Chapitre IV :

Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

IV.1 Introduction

D'après le chapitre précèdent, on a constaté que l'amortissement fait réduire l'amplitude de vibration, et l'amortissement des oscillations était dû à une diminution de l'énergie mécanique, pour vaincre les frottements responsables des pertes d'énergie et des ralentissements des systèmes en mouvements, il faut appliquer une force extérieure qu'on appelle excitation.

IV.2 Équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle des oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext} \qquad \text{(IV.1)}$$

a) Pour un mouvement de translation l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F_{ext} \qquad \text{(IV.2)}$$

b) Pour un mouvement de rotation, l'équation s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \mathcal{M}(F_{ext}) \qquad \text{(IV.3)}$$

F_{ext}: la force généralisée à une force extérieure.

$\mathcal{M}(F_{ext})$: Moment de la force appliqué.

$$\mathcal{M}(F_{ext}) = F_{ext} \times L \qquad \text{(IV.4)}$$

- Le Moment : caractérise la capacité d'une force à tourner un objet autour d'un point.
- L : est la distance droite d'action de la force.

L'équation différentielle du mouvement vibratoire forcé est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \qquad \text{(IV.5)}$$

IV.2.1 Exemple d'un système forcé amorti (système masse-ressort-amortisseur)

Dans la figure ci-contre, la masse m est fixée à un ressort K et un amortisseur α.

On applique à la masse M une force $F_{ext} = F_0 \sin\Omega t$

L'énergie cinétique du système : $E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$

L'énergie potentielle du système : $E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}K\,x^2$

La fonction de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha.\dot{x}^2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha.\dot{x}$$

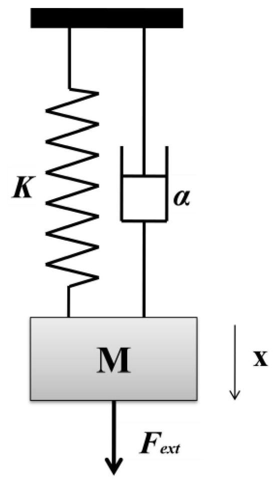


Figure IV.1 système masse-ressort

En remplaçant dans l'équation de Lagrange on aura :

$$M\ddot{x} + \alpha.\dot{x} + Kx = F_{ext} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{M}\dot{x} + \frac{K}{M}x = \frac{F_0}{M}\sin\Omega t$$

C'est l'équation différentielle du mouvement d'un système amorti forcé à 1ddL.

De la forme : $\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A_0 \sin\Omega t$

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{\alpha}{2M} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{M}} \\ A_0 = \dfrac{F_0}{M} \end{cases}$$

IV.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle du mouvement des oscillations forcées est une équation différentielle du second ordre avec un second membre. La solution de cette équation différentielle du second ordre est égale à la somme de la solution de l'équation sans second membre (ou solution homogène (transitoire)) $q_H(t)$ et d'une solution particulière (permanente) de l'équation avec second membre $q_P(t)$.

$$q(t) = q_H(t) + q_P(t) \qquad \text{(IV.6)}$$

L'équation sans second membre $q_H(t)$ est déjà traitée, cette solution contient dans tous les cas le terme exponentiel $e^{-\delta t}$. Il faut signaler qu'au début du mouvement x(t) représente le régime transitoire. Au fil du temps la solution homogène $q_H(t)$ devient négligeable la solution particulière $q_P(t)$ qui définit le régime permanant. Ainsi la solution totale dans ce cas, est de forme : $q(t) \cong q_P(t)$.

Quand la solution homogène est non négligeable et non nulle, le régime est dit transitoire.

IV.3.1 Excitation sinusoïdale :

Dans le cas où l'excitation est une fonction sinusoïdale de la forme : $A(t) = A_0 cos(\Omega t)$.

La solution totale s'écrit alors comme suit :

$$q(t) = q_P(t) = Acos(\Omega t + \varphi) \qquad \text{(IV. 7)}$$

Où la constante A représente l'amplitude de la solution totale et φ le déphasage.

IV.3.1.1 Calcul de l'amplitude A

L'équation du mouvement devienne :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A_0 cos(\Omega t) \qquad \text{(IV. 8)}$$

L'excitation A(t) sous forme complexe est égale :

$$A(t) = A_0 e^{j\Omega t} \qquad \text{(IV. 9)}$$

On cherche la solution de l'équation différentielle sous forme complexe :

$$q(t) = q_P(t) = Ae^{j(\Omega t+\varphi)}$$

$$\dot{q}_P(t) = Aj\Omega e^{j(\Omega t+\varphi)} = j\Omega q_P(t)$$

$$\ddot{q}_P(t) = Aj^2\Omega^2 e^{j(\Omega t+\varphi)} = -\Omega^2 q_P(t)$$

$$Aj^2\Omega^2 e^{j(\Omega t+\varphi)} + 2\delta Aj\Omega e^{j(\Omega t+\varphi)} + \omega_0^2 Ae^{j(\Omega t+\varphi)} = A_0 e^{j\Omega t}$$

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]Ae^{j(\Omega t+\varphi)} = A_0 e^{j\Omega t}$$

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]Ae^{j\varphi} = A_0$$

On divise sur $e^{j\varphi}$ et on trouve :

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]A \ = A_0 e^{-j\varphi} \qquad (1)$$

Le conjugué de cette équation est la suivante :

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]A \ = A_0 e^{j\varphi} \qquad (2)$$

$$(1) \times (2) \Rightarrow \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2\right]A^2 \ = {A_0}^2$$

$$\Rightarrow A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2}} \qquad (\mathrm{IV.10})$$

IV.3.1.2 Calcul de φ

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\delta\Omega j]A \ = \begin{cases} A_0 e^{-j\varphi} \\ A_0(\cos\varphi - j\sin\varphi) \end{cases}$$

$$A(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2A\delta\Omega j \ = A_0\cos\varphi - jA_0\sin\varphi \ \ \Rightarrow \begin{cases} A(\omega_0^2 - \Omega^2) = A_0\cos\varphi \\ 2A\delta\Omega = -A_0\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\tan\varphi = \frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \Rightarrow$$

$$\varphi = -Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \qquad (\mathrm{IV.11})$$

Donc :

$$q_P(t) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^{\,2} + (2\delta\Omega)^2}}\, cos\left(\Omega t + Arctg\,\frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right) \qquad (\mathrm{IV.12})$$

IV.3.2 la pulsation de Résonnance

La pulsation de Résonnance Ω_R : La pulsation de l'excitation (la fréquence) pour laquelle l'amplitude est maximale.

