forme

$$A = \frac{K}{m}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que les valeurs propres de cette matrice et partant les pulsations propres du système sont données par :

$$\begin{cases} v_1 = (2-\sqrt{2})\dfrac{K}{m} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\dfrac{K}{m}} \\ v_2 = 2\dfrac{K}{m} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{2\dfrac{K}{m}} \\ v_3 = (2+\sqrt{2})\dfrac{K}{m} \Rightarrow \omega_3 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\dfrac{K}{m}} \end{cases}$$

Avec les vecteurs propres correspondants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage s'écrit donc sous la forme :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Il serait utile de donner une interprétation des valeurs des vecteurs propres ci- dessus.

En effet, chaque vecteur propre correspond à un mode de vibration, et plus précisément, chaque composante du vecteur donne le rapport d'amplitude de mouvement des différentes masses dans un mode donné. C'est ainsi que le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, correspondant à la pulsation propre $\omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{K}{m}}$, indique que les trois masses oscillent toutes les trois en phase (les signes des composantes sont positives) avec la deuxième masse qui a une amplitude $\sqrt{2}$ fois plus grande que les amplitudes des autres masses.

Les solutions générales de mouvement des masses s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2) + C_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \\ x_2(t) = \sqrt{2} C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \sqrt{2} C_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_1) \\ x_3(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - C_2 \cos(\omega_1 t + \varphi_2) + C_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{cases}$$

C_1 , C_2 , C_3 , φ_1, φ_2 et φ_3 sont des constantes à définir avec les conditions initiales.

-Les formes des solutions indiquent que les masses, dans le premier mode, oscillent en phase avec les mêmes amplitudes pour la première et la troisième masse, alors que celle au milieu a une amplitude $\sqrt{2}$ fois plus grande.

-Dans le deuxième mode, la masse au milieu est immobile, alors que les deux autres masses oscillent en opposition de phase mais avec les mêmes amplitudes.

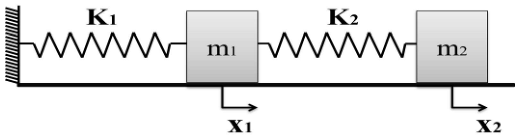
-Dans le troisième mode, la première et la troisième masse oscillent en phase avec la même amplitude mais en opposition de phase avec la masse au milieu qui elle oscille avec une amplitude $\sqrt{2}$ fois plus grande.

De cette façon, tous les aspects du mouvement des masses du système sont établis ; il ne reste qu'appliquer les conditions initiales (préparation du système) et voir comment le système évoluera. En effet, cette procédure peut être facilement appliquée à un système de plusieurs degrés de liberté. Il suffit juste de pouvoir diagonaliser des matrices de plus en plus grandes, ce qui nécessite le recours à des méthodes numériques bien établies.

V.5 Exercices résolus

Exercice N°1 :

Soit le système mécanique représenté sur la figure ci-contre. Les deux masses font des oscillations sur l'axe horizontal.



1- Quel est le nombre de degré de liberté ? et donner le type du couplage ?

2- Calculer l'énergie cinétique, potentielle du système.

3- Pour $K_1 = K_2 = K$ et $m_1 = m, m_2 = 2m$, et en utilisant la formule de Lagrange établir les équations différentielles du mouvement, et écrire les deux équations sous forme d'une matrice $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4- Déduire les pulsations propres du système.

Solution N°1 :

1- Le nombre de degré de liberté du système est de 2, couplage élastique.

2- Energie cinétique et potentielle :

- Energie cinétique E_c :

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = \frac{1}{2}K_1x_1^2 + \frac{1}{2}K_2(x_1 - x_2)^2$$

Donc le lagrangien est : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}K_1x_1^2 - \frac{1}{2}K_2(x_1 - x_2)^2$$

3- Les équations différentielles :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -(K_1 + K_2)x_1 + \frac{1}{2}K_2x_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -K_2x_2 + \frac{1}{2}K_2x_1$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + K_2x_2 - K_2x_1 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant les constantes, on trouve : $\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\begin{cases} x_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\omega^2 m x_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ -Kx_1 - 2\omega^2 m x_2 + Kx_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\omega^2 m + 2K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ -Kx_1 + (-2\omega^2 m + K)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 m + 2K & -K \\ -K & -2\omega^2 m + K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcul le déterminant $\Delta(\omega)$:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} -\omega^2 m + 2K & -K \\ -K & -2\omega^2 m + K \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\omega) = (-\omega^2 m + 2K) \times (-2\omega^2 m + K) - K^2 = 0$$

$$\Delta(\omega) = 2m^2\omega^4 - 3mK\omega^2 + K^2 = 0$$

Le terme de plus basse fréquence correspondant à la pulsation ω_1 est appelé le fondamental.

L'autre terme de pulsation ω_2, est appelé harmonique.

Les deux pulsations propres sont : $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{K}{2m}}$

Et les solutions s'écrit comme :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

A_1 , A_2, B_1, B_2, φ_1 et φ_2 sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.

Le système oscille dans le premier mode (fondamental), les solutions s'écrivent :

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

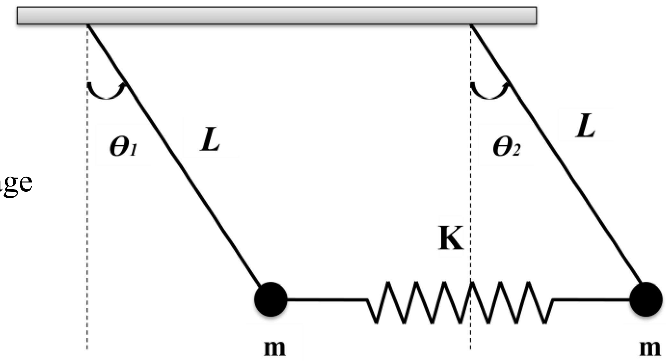
Si le système oscille dans le second mode (harmonique), les solutions s'écrivent :

$$x_1(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2(t) = B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Exercice N°2 :

On considère le système de la figure ci-contre constitué de deux pendules simples identiques de masse m et de longueur L, fixés à un bâti fixe horizontal. Un ressort de raideur K assure le couplage entre les deux pendules. A l'équilibre les deux pendules sont verticaux.



1- Décrire le système et donner le type du couplage ?

2- Calculer l'énergies cinétique E_c et potentielle E_P du système.

3- Trouver l'équation différentielle du mouvement.

