

Preuve que la dérivée normale sur le bord du disque est la dérivée radiale

DR.CHABANE FARID

8 mai 2025

Table des matières

Introduction	1
1 Le gradient d'une fonction en coordonnées polaires	3
1.1 Calcul des dérivées partielles	3
1.2 Expressions des dérivées	4
1.3 Expression du gradient	4
1.4 Conclusion	4
1.5 Calcul de la dérivée normale	4
2 Conclusion	5

Introduction

La dérivée normale d'une fonction u sur le bord d'un domaine est définie par :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$$

Ou' :

- ∇u est le gradient de u .
- \mathbf{n} est le vecteur normal unitaire extérieur au bord.

Cas du disque

On considère le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon R :

$$r < R$$

et son bord est défini par :

$$r = R$$

En coordonnées polaires (r, θ) , le gradient s'écrit :

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

Sur le bord $r = R$, le vecteur normal extérieur \mathbf{n} est dans la direction radiale :

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$$

Définition des vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ en coordonnées polaires

En coordonnées polaires (r, θ) , au lieu d'utiliser les vecteurs cartésiens fixes \mathbf{i} et \mathbf{j} (de $x-y$), on utilise :

1. \mathbf{e}_r : le vecteur unitaire dans la direction de r (direction radiale), c'est-à-dire du centre vers l'extérieur.
2. \mathbf{e}_θ : le vecteur unitaire dans la direction de l'angle θ , c'est-à-dire tangent au cercle, dans le sens direct (trigonométrique).

Ces vecteurs changent avec la position (car ils dépendent de θ).

Formules explicites de \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ en fonction de x et y :

En fonction des vecteurs cartésiens classiques \mathbf{i} et \mathbf{j}

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.\end{aligned}$$

1. \mathbf{e}_r pointe vers l'extérieur (dans la direction de r),
2. \mathbf{e}_θ tourne autour (sens direct, tangent au cercle de rayon r).

Interprétation géométrique rapide :

1. \mathbf{e}_r : dans la direction du rayon (vers l'extérieur).
2. \mathbf{e}_θ perpendiculaire à \mathbf{e}_r , tangent au cercle. Comme illustré à la figure 1, les vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ forment une base orthonormée locale.

Et important :

- $\mathbf{e}_r \perp \mathbf{e}_\theta$ (ils sont orthogonaux).
- $|\mathbf{e}_r| = |\mathbf{e}_\theta| = 1$ (ils sont unitaires).

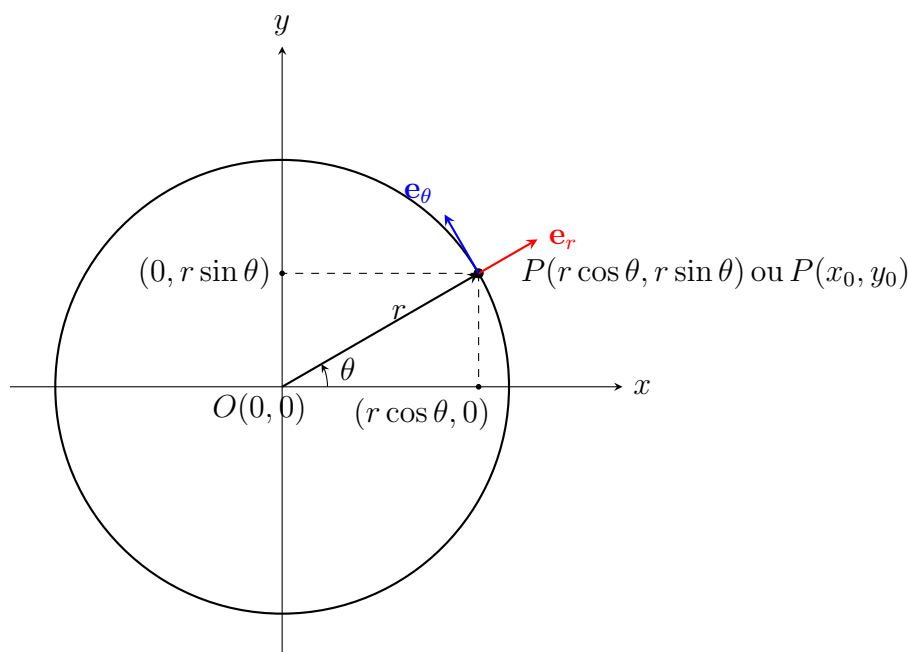


FIGURE 1 – Représentation des vecteurs unitaires \mathbf{e}_r (radial) et \mathbf{e}_θ (tangent) en coordonnées polaires. Le vecteur \mathbf{e}_r pointe le long du rayon, tandis que \mathbf{e}_θ est tangent au cercle dans la direction croissante de l'angle θ .

Preuve : Formule du gradient en coordonnées polaires

On considère une fonction $u(x, y)$, où x et y sont exprimés en coordonnées polaires par :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Le gradient en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j}$$

1 Le gradient d'une fonction en coordonnées polaires

1.1 Calcul des dérivées partielles

Utilisons la règle de la chaîne pour exprimer les dérivées partielles en fonction de r et θ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Or, on a :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

1.2 Expressions des dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \sin \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \cos \theta$$

1.3 Expression du gradient

On rappelle les relations entre les bases :

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$$

$$\mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta$$

Le gradient devient :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{j}$$

Substituons les expressions :

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta \right) \mathbf{j}$$

En remplaçant \mathbf{i} et \mathbf{j} :

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

1.4 Conclusion

Ainsi, la formule du gradient en coordonnées polaires est bien :

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

1.5 Calcul de la dérivée normale

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \right) \cdot \mathbf{e}_r$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} (\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_r)$$

Or :

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_r = 0 \text{ (car ils sont orthogonaux).}$$

Donc :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

2 Conclusion

Sur le bord du disque $r = R$, la dérivée normale extérieure est simplement la dérivée radiale :

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$$