L'amplitude $A(\Omega)$ est maximale lorsque $\frac{dA}{d\Omega} = 0$.

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2] = 0 \Rightarrow$$

$$\Omega[(\omega_0^2-\Omega^2) - 2\delta^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{cases}$$

La pulsation de résonnance est donnée par :

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \qquad (\text{IV}.13)$$

Dans le cas des faibles amortissements ($\delta << \omega_0$), la fréquence de résonance est très peu différente de la pulsation propre $\Omega_R \cong \omega_0$, on obtient :

$$A(\Omega) = \frac{A_0}{2\delta\omega_0}$$

Pour qu'il y résonance : $\delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, on dit que le système entre en résonance $(\Omega = \Omega_R)$ et l'amplitude A est maximale :

$$A(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

$$\lim_{\Omega\to\infty} A(\Omega) = 0$$

Remarque :

- Pour qu'il y ait résonance il faut que $\omega_0^2 - 2\delta^2 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ l'amortissement doive être faible.
- L'amplitude de vibration atteint un maximum quand $\Omega_R \cong \omega_0$.
- Si $\delta = 0$ (système non amorti) : l'amplitude tend vers l'infini or en réalité, les systèmes sont tous amortis donc l'amplitude n'est jamais infini.

IV.3.3 Bande passante

On définit par bande passante, la bande des pulsations autour de $\Omega_R \cong \omega_0$ pour lesquelles $A(\Omega) > \frac{A_{max}(\Omega_R)}{\sqrt{2}}$,

La bande passante B s'écrit :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 \qquad \text{(IV.14)}$$

Les deux pulsations Ω_2 et Ω_1, situées de part et d'autre de la pulsation ω_0 et pour lesquelles $A(\Omega) = \frac{A_{max}(\Omega_R)}{\sqrt{2}}$, sont appelées pulsations de coupure.

Le calcul de B consiste à rechercher les deux pulsations pour lesquelles $A(\Omega) = \frac{A_{max}(\Omega_R)}{\sqrt{2}}$.

On obtient l'expression de la bande passante B :

$$B = \Omega_2 - \Omega_1 = 2\delta \qquad \text{(IV.15)}$$

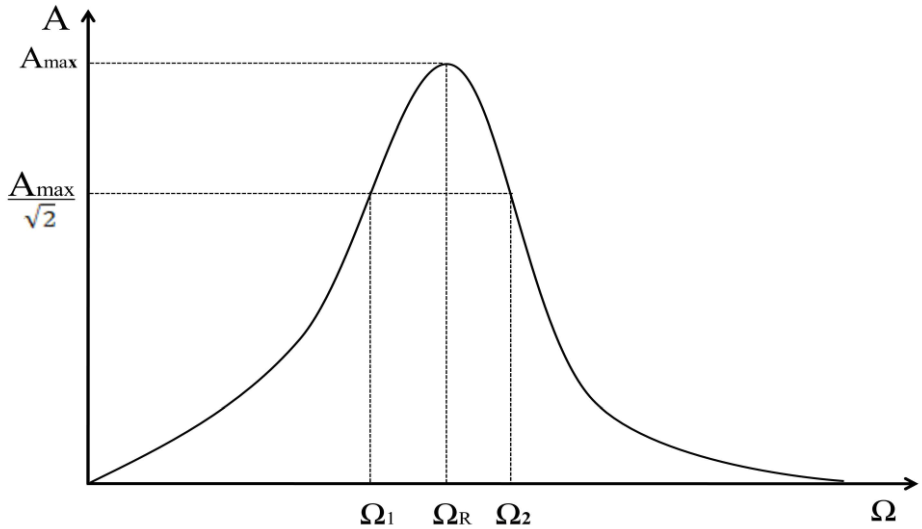


Figure IV.2 Amplitude A en fonction de Ω (bande passante)

IV.3.4 Coefficient de qualité

Le coefficient de qualité est défini par le rapport de la pulsation propre ω_0 à la largeur de bande passante B.

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\delta} \qquad \text{(IV.16)}$$

IV.3.5 Excitation périodique

Soit une excitation périodique appliquée à un système amorti à un degré de liberté. L'équation différentielle qui régit ce système s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \qquad (IV.17)$$

La fonction $A(t)$ étant périodique, de période T, son développement de Fourier s'écrit :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \qquad (IV.18)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \qquad (IV.19)$$

La réponse permanente peut être calculée par :

$$q(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\omega t + \varphi) + b_n \sin(n\omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \qquad (IV.20)$$

IV.4 Impédance mécanique

Un système mécanique soumis à une force sinusoïdale $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$, le point d'application de cette force se déplace avec une vitesse $v(t) = V_0\cos(\Omega t + \varphi)$.

L'impédance mécanique d'entrée du système mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force F et de la vitesse $\boldsymbol{v}$.

$$Z_E = \frac{F}{v} \qquad (IV.21)$$

IV.4.1 Impédances mécaniques

- **Masse**

  La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$F = m\frac{dv}{dt} \qquad (IV.22)$$

L'impédance complexe d'une masse est :

$$Z_m = jm\Omega = m\Omega e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(IV. 23)}$$

La force appliquée f appliquée au ressort s'exprime en fonction de l'allongement par

$$F = kx \qquad \text{(IV. 24)}$$

k : La constante de ressort

L'impédance complexe d'un ressort est donné par :

$$Z_k = \frac{k}{j\Omega} = -j\frac{k}{\Omega} = \frac{k}{\Omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad \text{(IV. 25)}$$

- **Amortisseur :**

La force appliquée est reliée à la vitesse par :

$$F = \alpha v \qquad \text{(IV. 26)}$$

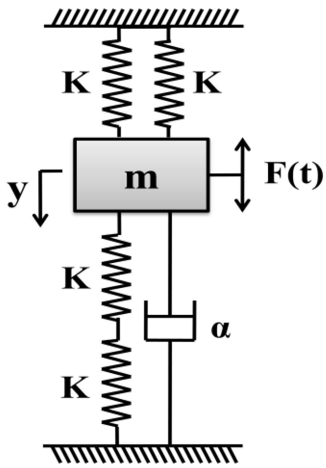
On en déduit l'impédance complexe d'un amortisseur : $Z_\alpha = \alpha$

IV.5 Exercices résolus

Exercice N°1 :

Un système mécanique est constitué de masse m=0.5 kg et d'amortisseur de coefficient de frottement $\alpha = 2$ kg/s relié à des ressorts de même constante de raideur K=20N/m.

Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$.



1- Calculer la constante de raideur équivalente K_{eq}.

2- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D.

3- Trouvez le Lagrangien puis l'équation du mouvement.

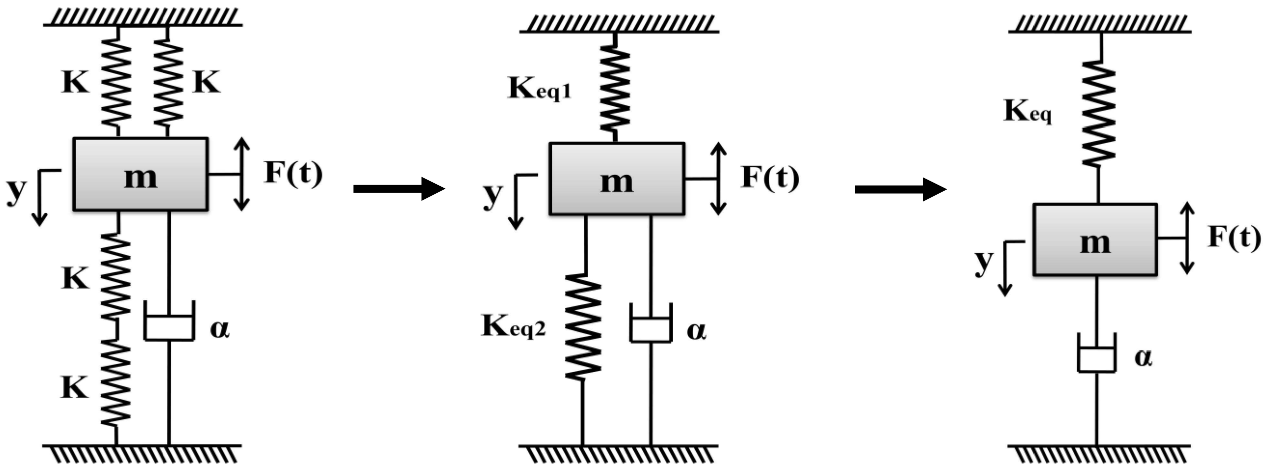
4- Trouvez sa solution en régime permanant (Préciser son amplitude A et sa phase φ).

5- Donnez la condition de résonance et la pulsation de résonance Ω_R.

6- Donner la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$

Solution N°1 :

1- la constante de raideur équivalente K_{eq} :



$$K_{eq1} = K + K = 2k$$

$$\frac{1}{K_{eq2}} = \frac{1}{K} + \frac{1}{K} \Rightarrow K_{eq1} = \frac{K \times K}{K + K} = \frac{K}{2}$$

$$K_{eq} = K_{eq1} + K_{eq2} = 2k + \frac{K}{2} = \frac{5K}{2}$$

2- L'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p, et la fonction de dissipation E_D :

- l'énergie cinétique: $E_c = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$
- l'énergie potentielle: $E_P = E_{P(Keq)} = \frac{1}{2}K_{eq}\,y^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{5K}{2}\right)\,y^2 = \frac{5}{4}Ky^2$
- l'énergie de dissipation : $E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{y}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$

3- Le Lagrangien puis l'équation du mouvement :

Fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{5}{4}Ky^2$

Formalisme Lagrangien : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{\partial E_D}{\partial \dot{y}} + F$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{5}{2}Ky$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{y}} = \alpha\dot{y}$$

$$m\ddot{y} + \frac{5}{2}Ky = -\alpha\dot{y} + F \Rightarrow M\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \frac{5}{2}Ky = F$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} + \frac{5K}{2m}y = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t).$$

L'équation est de la forme : $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A_0\cos(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2m} = \frac{2}{2 \times 0.5} = 2\ s^{-1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{5K}{2m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{5K}{2m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\ rad.s^{-1}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m}$$

4- La solution de l'équation de mouvement en régime permanant :

$$y(t) = y_P(t) = A\cos(\Omega t - \varphi)$$

L'amplitude est : $A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

$$y_P(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\cos\left(\Omega t - Arctg\,\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

5- La condition de résonance et la pulsation de résonance Ω_R :

La pulsation de résonance est Ω_R telle que : $\left.\frac{dA}{d\Omega}\right|_{\Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

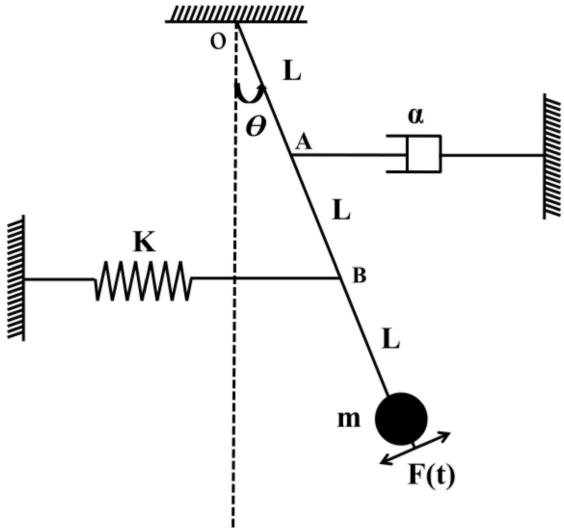
6- La bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$

Pour un amortissement faible $\delta \ll \omega_0$:

$\Omega_{C_1} \approx \omega_0 - \delta$ et $\Omega_{C_2} \approx \omega_0 + \delta$, et $B = \Omega_{C_2} - \Omega_{C_1} = 2\,\delta$.