4- Déterminer les pulsations propres du système et Calculer les modes d'oscillations.

5- Calculer les rapports des amplitudes dans les modes.

6- Calculer θ_1 et θ_2 , pour les conditions initiales suivantes :

$$\theta_1 (t = 0) = \theta_0 , \theta_2 (t = 0) = 0 \text{ et } \dot{\theta}_1 (t = 0) = \dot{\theta}_2 (t = 0) = 0$$

Solution N°2 :

1- Système oscillatoire à 2 ddl (x_1, x_2), le type du couplage : couplage élastique.

2- Calcul des énergies :

L'énergie cinétiqueE_c :

$$E_C = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}_2^2$$

L'énergie cinétique E_P:

$$E_P = \frac{1}{2}(KL^2 + mgL)\theta_1^2 + \frac{1}{2}(KL^2 + mgL)\theta_2^2 - KL^2\theta_1\theta_2$$

Le lagrangien L dans le cas des oscillations de faible amplitude :

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}(KL^2 + mgL)\theta_1^2 - \frac{1}{2}(KL^2 + mgL)\theta_2^2 + KL^2\theta_1\theta_2$$

3- l'équation différentielle du mouvement :

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrit le mouvement donc on aura deux équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = mL^2\dot{\theta}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = mL^2\ddot{\theta}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = -(KL^2 + mgL)\theta_1 + KL^2\theta_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = mL^2\dot{\theta}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = mL^2\ddot{\theta}_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) = -(KL^2 + mgL)\theta_2 + KL^2\theta_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mL^2\ddot{\theta}_1 + (KL^2 + mgL)\theta_1 - KL^2\theta_2 = 0 \\ mL^2\ddot{\theta}_2 + (KL^2 + mgL)\theta_2 - KL^2\theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\dfrac{K}{m} + \dfrac{g}{L}\right)\theta_1 - \dfrac{K}{m}\theta_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\dfrac{K}{m} + \dfrac{g}{L}\right)\theta_2 - \dfrac{K}{m}\theta_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

4-Les pulsations propres du système :

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

Donc : $\begin{cases} \theta_1(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1 \\ \theta_2(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2 \end{cases}$

ω est l'une des pulsations propres du système.

On remplace $\ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1$et $\ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2$ dans les équations (1) et (2) on trouve :

$$\begin{cases} -\omega^2\theta_1 + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_1 - \frac{K}{m}\theta_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \\ -\frac{K}{m}\theta_1 - \omega^2\theta_2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2\theta_1 + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_1 - \frac{K}{m}\theta_2 = 0 \\ -\frac{K}{m}\theta_1 - \omega^2\theta_2 + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (KL^2 + mgL - \omega^2 mL^2)\theta_1 - KL^2\theta_2 = 0 \\ -KL^2\theta_1 + (KL^2 + mgL - \omega^2 mL^2)\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} KL^2 + mgL - \omega^2 mL^2 & -KL^2 \\ -KL^2 & KL^2 + mgL - \omega^2 mL^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1 \\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix}$$

On calcul le déterminant $\Delta(\omega)$:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 & -KL^2 \\ -KL^2 & KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta(\omega) = (KL^2 + mgL - mL^2\omega^2)^2 - (KL^2)^2 = 0$$

$$KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 = \begin{cases} +KL^2 \\ -KL^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 = -KL^2 \\ KL^2 + mgL - mL^2\omega^2 = +KL^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{2K}{m} + \frac{g}{L} \\ \omega_2^2 = \frac{g}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{m} + \frac{g}{L}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L}} \end{cases}$$

ω_1: la première pulsation propre, ω_2: la deuxième pulsation propre.

-Calcul des modes propres :

Dans chaque mode les deux masses effectuent des mouvements harmoniques simples avec la même pulsation ($\omega_1$ou ω_2) et les deux pendules passent par la position d'équilibre au même instant.

-Premier mode : on remplace dans (3) ou (4) par $\omega_1^2 = \frac{2K}{m} + \frac{g}{L}$

On obtient après calcul : $\theta_2 = -\theta_1$

-Deuxième mode : on remplace dans (3) ou (4) par $\omega_2^2 = \frac{g}{L}$

On obtient après calcul : $\theta_2 = \theta_1$

5- Les rapports des amplitudes dans les modes :

Pour calculer les rapports des amplitudes dans les modes, on suppose que le système oscille soit dans le premier mode soit dans le second mode.

Dans le premier mode, on obtient le système

$$\begin{cases} (KL^2 + mgL - mL^2\omega_1^2) - KL^2\mu_1 = 0 \\ -KL^2 + (KL^2 + mgL - mL^2\omega_1^2)\mu_1 = 0 \end{cases}$$

Dans le second mode, on obtient

$$\begin{cases} (KL^2 + mgL - mL^2\omega_1^2) - KL^2\mu_2 = 0 \\ -KL^2 + (KL^2 + mgL - mL^2\omega_1^2)\mu_2 = 0 \end{cases}$$

Tenant compte des expressions de ω_1 et ω_2 on obtient les valeurs du rapport des amplitudes dans les modes $\mu_1 = +1$ et $\mu_2 = -1$

6- Calcul des solutions des équations différentielles θ_1 et θ_2 :

La solution générale s'écrit alors comme une combinaison linéaire des deux solutions.

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_1 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dans le premier mode : $\omega = \omega_1 \Rightarrow \theta_2 = -\theta_1 \Rightarrow A_1 = -A_2 \Rightarrow \vec{V}_1\binom{1}{-1}$,

$\vec{V}_1$ est le 1^{er} vecteur propre.

Dans le premier mode : $\omega = \omega_2 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 \Rightarrow B_1 = B_2 \Rightarrow \vec{V}_2\binom{1}{1}$,

$\vec{V}_2$ est le $2^{ème}$ vecteur propre.

