

Matière : Équations Aux Dérivées Partielles
 Dimanche 28/04/2025 - Durée : 1 h et 30 m
Examen Partiel N^o1

Exercice 1 :

Soient $R > 0$ et $g(\theta)$ une fonction réelle 2π périodique et continue. On considère le problème suivant, (r, θ) désignant les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \text{ sur } D(O, R), \\ u(R, \theta) = g(\theta), \text{ sur } C(O, R). \end{cases} \quad (\mathcal{P})$$

1. En utilisant le théorème des valeur moyenne sur $\partial D(0, R) = C(0, R)$ pour les fonctions harmonique, montre que $u(0, 0) = 1$ pour $g(\theta) = 1 + 3 \sin(2\theta)$ et $R = \sqrt{2}$.
2. La solution de (\mathcal{P}) est donnée par la méthode de séparation des variables par :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

Écrire les coefficients a_n et b_n et en déduire que,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2} g(\alpha) d\alpha$$

3. Soit $G(r, r', \theta, \alpha)$ la fonction de Green pour le laplacien (en coordonnées polaires) relative au disque de centre $O(0, 0)$ et de rayon R , $D(O, R) \subset \mathbb{R}^2$. Déduire des questions précédentes expression explicite de

$$\frac{\partial G(r, R, \theta, \alpha)}{\partial r'}$$

Exercice 2 :

On considère les deux le problème de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = x + t, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \text{ (CIH)}. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{NH})$$

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^x, u_t(x, 0) = 1 \text{ (CINH)}. \end{cases} \quad (\mathcal{D}_{NH})$$

1. De quel type sont ces deux problèmes et que représente chacun deux ?.
2. En utilise la formule de D'Alembert donner la solution du problem suivant :

$$\begin{cases} U_{tt} - 4U_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x, 0, s) = 0, U_t(x, 0, s) = x + s \text{ (CIH)}. \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{DH})$$

ou' s est une paramétré réel positive, et en déduire celle du problème (\mathcal{P}_{NH})

3. Écrire la solution du problème (\mathcal{D}_{NH}) , et en déduire celle du problème

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = x + t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^x, u_t(x, 0) = 1 \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{NN})$$

Exercice 3 :

On considéré le problème suivante :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 1, u(1, t) = 0, & t \geq 0 \text{ (CL)} \\ u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1 \text{ (CI)} \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

1. Déterminer une fonction u_\circ indépendante de t solution de (\mathcal{S}) .

2. On pose $v(x, t) = u(x, t) - u_\circ$.

— Montrer que $v(x, t)$ est alors solution du problème auxiliaire suivante :

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ v(0, t) = 1, v(1, t) = 0, & t \geq 0 \text{ (CL)} \\ v(x, 0) = x^2 - 1, & 0 < x < 1 \text{ (CI)} \end{cases} \quad (\mathcal{S}_0)$$

— Résoudre le problème (\mathcal{S}_0) par la méthode de séparation de variables et en déduire $u(x, t)$ solution de (\mathcal{S}) .

Matière : Équations Aux Dérivées Partielles - Examen Partiel N^o2
Dimanche 30/04/2025 - Durée : 01 h

Exercice 1 :

(7 pts) Soit le probleme de la chaleur suivant :

$$\left(\mathcal{H}_f^h\right) \begin{cases} u_t - \frac{1}{\pi^2} u_{xx} = h(x, t), & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0 = u(1, t), & t > 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le problème (\mathcal{H}_f^h) pour $h \equiv 0$ et $f(x) = \sin(\pi x)$.
2. On prend $h(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x)$ et $f \equiv 0$.
— Déterminer une solution de (\mathcal{H}_f^h) sous la forme $u(x, t) = Cte^{-t} \sin(\pi x)$, où C est une constante réelle.
3. En déduire la solution de (\mathcal{H}_f^h) pour $h(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x)$ et $f(x) = \sin(\pi x)$.

Exercice 2 :

Soit $D(0, 2) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ et on note $\partial D(0, 2)$ par $S(0, 2)$ le cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon $r = 2$.

Considérer le problème de Neumann (**BVP**) :

$$\left(\mathbf{BVP}\right) \begin{cases} \Delta u = 0, & \text{sur } D(0, 2) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, & \text{pour } (x, y) \in S(0, 2) \end{cases}$$

avec α, β et γ sont des nombres réels.

- Si le (**BVP**) admit une solution $u \in C^2(D(0, 2)) \cap C^1(S(0, 2))$, alors trouvée une relation entre les nombres réels α, β et γ qui doit être satisfaits.