Exercice N°2 :

Soit une masse ponctuel de masse m est soudée à l'extrémité de la tige de masse négligeable et de longueur 3L. Le point A de la tige tel que $\overline{OA} = L$, est relié à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux $\boldsymbol{\alpha}$.



Le point B de la tige tel que $\overline{OB} = 2L$, est relié à un bâti fixe par ressort de raideur K. Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $F(t) = F_0\cos(\Omega t)$.

1- Trouver l'énergie cinétique E_c, potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D ($\theta << 1$).

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement en θ, déterminer les constantes δ, ω_0 et A_0.

3- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

4- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

5- Représenté graphiquement la variation de l'amplitude A en fonction de Ω.

6- Donner les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

7- Calculer Ω_R, B et le facteur de qualité Q si m=1 Kg, K=15 N/m, L=0.5 m, α=0.5 N.s/m, g=10 m.s^{-2}.

Solution N°2:

1− L'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D :

- Energie cinétique :

$E_C = E_{Cm} = \frac{1}{2} J_{m/o}\dot{\theta}^2,\ J_m = m(3L)^2 = 9mL^2$

$$E_c = \frac{1}{2}(9mL^2)\dot{\theta}^2 = \frac{9}{2}\ mL^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(m)} + E_{P(K)}$$

$$E_p = mgh + \frac{1}{2}Kx_K^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$x_K = x_2 = 2L\sin\theta \Rightarrow x = 2L\,\theta$$

$$h = 3L(1-\cos\theta) \Rightarrow h = 3L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{3}{2}L\theta^2$$

$$E_p = \frac{3}{2}mgL\theta^2 + \frac{1}{2}K4L^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{3}{2}mgL\theta^2 + 2KL^2\theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}(\ 3mgL + 4KL^2)\ \theta^2$$

- Fonction de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_1^2$$

$$x_\alpha = x_1 = L\sin\theta \Rightarrow x = L\,\theta$$

$$E_D = \frac{1}{2}\ \alpha L^2\dot{\theta}^2$$

2- L'équation différentielle de mouvement :

Fonction de Lagrange : $L = E_c - E_P \Rightarrow L = \frac{9}{2}\ mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\ 3mgL + 4KL^2)\ \theta^2$

Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} + \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 9\ mL^2\dot{\theta}\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 9\ mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(3mgL + 4KL^2)\theta$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2 \dot{\theta}$$

$$\mathcal{M}(F_{ext}) = F.3L$$

$$9\,mL^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (3mgL + 4KL^2)\theta = F_0\cos(\Omega t)3L$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha L^2}{9mL^2}\dot{\theta} + \frac{(3mgL + 4KL^2)}{9mL^2}\theta = \frac{3F_0L}{9mL^2}\cos(\Omega t)$$

Donc l'équation différentielle de mouvement s'écrit sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{9m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{3mL} + \frac{4K}{9m}\right)\theta = \frac{F_0}{3mL}\cos(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{9m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{18m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{3mL} + \frac{4K}{9m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{3mL} + \frac{4K}{9m}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{3mL}$$

3- La solution de l'équation de mouvement en régime permanant :

$$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)cos(\Omega t - \varphi)$$

L'amplitude est : $A = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A = \frac{\frac{F_0}{3mL}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{3mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = +Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}$

$$\theta(t) = \frac{F_0}{3mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}\,cos\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right)$$

4- La condition de résonnance :

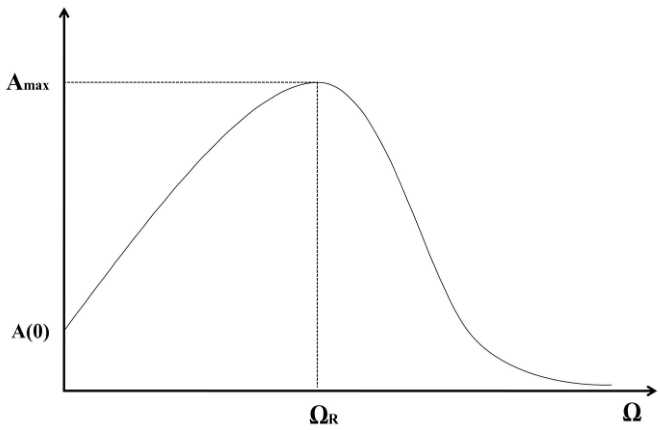
$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

-La pulsation de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2}}\right]=0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+(2\delta\Omega)^2\right]=0 \Rightarrow$$

$$-4\Omega\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2-2\delta^2\right]=0 \;\Rightarrow\; \Omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

5- la variation de l'amplitude A en fonction de Ω



- $A(\Omega=0)=\frac{A_0}{\omega_0^2}=\frac{F_0}{3mL\omega_0^2}$
- $A_{\max}(\Omega_R)=\frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}=\frac{F_0}{6mL\delta\omega}$

Avec $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ c'est la pseudo-pulsation

- $\lim_{\Omega\to\infty} A(\Omega)=0$

6- Les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$:

Pour un amortissement faible $\delta \ll \omega_0$:

$\Omega_{C_1} \approx \omega_0-\delta$ et $\Omega_{C_2} \approx \omega_0+\delta$, et $B=\Omega_{C_2}-\Omega_{C_1}=2\,\delta$.

7- A.N :

La pulsation de résonance Ω_R :

- $\delta=\frac{\alpha}{18m}=\frac{2}{18\times1}=0{,}111\ s^{-1}$
- $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{3mL}+\frac{4K}{9m}}=\sqrt{\frac{10}{3\times1\times0.5}+\frac{4\times20}{9\times1}}=3{,}94\ rad.s^{-1}$

$$\Omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}=\sqrt{3{,}94^2-2\times(0{,}111)^2}=3{,}937\,rad.s^{-1}$$

La bande passante B :

- $\Omega_{C_1} \approx \omega_0-\delta \approx 3{,}94-0{,}111 \approx 3{,}829$
- $\Omega_{C_2} \approx \omega_0+\delta \approx 3{,}94+0{,}111 \approx 4{,}051$