Donc :

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = -A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta_1(0)=\theta_0\,,\dot{\theta}_1(0)=0\\ \theta_2(0)=0\,,\dot{\theta}_2(0)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}_1(t)=A\omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+B\,\omega_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\\ \dot{\theta}_2(t)=-A\omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+B\,\omega_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta_1(0)=A\sin\varphi_1+B\sin\varphi_2=\theta_0\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(5)\\ \theta_2(0)=-A\sin\varphi_1+B\sin\varphi_2=0\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (6)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\theta}_1(0)=A\omega_1\cos\varphi_1+B\,\omega_2\cos\varphi_2=0\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots..(7)\\ \dot{\theta}_2(0)=-A\omega_1\cos\varphi_1+B\,\omega_2\cos\varphi_2=0\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots(8)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(7)+(8)\Rightarrow\ 2B\,\omega_2\cos\varphi_2=0\ \Rightarrow\cos\varphi_2=0\Rightarrow\varphi_2=\dfrac{\pi}{2}\\ (8)-(7)\Rightarrow\ -2A\omega_1\cos\varphi_1=0\ \Rightarrow\cos\varphi_1=0\Rightarrow\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

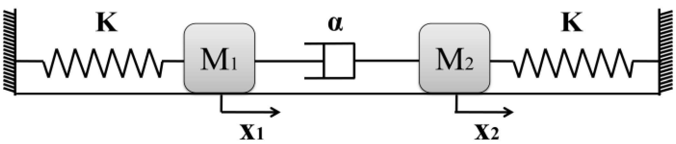
$$\begin{cases}(\mathbf{5})\Rightarrow A+B=\theta_0\\ (\mathbf{6})\Rightarrow -A+B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{\theta_0}{2}\\ B=\frac{\theta_0}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta_1(t)=\frac{\theta_0}{2}\ \sin\left(\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\theta_0}{2}\ \sin\left(\omega_2 t+\frac{\pi}{2}\right)\\ \theta_2(t)=-\frac{\theta_0}{2}\ \sin\left(\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\theta_0}{2}\sin\left(\omega_2 t+\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta_1(t)=\dfrac{\theta_0}{2}\left[\sin\left(\omega_1 t+\dfrac{\pi}{2}\right)+\ \sin\left(\omega_2 t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\\ \theta_2(t)=\ \dfrac{\theta_0}{2}\left[-\sin\left(\omega_1 t+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\omega_2 t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\end{cases}$$

<u>Exercice N°3:</u>

On considère le système représenté par la figure ci-contre, et composé de deux oscillateurs harmoniques (M_1, K) et (M_2, K) couplés par un amortisseur α.



1- Décrire le système et donner le type du couplage ?

2- Déterminer l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système.

3- Déterminer le Lagrangien du système

4- Déterminer les équations différentielles du mouvement en fonction des variables

$x_1(t)$ et $x_2(t)$.

5- On pose les paramètres suivants : $M_1 = M_2 = M$. Etablir les nouvelles équations différentielles du mouvement.

Solution N°3 :

1- Système oscillatoire à 2 ddl (x_1, x_2). Le type du couplage :couplage élastique.

2- l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système :

- L'énergie cinétique du système E_c:

$$E_c = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}Kx_2^2$$

- La fonction de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2$$

3- Le lagrangien est du système :

La fonction de Lagrange: $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}Kx_2^2$$

4- les équations différentielles du mouvement en fonction des variables $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

Le formalisme Lagrangien :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M_1\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M_1\ddot{x}_1$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) = -Kx_1$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_1} = \alpha\dot{x}_1 - \alpha\dot{x}_2 = \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = M_2\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = M_2\ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right) = -Kx_2$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}_2} = \alpha\dot{x}_2 - \alpha\dot{x}_1 = \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + Kx_1 + \alpha\dot{x}_1 - \alpha\dot{x}_2 = 0 \\ M_2\ddot{x}_2 + Kx_2 + \alpha\dot{x}_2 - \alpha\dot{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + Kx_1 = \alpha\dot{x}_2 \\ M_2\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + Kx_2 = \alpha\dot{x}_1 \end{cases}$$

L'équations différentielles :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{\alpha}{M_1}\dot{x}_1 + \dfrac{K}{M_1}x_1 = \dfrac{\alpha}{M_1}\dot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{\alpha}{M_2}\dot{x}_2 + \dfrac{K}{M_2}x_2 = \dfrac{\alpha}{M_2}\dot{x}_1 \end{cases}$$

5- Les nouvelles équations différentielles du mouvement si : $M_1 = M_2 = M$.

$$M_1 = M_2 = M \Rightarrow \begin{cases} M\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + Kx_1 = \alpha\dot{x}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ M\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + Kx_2 = \alpha\dot{x}_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow M(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K(x_1 - x_2) = \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\Rightarrow M(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 2\alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K(x_1 - x_2) = 0$$

$$(1) + (2) \Rightarrow M(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \alpha(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + K(x_1 + x_2) = \alpha(\dot{x}_2 + \dot{x}_1)$$

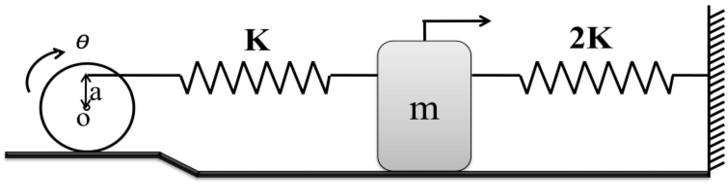
$$\Rightarrow M(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + K(x_1 + x_2) = 0$$

On pose : $X_1 = x_1 - x_2 \Rightarrow \dot{X}_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \Rightarrow \ddot{X}_1 = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2$
$X_2 = x_1 + x_2 \Rightarrow \dot{X}_2 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \Rightarrow \ddot{X}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} M\ddot{X}_1 + 2\alpha\dot{X}_1 + KX_1 = 0 \\ M\ddot{X}_2 + KX_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{X}_1 + \dfrac{2\alpha}{M}\dot{X}_1 + \dfrac{K}{M}X_1 = 0 \\ \ddot{X}_2 + \dfrac{K}{M}X_2 = 0 \end{cases}$$

<u>Exercice N°4:</u>

Un système mécanique est composé de deux oscillateurs (M, R) et $(m, 2K)$ couplés par un ressort de constante de raideur K se trouvant a une distance a du centre o du disque (voire la figure).



En considéron les oscillations des faibles amplitudes.

1- Donner la ou les équations différentilles du mouvement.

2- Donner la ou les solutions des équations différentilles du mouvement.

On donne $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2 = m$, $a = 1$

Solution N°4 :

1- Les équations différentilles du mouvement :

Le système est à 2 degrés de liberté : $x_m = x_2 \Rightarrow \dot{x}_m = \dot{x}_2$

Le ressort horizontal K relis les deux oscillateurs donc $x_K = x - a\sin\theta$.