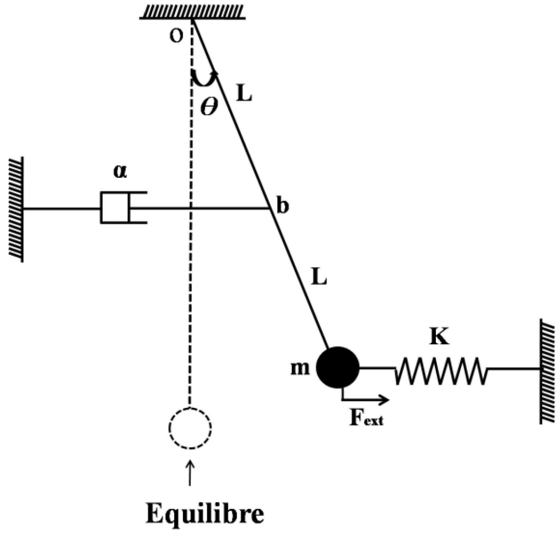
$B=\Omega_{C_2}-\Omega_{C_1}=4{,}051-3{,}829=0{,}222$

Le facteur de qualité est :

$$Q=\frac{\omega_0}{2\delta}=\frac{3{,}94}{2\times0{,}111}=17{,}74 \Rightarrow \quad Q=17{,}74$$

Exercice N°3 :

On considère le système mécanique représenté à la figure ci-contre. La tige de masse négligeable et de longueur 2L peut tourner autour de l'articulation O dans le plan de la figure. Le milieu de la tige (point b) est relié à un bâti par un amortisseur de coefficient de frottement α et son extrémité libre porte une masse m à laquelle est attaché un ressort de raideur K. On applique une force extérieure $\vec{F}_{ext} = F_0\cos(\Omega t)$ sur la masse ponctuelle m.



1- montrer que l'équation différentielle du mouvement peut se mettre sous la forme :

$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

2- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

3- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

4- Représenté graphiquement la variation de l'amplitude A en fonction de Ω.

5- Si on enlève l'amortisseur , que ce passe-t-il ?

Solution N°3 :

1- L'équation différentielle du mouvement :

- L'énergie cinétique E_c:

$E_C = E_{Cm} = \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2,\ J_m = m(2L)^2 = 4mL^2$

$$E_c = \frac{1}{2}(4mL^2)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$E_P = E_{P(m)} + E_{P(K)}$

$$E_p = mgh + \frac{1}{2}Kx_K^2$$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow \sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$x_K = 2L\sin\theta \Rightarrow x_K = 2L\,\theta$

$$h = 2L(1 - \cos\theta) \Rightarrow h = 2L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = L\theta^2$$

$$E_p = mgL\theta^2 + \frac{1}{2}K4L^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(2mgL + 4KL^2)\,\theta^2$$

- La fonction de dissipation E_D:

$$x_\alpha = L\sin\theta \Rightarrow x_\alpha = L\,\theta$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}_\alpha^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$$

La Fonction de Lagrange : $L = \frac{1}{2}(4mL^2)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\,2mgL + 4KL^2)\,\theta^2$

Le Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(F_{ext})$$

Ou :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \frac{\partial E_P}{\partial\theta} = \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = 4mL^2\dot{\theta} \;\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 4mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial\theta} = (\,2mgL + 4KL^2)\theta$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\mathcal{M}(F_{ext}) = 2LF_0\cos(\Omega t)$$

$$4mL^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (\,2mgL + 4KL^2)\theta = 2LF_0\cos(\Omega t)$$

Donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{2L} + \frac{K}{m}\right)\theta = \frac{F_0}{2mL}\cos(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{4m} \Rightarrow \;\delta = \frac{\alpha}{8m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{g}{2L} + \frac{K}{m} \Rightarrow \ \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{2L} + \frac{K}{m}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{2mL}$$

2- la solution permanente de l'équation du mouvement :

$$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t - \varphi)$$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^{\,2}+(2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{2mL}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^{\,2}+(2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{2mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^{\,2}+(2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}$

$$\theta(t) = \frac{F_0}{2mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^{\,2}+(2\delta\Omega)^2}}\ sin\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right)$$

3- La condition de résonnance :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

-La pulsation de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^{\,2}+(2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2-\Omega^2)^{\,2}+(2\delta\Omega)^2] = 0 \Rightarrow$$

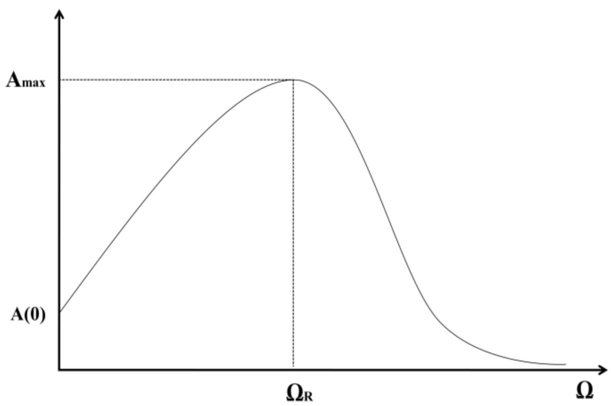
$$-4\Omega[(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2] = 0 \ \Rightarrow\ \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

4- la variation de l'amplitude A en fonction de Ω

- $A(\Omega = 0) = \frac{A_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{2mL\omega_0^2}$
- $A_{\max}(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} = \frac{F_0}{4mL\delta\omega}$

Avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ c'est la pseudo-pulsation

- $\lim\limits_{\Omega\to\infty} A(\Omega) = 0$

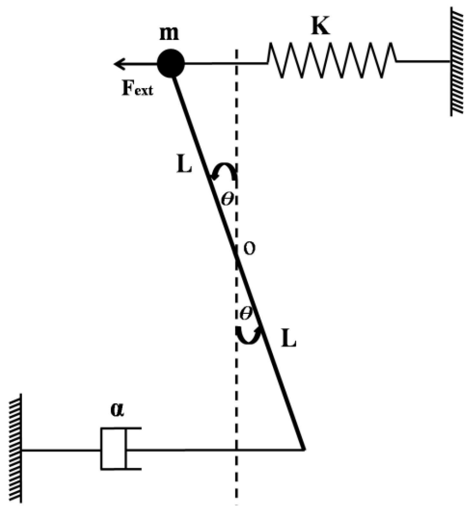


5- Si on enlève l'amortisseur :

$\delta = 0 \Rightarrow \Omega_R = \omega_0$ et $A(\Omega_R) = A(\omega_0) \Rightarrow \lim\limits_{\Omega\to\omega_0}\left[\frac{A_0}{\omega_0^2-\Omega^2}\right] = \infty$

L'amplitude t'envers l'infini , signifier le système se casse.