- L'énergie cinétique du système E_c:

$$E_c = E_{cm} + E_{cM}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{/O}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = E_{PK} + E_{P2K}$$

$$E_P = \frac{1}{2}K(x - a\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}(2K)x_2^2$$

La fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K(x - a\sin\theta)^2 - Kx_2^2$$

Les équations de Lagrange sont :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -K(x - a\theta) - 2Kx$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{\theta}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = Ka\cos\theta(x - a\sin\theta) = Kax - Ka^2\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + K(x - a\theta) + 2Kx = 0 \\ m\ddot{\theta} + Ka^2\theta - Kax = 0 \end{cases}$$

$$a = 1 \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} + 3Kx - K\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ m\ddot{\theta} + K\theta - Kx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{3K}{m}x - \frac{K}{m}\theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{K}{m}\theta - \frac{K}{m}x = 0 \end{cases}$$

2- Les solutions des équations différentilles du mouvement :

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \theta(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \end{cases}$$

On remplace dans les équations (1) et (2) donc :

$$\begin{cases} -m\omega^2 x + 3Kx - K\theta = 0 \\ -m\omega^2 \theta + K\theta - Kx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3K - m\omega^2)x - K\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \\ -Kx + (K - m\omega^2)\theta = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3K - m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Les pulsations propres :

Le système admet des solutions non nulles si seulement si le déterminant $\Delta(\omega) = 0$

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} 3K - m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Le déterminant $\Delta(\omega)$ est appelé déterminant caractéristique. L'équation $\Delta(\omega) = 0$ est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit

$$\Delta(\omega) = (3K - m\omega^2) \times (K - m\omega^2) - K^2 = 0$$

$$\Delta(\omega) = m^2\omega^4 - 4Km\omega^2 + 2K = 0$$

On pose : $\omega^2 = x \Rightarrow \Delta(\omega) = m^2x^2 - 4Kmx + 2K = 0$

$$\Delta(\omega) = 8K^2m^2 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{(2+\sqrt{2})K}{m} \\ \omega_2^2 = \dfrac{(2-\sqrt{2})K}{m} \end{cases}$$

Les deux pulsations propres sont :

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\dfrac{(2+\sqrt{2})K}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{2})K}{m}} \end{cases}$$

- Calcul des modes propres :

1er mode pour $\omega^2 = \omega_1^2 = \frac{(2+\sqrt{2})K}{m}$ on aura : $(1+\sqrt{2})Kx - K\theta = 0 \Rightarrow \theta = (1+\sqrt{2})x \Rightarrow \vec{V}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

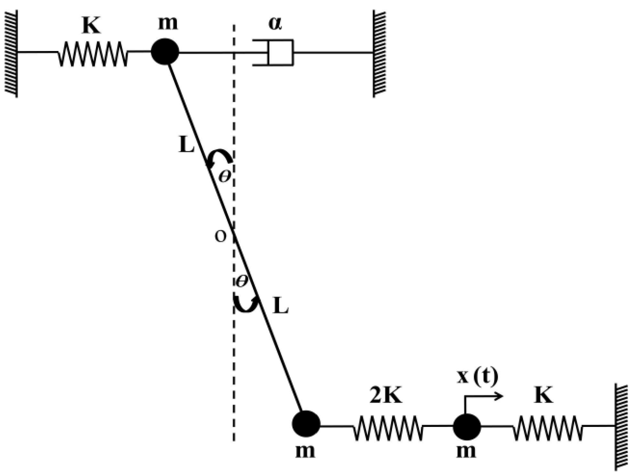
2eme mode pour $\omega^2 = \omega_2^2 = \frac{(2-\sqrt{2})K}{m}$ on aura : $(1-\sqrt{2})Kx - K\theta = 0 \Rightarrow \theta = (1-\sqrt{2})x \Rightarrow \vec{V}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Donc la solution est :

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\begin{cases} x(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta(t) = (1+\sqrt{2})A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + (1-\sqrt{2})B\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Exercice N°5:



Soit les deux sous-systèmes mécanique A et B

Le système mécanique A comprenant une barre horizontale de masse négligeable et de longueur 2L porte en ses extrémités des masses m.

L'ensemble des frottements est symbolisé par l'amortisseur de coefficient α.

Le système mécanique B est constitué d'un ressort de constante de raideur K relié à une masse ponctuelle m.

Les deux sous-systèmes A et B sont couplés par le ressort 2K. Le nouveau système est repéré à l'instant t par les coordonnées généralisées $\theta(t)$ et $x(t)$ supposées de faibles amplitudes.

1- Quel est le nombre de degré de liberté ? Donner le type du couplage ?

2- Trouvez les équations différentielles du mouvement du système couplé.

3- On néglige l'effet d'amortissement (α =0), écrire les équations du mouvement sous la

forme matricielle $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4- Trouvez les valeurs de a, b, c et d.

<u>Solution N°5 :</u>

1- Le nombre de degré de liberté est de 2, couplage élastique.

2- les équations différentielles du mouvement du système couplé :

- L'énergie cinétique du système E_c:

$$E_c = E_{cm} + E_{cm} + E_{cm}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(2mL^2)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = E_{PK} + E_{P2K} + E_{PK} + E_{Pm} + E_{Pm}$$

$$E_P = \frac{1}{2}KL^2\sin\theta^2 + \frac{1}{2}(2K)(x - L\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}Kx^2 + mgL\cos\theta - mgL\cos\theta$$

$$E_P = \frac{1}{2}KL^2\sin\theta^2 + \frac{1}{2}(2K)(x - L\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

- La fonction de dissipation :

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}(\alpha L^2)\dot{\theta}^2$$

La fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(2mL^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K(L\sin\theta)^2 - \frac{1}{2}Kx^2 - \frac{1}{2}(2K)(x - L\sin\theta)^2$$

Les deux équations de la grange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -Kx + 2x - 2L\sin\theta = -Kx - 2K(x - L\sin\theta)$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mL\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mL\ddot{\theta}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \theta}\right) = -KL^2\sin\theta\cos\theta + 2KL\cos\theta(x - L\sin\theta)$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\begin{cases} 2mL\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + KL^2\sin\theta\cos\theta - 2KL\cos\theta(x - L\sin\theta) = 0 \\ m\ddot{x} + Kx + 2K(x - L\sin\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2mL\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + 3KL\theta - 2Kx = 0 \\ m\ddot{x} + 3Kx - 2KL\theta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2mL\ddot{\theta} + 3KL\theta - 2Kx = 0 \\ m\ddot{x} + 3Kx - 2KL\theta = 0 \end{cases}$$