<u>Exercice N°4 :</u>



Un système mécanique est constitué d'une tige de longueur 2L et de masse négligeable peut tourner autour d'un axe passant par O dans le plan de la figure.une masse ponctuelle m est soudée à l'extrémité de la tige.

Aux deux extrémités de cette tige. Sont également attachés un ressort de raideur K et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α.

Le système est soumis à une force extérieure $F_{ext} = F_0 \sin(\Omega t)$.

Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre, le système effectue des oscillations de faibles amplitudes.

1- Déterminer l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D.

2- Calculer le moment de la force $\mathcal{M}_F$.

3- Etablir l'équation différentielle du mouvement en θ, déterminer les constantes δ, ω_0 et A_0.

4- Trouver la solution permanente de l'équation du mouvement (Préciser son amplitude A et sa phase φ).

5- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

6- Pour $\delta = 0$, que ce passe-t-il ?

<u>Solution N°4 :</u>

1- L'énergie cinétique, potentiel et la fonction de dissipation :

- L'énergie cinétique E_c:

$E_C = E_{Cm} = \frac{1}{2} J_{m/o} \dot{\theta}^2, \; J_{m/o} = mL^2$

$$E_c = \frac{1}{2} mL^2 \dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$E_P = E_{P(m)} + E_{P(K)}$

$E_p = mgh + \frac{1}{2}Kx^2$

Faibles amplitudes $\theta \ll \Rightarrow sin\theta \approx \theta,\ \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$x = L\sin\theta \Rightarrow x = L\,\theta$

$h = L(1-\cos\theta) \Rightarrow h = L\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2}\right) \Rightarrow h = \frac{L\theta^2}{2}$

$E_p = \frac{1}{2}mgL\theta^2 + \frac{1}{2}KL^2\theta^2 \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}(\ mgL + KL^2)\ \theta^2$

- La fonction de dissipation E_D:

$x_\alpha = L\sin\theta \Rightarrow x_\alpha = x = L\,\theta$

$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

$E_D = \frac{1}{2}\alpha L^2\dot{\theta}^2$

2- Le moment de la force :

$\mathcal{M}_F = \|\overrightarrow{Om} \wedge \vec{F}\| = F.d.\sin(\overrightarrow{Om}, \vec{F}) = F.L.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = F.L.\cos\theta = F.L$

3- L'équation du mouvement :

La Fonction de Lagrange : $L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(\ mgL + KL^2)\theta^2$

Le Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = \mathcal{M}(F_{ext})$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = mL^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -\left(\ mgL + KL^2\right)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\mathcal{M}(F_{ext}) = F_0 L\sin(\Omega t)$$

$$mL^2\ddot{\theta} + \alpha L^2\dot{\theta} + (mgL + KL^2)\theta = F_0 L\sin(\Omega t)$$

Donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{K}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta = \frac{F_0}{mL}\sin(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\sin(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m} + \frac{g}{L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m} + \frac{g}{L}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{mL}$$

4- la solution permanente de l'équation du mouvement :

$$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)sin(\Omega t + \varphi)$$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{mL}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = -Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}$

$$y_P(t) = \frac{F_0}{mL\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}\, sin\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2-\Omega^2)}\right)$$

5- la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R:

- La condition de résonnance :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

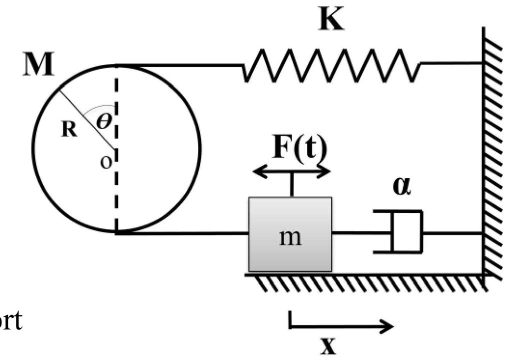
- La pulsation de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$-4\Omega\left[\omega_0^2-\Omega^2-2\delta^2\right] = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

6- Pour $\delta = 0 \Rightarrow \Omega_R = \omega_0 \Rightarrow A_{max}(\Omega_R) \to \infty \Rightarrow$ le système se casse.

Exercice N°5 :



Dans le système ci-contre, un disque homogène de masse M et de rayon R peut tourner librement avec un angle θ autour de son axe fixe. La masse m sur le plan horizontal est reliée à un amortisseur de coefficient α et au disque par un fil inextensible et non glissant. A l'équilibre le ressort était non déformé. Une excitation sinusoïdale $F(t) = F_0\cos\Omega t$ est appliquée sur la masse m. Le moment d'inertie du disque autour de son axe est : $J_{/0} = \frac{1}{2}MR^2$.

1- Trouver l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable x.

2- Trouver le Lagrangien et déduire l'équation du mouvement.

3- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

4- Déduire la pulsation de résonance Ω_R et donner le facteur de qualité Q du système faiblement amorti.

5- Représenté graphiquement la variation de l'amplitude A en fonction de Ω.

Solution N°5 :

1- L'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D en fonction de la variable x :

- L'énergie cinétiqueE_c :

$$E_c = E_{cM} + E_{cm}$$

$$E_c = \frac{1}{2}J_{/0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} = \frac{1}{2}Kx_K^2 = \frac{1}{2}Kx^2$$

- L'énergie de dissipation E_D:

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha(\dot{x}_\alpha)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

2- Le Lagrangien est :

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

Le Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} + F$$

Où

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_P}{\partial x} = F$$

$$\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$$

$$\frac{\partial E_P}{\partial x} = Kx$$

$$\left(m + \frac{M}{2}\right)\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Kx = F$$

donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m + \frac{M}{2}}\dot{x} + \frac{K}{m + \frac{M}{2}}x = \frac{F_0}{m + \frac{M}{2}}\cos\Omega t$$

L'équation différentielle de système est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0\cos(\Omega t)$

Par identification on trouve :