3– Ecrire le système d'équation sous la forme matricielle :

On fait l'hypothèse que le système admet des solutions harmoniques :

$$\begin{cases} \theta(t) = A_2\sin(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2\theta \\ x(t) = A_1\sin(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \end{cases}$$

On remplace dans les équations différentielles du mouvement donc :

$$\begin{cases} -2mL\omega^2\theta + 3KL\theta - 2Kx = 0 \\ -2KL\theta - m\omega^2 x + 3Kx = 0 \end{cases}$$

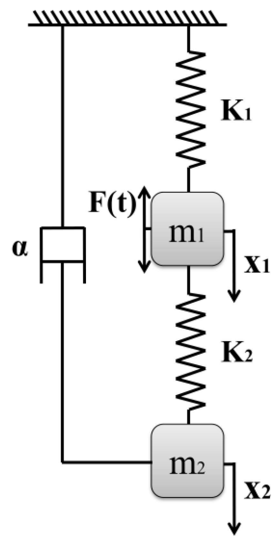
$$\begin{cases} (3KL - 2mL\omega^2)\theta - 2Kx = 0 \\ -2KL\theta + (3K - m\omega^2)x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3KL - 2mL\omega^2 & -2K \\ -2KL & 3K - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4– Les valeurs de a, b, c et d :

$a = 3KL - 2mL\omega^2$, $b = -2KL$, $c = -2K$, $d = 3K - m\omega^2$

Exercice N°7 :



Soit le système mécanique oscillant de la figure ci-contre,

$x_1$et x_2 sont respectivement les positions dynamiques (amplitudes à chaque instant) des masses m_1 et m_2 par rapport à leurs positions de repos (d'équilibre). $F(t)$ force excitatrice appliquée en m_1 .

1- Quel est le nombre de degré de liberté ?

2- Déterminer l'énergie cinétique E_c, potentielle E_P et la Fonction de dissipation E_D du système.

3- Ecrire les équations différentielles avec : $m_1 = m_2 = m$ et $K_1 = K_2 = K$

4- Trouver les solutions du régime permanant sachant que $F(t) = Ka\cos\Omega t$

5- Si $\alpha = 0$, pour qu'elle valeur de Ω a-t-on résonnance.

Donner dans ce cas la condition pour laquelle la 1ère masse reste immobile.

Solution N°7:

1- Le nombre de degré de liberté est de 2.

2- l'énergie cinétique E_c, potentielle E_P et la Fonction de dissipation E_D du système :

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2}K_1x_1^2 + \frac{1}{2}K_2(x_1 - x_2)^2$

L'énergie de dissipation E_D: $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_2^2$

3- Les équations différentielles :

Le Lagrangien : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}K_1x_1^2 - \frac{1}{2}K_2(x_1 - x_2)^2$$

avec : $m_1 = m_2 = m$ et $K_1 = K_2 = K$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2-\frac{1}{2}Kx_1^2-\frac{1}{2}K(x_1-x_2)^2$$

Les équations de Lagrange :

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=F_{x_1}\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial x_2}+\dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}_2}=0\end{cases}$$

Les équations décrivant la variation des élongations x_1 et x_2 en fonction du temps, s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases}m\ddot{x}_1+Kx_1+K(x_1-x_2)=F(t)\\ m\ddot{x}_2-K(x_1-x_2)+\alpha\dot{x}_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\ddot{x}_1+2Kx_1-Kx_2=F(t)\\ m\ddot{x}_2-Kx_1+Kx_2+\alpha\dot{x}_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\ddot{x}_1+\dfrac{2K}{m}x_1-\dfrac{K}{m}x_2=F(t)\\ \ddot{x}_2+\dfrac{K}{m}x_2-\dfrac{K}{m}x_1+\dfrac{\alpha}{m}\dot{x}_2=0\end{cases}$$

4- Les solutions du régime permanant :

$$x_1(t)=X_1e^{j(\Omega t+\phi_1)}=\overline{X_1}e^{j\Omega t}\Rightarrow\ \ddot{x}_1(t)=-\Omega^2\overline{X_1}e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t)=X_2e^{j(\Omega t+\phi_1)}=\overline{X_2}e^{j\Omega t}\Rightarrow\ \ddot{x}_2(t)=-\Omega^2\overline{X_2}e^{j\Omega t}$$

$$\begin{pmatrix}-\Omega^2+\dfrac{2k}{m} & -\dfrac{k}{m}\\ -\dfrac{k}{m} & -\Omega^2+\dfrac{k}{m}+j\Omega\dfrac{\alpha}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{X_1}\\ \overline{X_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{ka}{m}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\det(\Omega)=\mathbf{0}\Rightarrow\left(-\Omega^2+\frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2+\frac{k}{m}+j\Omega\frac{\alpha}{m}\right)-\frac{k^2}{m^2}=0$$

$$\overline{X_1}=\frac{1}{\det}\left(-\Omega^2+\frac{k}{m}+j\Omega\frac{\alpha}{m}\right)$$

$$\overline{X_2}=\frac{1}{\det}\left(\frac{k^2}{m^2}\alpha\right)$$

5- Calcul des pulsations pour $\alpha=0$

$$\det(\Omega)=\mathbf{0}\Rightarrow\left(-\Omega^2+\frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2+\frac{k}{m}\right)-\frac{k^2}{m^2}=0$$

$$\Omega^4-\frac{3k}{m}\Omega^2+\frac{k^2}{m^2}=0$$

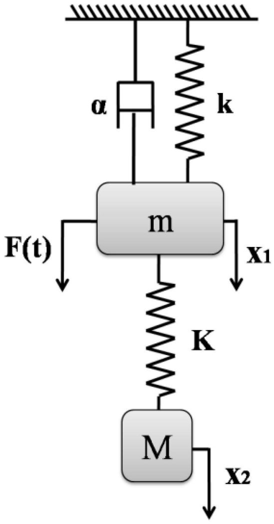
L'équation admet deux solutions : $\begin{cases} \omega_1 = \frac{k}{2m}(3-\sqrt{5}) \\ \omega_2 = \frac{k}{2m}\,(3+\sqrt{5}) \end{cases}$

Pour que la masse m_1 est immobile :

$\overline{X_1} = \frac{1}{\det}\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega\frac{\alpha}{m}\right) = 0$ et $\alpha = 0 \Rightarrow -\Omega^2 + \frac{k}{m} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Exercice N°8 :

Considérons le système à deux degrés de liberté de la figure ci-contre.