Le coefficient d'amortissement δ :

$$2\delta = \frac{\alpha}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{M + 2m}$$

La pulsation propre ω_0 :

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m + \frac{M}{2}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m + \frac{M}{2}}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{m + \frac{M}{2}}$$

3- La solution permanente de l'équation du mouvement :

$$x(t) = x_P(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi)$$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m + \frac{M}{2}}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} = \frac{F_0}{\left(m + \frac{M}{2}\right)\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = -Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

$$x(t) = \frac{F_0}{\left(m + \frac{M}{2}\right)\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

4- La pulsation de résonance est Ω_R telle que : $\left.\frac{dA}{d\Omega}\right|_{\Omega = \Omega_R} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

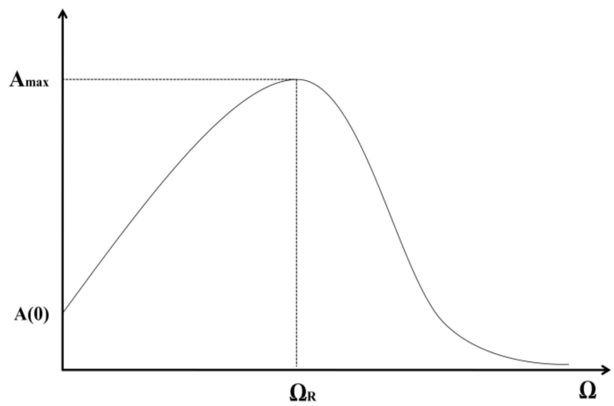
Le facteur de qualité Q: $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$

5- La variation de l'amplitude A en fonction de Ω :

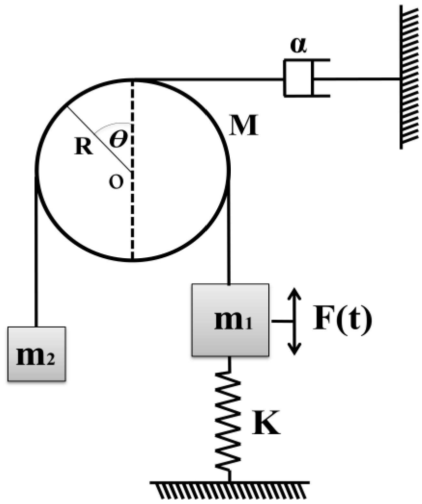
- $A(\Omega = 0) = \frac{A_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{\left(m + \frac{M}{2}\right)\omega_0^2}$
- $A_{\max}(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{2\left(m + \frac{M}{2}\right)\delta\omega}$

Avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ c'est la pseudo-pulsation

- $\lim_{\Omega \to \infty} A(\Omega) = 0$



Exercice N°6 :



Soit un disque de masse négligeable enroulé par un fil inextensible et non glissant, comme le montre la figure ci-contre , On admet que les frottements existent, la masse m_1 effectue des oscillations forcées sous l'effet d'une force sinusoïdale : $F(t) = F_0\cos\Omega t$.

On donne le moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$.

1- Etablir l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ.

2- Donner sa solution en régime permanent.

3- Quelle est la fréquence de résonance pour que le module de l'amplitude soit maximum.

4- Donner les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

5- Calculer la pulsation de résonance Ω_R , la bande passante B et le facteur de qualité Q si : $m_1 = 2\text{kg}, m_2 = 1\text{kg}, K = 10\ \text{N/m}$ et $\alpha = 0.1\ \text{N.s/m}$

6- Pour $\delta = 0$, que ce passe-t-il ?

Solution N°6

1- l'équation différentielle du mouvement en fonction de variable θ:

- L'énergie cinétique E_c :

$$E_c = E_{cm_1} + E_{cm_2}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2$$

$$x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle E_p:

$$E_P = E_{P(K)} + E_{P(m_1)} + E_{P(m_2)}$$

$$E_P = \frac{1}{2}KX^2 + m_1gx - m_2gx$$

$$E_P = \frac{1}{2}KR^2\theta^2 + m_1gR\theta - m_2gR\theta$$

La condition d'équilibre élimine tous les termes linéaires

$$E_P = \frac{1}{2}KR^2\theta^2$$

- la fonction de dissipation E_D :

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha\left(\dot{X}_\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha\dot{X}^2$$

$$E_D = \frac{1}{2}\alpha R^2\dot{\theta}^2$$

Le Lagrangien est :

$$L = E_c - E_P = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}KR^2\theta^2$$

Formalisme Lagrangien :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial E_D}{\partial\dot{\theta}} + F_{ext}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = F_{ext}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m_1 + m_2)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -KR^2\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$$

$$F_{ext} = F_0\cos\Omega t$$

$$(m_1 + m_2)R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + KR^2\theta = F_0\cos\Omega t$$

donc l'équation différentielle de mouvement est sous la forme suivante :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{(m_1 + m_2)}\dot{\theta} + \frac{K}{(m_1 + m_2)}\theta = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)R^2}\cos(\Omega t)$$

L'équation est de la forme : $\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A_0 \sin(\Omega t)$

Par identification on trouve :

$$2\delta = \frac{\alpha}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{2(m_1 + m_2)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{K}{(m_1 + m_2)} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{(m_1 + m_2)}}$$

$$A_0 = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)R^2}$$

3- La solution permanente de l'équation du mouvement :

$\theta(t) = \theta_P(t) = A(\Omega)cos(\Omega t + \varphi)$

L'amplitude est : $A(\Omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \Rightarrow A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} =$

$\frac{F_0}{(m_1+m_2)R^2\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}$

La phase est donnée par : $\varphi = -Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$

$$\theta(t) = \frac{F_0}{(m_1 + m_2)R^2\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}} \, sin\left(\Omega t - Arctg\frac{2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

3- La fréquence de résonance pour que le module de l'amplitude soit maximum :

L'amplitude $A(\Omega)$ est maximale si :

$$\left.\frac{dA(\Omega)}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0$$

La pulsation ou la fréquence de résonance Ω_R :

$$\frac{d}{d\Omega}\left[\frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2}}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta\Omega)^2] = 0 \Rightarrow$$

$$-4\Omega[(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2] = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

4- Les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

Pour un amortissement faible $\delta \ll \omega_0$:

$\Omega_{C_1} \approx \omega_0 - \delta$ et $\Omega_{C_2} \approx \omega_0 + \delta$, et $B = \Omega_{C_2} - \Omega_{C_1} = 2\,\delta$.

7- La pulsation de résonance Ω_R , la bande passante B et le facteur de qualité Q :

La pulsation de résonance Ω_R :

- $\delta = \frac{\alpha}{2(m_1+m_2)} = \frac{0.3}{2\times(1+0,5)} = 0,1\ s^{-1}$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{(m_1+m_2)}} = \sqrt{\frac{15}{1+0.5}} = 6\ rad.s^{-1}$

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{6^2 - 2\times(0,1)^2} = 5.99\, rad.s^{-1}$$

La bande passante B :

- $\Omega_{C_1} \approx \omega_0 - \delta \approx 5,99 - 0,1 \approx 5,89$
- $\Omega_{C_2} \approx \omega_0 + \delta \approx 5,99 + 0,1 \approx 6,09$

$B = \Omega_{C_2} - \Omega_{C_1} = 6,09 - 5.89 = 0,2$

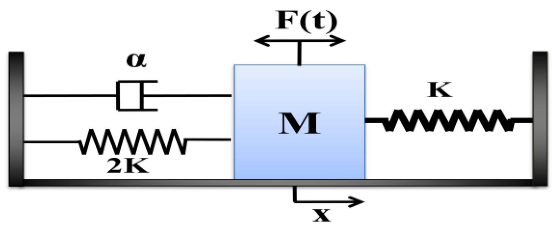
Le facteur de qualité est :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{6}{2\times 0,1} = 30 \Rightarrow \quad Q = 30$$

7- Pour $\delta = 0 \Rightarrow \Omega_R = \omega_0 \ \Rightarrow A_{max}(\Omega_R) \to \infty \Rightarrow$ le système se casse.

IV.6 Exercices supplémentaires

<u>Exercice N°1 :</u>



Le système de la figure ci-contre est constitué d'une masse M attachée à un amortisseur de coefficient d'amortissement visqueux $\boldsymbol{\alpha}$ et à deux ressorts :

le premier de masse négligeable et de constante de raideur 2K, le deuxième de masse m et de constante de raideur K. On applique à la masse m une force $F(t) = F_0 \sin\Omega t$.

1- Donner l'énergie cinétiqueE_c, l'énergie potentielle E_p et la fonction de dissipation E_D.

2- Ecrire l'équation différentielle du mouvement, ainsi les constantes δ, ω_0 et A_0.

3- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

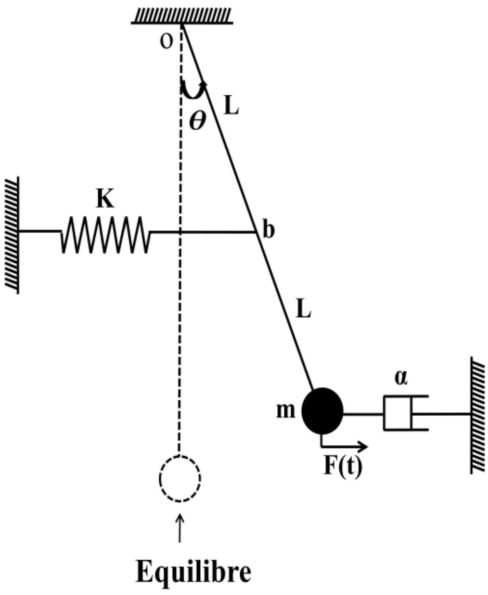
4- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.

5- Donner la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$

Exercice N°2 :

On considère Le système mécanique représenté à la figure ci-contre. La tige de longueur 2L et de masse négligeable (peut tourner autour de l'articulation O).

Le milieu de la tige (point b) est relié à un bâti par un ressort de raideur K et sont extrémité libre porte une masse m à laquelle est attaché un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Le système est soumis à une excitation extérieure de mouvement $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$.



1- Trouver l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielleE_c et la fonction de dissipation E_D.

2- Trouver le Lagrangien puis l'équation du mouvement et les constantes δ, ω_0 et A_0.

3- Trouver la solution permanente de l'équation du mouvement (Préciser son amplitude A et sa phase φ).

4- Déduire la pulsation de résonance Ω_R.

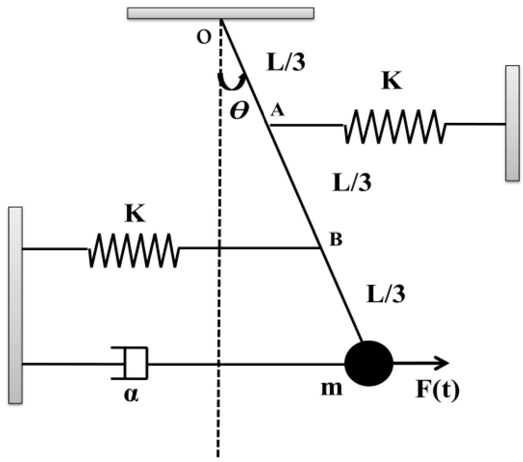
5- Représenté graphiquement la variation de l'amplitude A en fonction de Ω.

6- Donner les pulsations de coupure Ω_{C_1}, Ω_{C_2} et la bande passante B pour un amortissement faible : $\delta \ll \omega_0$.

7- Calculer Ω_R, B et le facteur de qualité Q si m=0.5 Kg, K=50 N/m, L=0.5 m, α=0.2 N.s/m, g=10 m.s^{-2}.

Exercice N°3

La figure ci-contre représente un système mécanique faiblement amorti formé d'une masse m à l'extrémité d'une tige de masse négligeable est attaché a un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. Le point A de la tige est relié à un bâti par un ressort de raideur K, et aussi le point B est relié a un bâti par un ressort de raideur K. Avec (OA=AB=BC=L/3)



On applique à la masse m une force $F(t) = F_0 \sin \Omega t$

1- Etablir l'équation différentielle du mouvement en θ.

2- déterminer les constantes δ, ω_0 et A_0.

3- Donner sa solution en régime permanent en précisant l'amplitude A et la phase φ.

4- Ecrire la condition de résonnance d'amplitude et donner la pulsation de résonnance Ω_R.