Soient x_1 et x_2 les déplacements conséquents dynamique de m et M par rapport à leurs positions d'équilibres.

1- Décrire le système et donner le type du couplage ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c, potentielle E_P et la Fonction de dissipation E_D du système.

3- Trouver les solutions du régime permanant sachant que $F(t) = KA\cos\Omega t$

4- Si $\alpha = 0$, pour quelle valeur de Ω le système entre en résonance. Donner dans ce cas la condition pour que la masse m excitée reste immobile ?

Solution N°8:

1- Système oscillatoire à deux degrés de liberté (x_1, x_2), le type du couplage : couplage élastique.

2- l'énergie cinétique E_c, potentielle E_P et la Fonction de dissipation E_D du système :

L'énergie cinétique du système E_c: $E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$

L'énergie potentielle du système E_p: $E_P = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$

L'énergie de dissipation E_D: $E_D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2$

3- Les équations différentielles :

Le Lagrangien : $L = E_c - E_P$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k+K)x_1^2 - \frac{1}{2}Kx_2^2 + Kx_1x_2$$

Les équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F_{x_1} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

Les équations différentielles du mouvement s'écrivent:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + (k+K)x_1 - Kx_2 = F \\ -Kx_1 + m\ddot{x}_2 + Kx_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_1 + \frac{(k+K)}{m}x_1 - \frac{K}{m}x_2 = F \\ \ddot{x}_2 + \frac{K}{m}x_2 - \frac{K}{m}x_1 = 0 \end{cases}$$

4- Les solutions du régime permanant :

$$x_1(t) = X_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_1} e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 \overline{X_1} e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = X_2 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{X_2} e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2 \overline{X_2} e^{j\Omega t}$$

$$\overline{X_1} = \frac{F_0}{m}\left[\frac{\Omega^2 - \frac{K}{M}}{\left(\Omega^4 + \Omega^2\left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right) + j\Omega\frac{\alpha}{m}\left(\Omega^2 - \frac{K}{m}\right)}\right]$$

$$\overline{X_2} = -\frac{KF_0}{Mm}\left[\frac{1}{\left(\Omega^4 + \Omega^2\left(\frac{k+K}{m} + \frac{K}{M}\right) - \frac{kK}{mM}\right) + j\Omega\frac{\alpha}{m}\left(\Omega^2 - \frac{K}{m}\right)}\right]$$

4- Pour que la masse m_1 est immobile :

$\overline{X_1} = 0$ et $\alpha = 0 \Rightarrow -\Omega^2 + \frac{K}{m} = 0 \Rightarrow \omega_A = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Lorsque la pulsation de la force excitatrice est égale à $\omega_A = \sqrt{\frac{K}{m}}$ la masse m est immobile

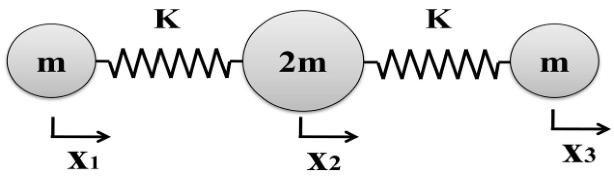
Si on choisit K et M telles que $\frac{k}{m} = \frac{K}{M}$ (c'est-à-dire telles que $\omega_0 = \Omega_A$), la masse m est immobile lorsque la pulsation excitatrice Ω est égale à $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Dans ces conditions, l'ajout de K et M permet d'annuler la vibration de m à cette pulsation.

Un tel dispositif constitue un "étouffeur" dynamique de vibrations.

Exercice N°9 :

On modélise le mouvement d'une molécule triatomique (A-B-A) a un système mécanique constitué par trois masses couplées par deux ressorts identiques de constante de raideur k représenté dans la figure ci-contre.



1- Etablir le Lagrangien du système.

2- Déterminer les équations différentielles du mouvement.

3- En déduire les pulsations propres ainsi la nature du mouvement.

4- Donner la matrice de passage et les solutions générales.

Solution N°9 :

1- Le Lagrangien du système **:**

- L'énergie cinétique E_c :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2$$

- L'énergie potentielle du système E_p:

$$E_P = \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}K(x_2 - x_3)^2$$

Le Lagrangien s'exprime alors :

$$L = E_c - E_P$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}K(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}K(x_2 - x_3)^2$$

2- Les équations différentielles du mouvement :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_2}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x_3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ 2m\ddot{x}_2 + 2Kx_2 - Kx_1 - Kx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 + Kx_3 - Kx_2 = 0 \end{cases}$$

3- En déduire les pulsations propres ainsi la nature du mouvement :

On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

Donc : $\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \\ x_3(t) = A_3\cos(\omega t + \varphi_3) \Rightarrow \ddot{x}_3 = -\omega^2 x_3 \end{cases}$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} -m\omega^2 x_1 + Kx_1 - Kx_2 = 0 \\ -2m\omega^2 x_2 + 2Kx_2 - Kx_1 - Kx_3 = 0 \\ -m\omega^2 x_3 + Kx_3 - Kx_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (K - m\omega^2)x_1 - Kx_2 = 0 \\ -Kx_1 + (2K - 2m\omega^2)x_2 - Kx_3 = 0 \\ Kx_2 + (K - m\omega^2)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} K - m\omega^2 & -K & 0 \\ -K & 2K - 2m\omega^2 & -K \\ 0 & K & K - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles si seulement si : $\det = 0$

$$\det = 0 \Rightarrow (K - m\omega^2)[(K - m\omega^2)^2 - K^2] = 0$$

Les pulsations propres sont : $\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} \\ \omega_2 = 0 \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{2K}{m}} \end{cases}$

4- La matrice de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

-La solution générale est :

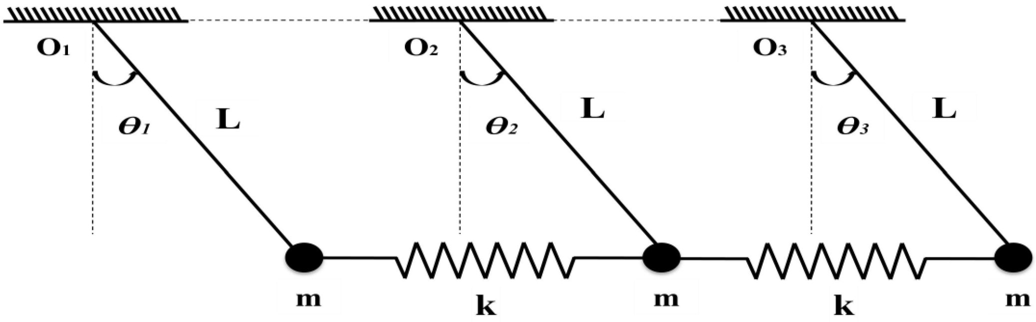
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \end{pmatrix}$$

<u>Exercice N°10 :</u>

Un système mécanique constitue trois pendules simples identiques, de masses m de longueur L, présentés dans la figure ci-dessous. Les masses sont reliées entre elles par l'intermédiaire de deux ressorts identiques, de raideur k. A l'équilibre, les pendules sont verticaux, les trois masses sont équidistantes sur une même, et les ressorts ont leur longueur naturelle. Le système en mouvement est défini, à l'instant t, par les élongations angulaires θ_1 , θ_2, θ_3 des pendules avec la verticale descendante. On posera les constantes suivantes :

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\Omega_0^2 = \frac{g}{L}$



1- Quel est le nombre de degré de liberté ?

2- Déterminer le Lagrangien du système.

3- Etablir les équations différentielles du second ordre pour les petites oscillations.

4- Déterminer les pulsations propres du système.

5- Calculer les pulsations propres.

<u>Solution N°10:</u>

1- Le nombre de degré de liberté:

Le système a trois degrés de liberté représentés par : θ_1 , θ_2 , θ_3

2- Le Lagrangien du système :

- L'énergie cinétique s'exprime:

$$E_C = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_3^2 = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2)$$

- L'énergie cinétique E_P:

$$E_P = \frac{1}{2}k\,(L\theta_1 - L\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k\,(L\theta_2 - L\theta_3)^2 - mgL(\,\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

Le Lagrangien s'exprime comme suit :

$$L = \frac{1}{2}mL^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2\right) - \frac{1}{2}k\,(L\theta_1 - L\theta_2)^2 - \frac{1}{2}k\,(L\theta_2 - L\theta_3)^2 + mgL(\,\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

3- L'équation différentielle :

On remarque bien deux coordonnées généralisées qui décrit le mouvement donc on aura trois équations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta_1}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta_2}\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3}\right) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial \theta_3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + (\Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_1 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + (\Omega_0^2 + 2\omega_0^2)\theta_2 - \omega_0^2\theta_1 - \omega_0^2\theta_3 = 0 \\ \ddot{\theta}_3 + (\Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_3 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

4- Les pulsations propres :

On considère les solutions du système de type sinusoïdal :

$$\text{Donc :} \begin{cases} \theta_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\omega^2\theta_1 \\ \theta_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = -\omega^2\theta_2 \\ \theta_3(t) = A_3\cos(\omega t + \varphi_3) \Rightarrow \ddot{\theta}_3 = -\omega^2\theta_3 \end{cases}$$

En remplaçant les solutions dans le système différentiel, On obtient un système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_1 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \\ (-\omega^2 + \Omega_0^2 + 2\omega_0^2)\theta_2 - \omega_0^2\theta_1 - \omega_0^2\theta_3 = 0 \\ (-\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2)\theta_3 - \omega_0^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \Omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système admet des solutions non nulles si seulement : $\det = 0$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + \Omega_0^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

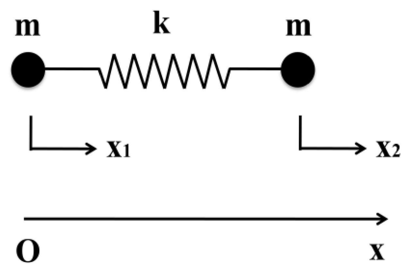
D'où :

$$(-\omega^2 + \Omega_0^2 + \omega_0^2)[\omega^4 - (2\Omega_0^2 + 3\omega_0^2)\,\omega^2 + \Omega_0^4 + 3\omega_0^2\Omega_0^2] = 0$$

$$\text{Les pulsations propres sont :} \begin{cases} \omega_1 = \Omega_0 \\ \omega_2 = \sqrt{\Omega_0^2 + \omega_0^2} \\ \omega_3 = \sqrt{\Omega_0^2 + 3\omega_0^2} \end{cases}$$

V.6 Exercices supplémentaires

Exercice N°1:



Une molécule diatomique est schématisée figure ci-contre.

Ses deux atomes sont identiques et ne peuvent se déplacer que sur l'axe Ox horizontal.

1- Trouver l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système.

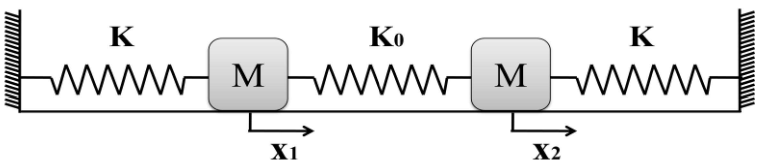
2- Trouver l'équation différentielle du mouvement

3- Calculer les pulsations propres.

4- Calculer les rapports d'amplitudes de chaque mode. Décrire le mouvement des atomes dans chacun des modes.

Exercice N°2 :

Soit le système mécanique représenté sur la figure ci-dessous et composé de deux oscillateurs harmoniques (M, K) couplés par un ressort de constante de raideur K_0. Les deux masses sont supposées se déplacer sans frottement sur un plan horizontal et leurs élongations par rapport à leurs positions d'équilibre sont repérées par x_1 et x_2.



1- Quel est le nombre de degré de liberté ? donner le type du couplage ?

2- Trouver l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système.

3- Trouver l'équation différentielle du mouvement et écrire les deux équations sous forme d'une matrice $\mathrm{M}\begin{pmatrix}\mathrm{x}_1\\ \mathrm{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

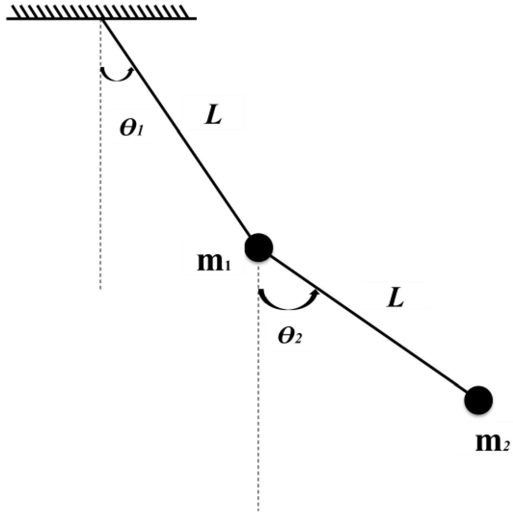
4- Déterminer les pulsations propres du système.

5- Etablir les solutions des équations différentielles du système, dans le cas :

$$\mathrm{x}_1\,(\mathrm{t}=0)=\mathrm{x}_0\,,\mathrm{x}_2\,(\mathrm{t}=0)=0 \text{ et } \dot{\mathrm{x}}_1\,(\mathrm{t}=0)=\dot{\mathrm{x}}_2\,(\mathrm{t}=0)=0$$

Exercice N°3:

Soit le système mécanique, constitué de deux pendules simples de longueur L et de masses m_1, m_2 représentés dans la figure ci contre comme suit :



1- Quel est le nombre de degré de liberté ?

Donner le type du couplage ?

2- Etablir le Lagrangien du système.

3- Donner les équations différentielles du mouvement pour les faibles oscillations.

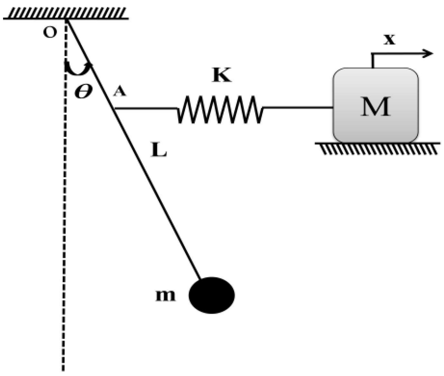
4- On pose les constantes suivantes : $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ et $\mu = \frac{m_1}{m_2}$.

Déterminer dans ce cas les pulsations propres du système ω_1 et ω_2 en fonction des paramètres ω_0 et μ.

5- Déterminer les solutions générales.

Exercice N°4:

On considère le système oscillatoire mécanique de la figure ci-contre, la masse M glisse sans frottement sur un plan horizontal autour de sa position de repos et entraine par l'intermédiaire d'un ressort de constante K le pendule (de masse ponctuelle m et de longueur L) dans son mouvement. Le ressort horizontal soude à la masse M et en A au pendule relie les deux oscillateurs. ($\overline{OA} = a$)



1- Décrire le système et donner le type du couplage ?

2- Déterminer l'énergie cinétique E_c et potentielle E_P du système.

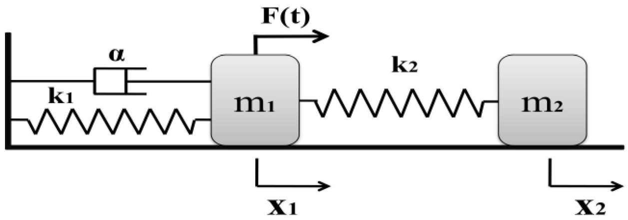
3- Ecrire les équations du mouvement en fonction de x et θ.

4- On prend : $M = m, a = \frac{L}{4}, mg = \frac{15}{16}KL, L = 1(m)$. Calculer les pulsations du système et déduire les modes propres.

5- Donner les équations du mouvement x(t) et θ(t).

Exercice N°5 :

On considère le système représenté sur la figure ci-contre. Sur la masse m_1 agit une force horizontale sinusoïdale de pulsation ω et d'amplitude F_0. Les déplacements des masses m_1 et m_2 par rapport à leurs positions d'équilibre sont respectivement $x_1(t)$ et $x_2(t)$.



1- Etablir les équations différentielles qui régissent le mouvement du système.

2- En utilisant les notations complexes, déduire les équations algébriques satisfaites par $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ en régime sinusoïdal permanent.

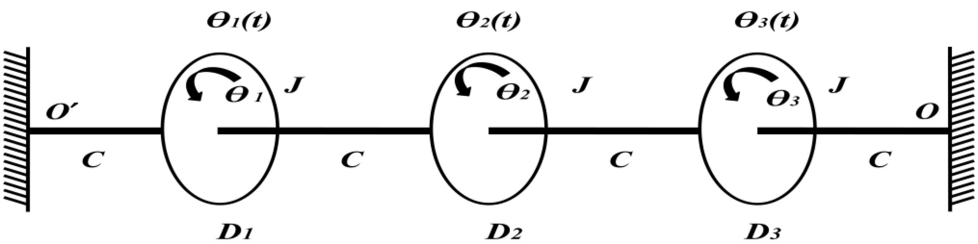
3- En calculant le rapport $\frac{\dot{x}_1(t)}{\dot{x}_2(t)}$, montrer que le mouvement des masses m_1 et m_2, ne peuvent être qu'en phase ou en opposition de phase. Déterminer les pulsations pour lesquelles $\dot{x}_1(t)$ et $\dot{x}_2(t)$ sont en phase.

Exercice N°6 :

Sur un arbre OO' horizontal et fixe, de masse négligeable, encastré à ses extrémités O et O', sont fixés trois disques $(D_1), (D_2)$ et (D_3) de centres respectifs O_1, O_2 et O_3 et de même moment d'inertie J par rapport à leur axe commun OO'. On désignera $\theta_1(t)$ $\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$, les angles angulaires de rotation de chacun des trois disques par rapport à leur position de repos. voire la figure ci-dessous.

Les quatre partis O_1O_2, O_1O_2, O_2O_3de et O_3O'de l'arbre ont même constante de torsion *C*.

On posera la constante : $\omega_0^2 = \frac{C}{J}$



1- Déterminer le Lagrangien de ce système.

2- Etablir les équations différentielles du second ordre vérifiées par les angles $\theta_1(t)$,$\theta_2(t)$ et $\theta_3(t)$.

3- En déduire les trois pulsations propres ω_1, ω_2 et ω_3 de ce système en fonction de ω_0.

4- Calculer l'énergie mécanique totale E de cette chaîne de trois disques, pour chacun des modes propres, en fonction de C et de l'amplitude angulaire θ_1 du disque D_1.

5- On applique au seul disque D_1 un couple moteur de moment sinusoïdal, de pulsation ω et d'amplitude Γ_0. $\Gamma = \Gamma_0 \cos\omega t$.

-Etablir en fonction du paramètre $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, les amplitudes angulaires A_1, A_2 et A_3 de chacun des disques en régime forcé.

-Pour quelles valeurs de X ce système est-il en résonance ?