

Matière : Équations Aux Dérivées Partielles - Examen Partiel N^o1
 Dimanche 28/04/2025 - Durée : 01 :30h

Corrigé

Exercice 1 :

(6pts) :

1. (1pt) Le théorème des valeur moyenne sur $\partial D(0, R) = C(0, R)$ pour les fonctions harmonique afferme que :

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_{C(0, \sqrt{2})} u(x, y) dS \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_{C(0, \sqrt{2})} g(\theta) dS \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (1 + 3 \sin(2\theta)) \sqrt{2} d\theta \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. (2pts) La solution de (\mathcal{P}) est donnée par la méthode de séparation des variables par :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n (c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta)).$$

- (a) Déterminons les coefficients c_n et d_n On a $u(R, \theta) = g(\theta)$ d'où

$$g(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n (c_n \cos(n\theta) + d_n \sin(n\theta))$$

On reconnait les coefficients de Fourier de la fonction $g : c_0, c_n R^n$ et $d_n R^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) d\alpha, \quad c_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \cos(n\alpha) d\alpha, \quad d_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} g(\alpha) \sin(n\alpha) d\alpha,$$

- (b) En portant ces coefficients dans l'expression de $u(r, \theta)$ on obtient

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

avec $a_n = c_n R^n$ et $b_n = d_n R^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Avec ces nouveaux coefficients on a

$$u(r, \theta) = a_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n [\cos(n\theta) \cos(n\alpha) + \sin(n\theta) \sin(n\alpha)] g(\alpha) d\alpha$$

3. (2pts)

$$u(r, \theta) = a_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n(\theta - \alpha)) g(\alpha) d\alpha$$

Et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n(\theta - \alpha)) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{e^{in(\theta-\alpha)} + e^{-in(\theta-\alpha)}}{2} \\ &= \frac{re^{i(\theta-\alpha)}}{2R\left(1 - \frac{re^{i(\theta-\alpha)}}{R}\right)} + \frac{re^{-i(\theta-\alpha)}}{2R\left(1 - \frac{re^{-i(\theta-\alpha)}}{R}\right)} \\ &= \frac{re^{i(\theta-\alpha)}(R - re^{-i(\theta-\alpha)}) + re^{-i(\theta-\alpha)}(R - re^{i(\theta-\alpha)})}{2(R - re^{i(\theta-\alpha)})(R - re^{-i(\theta-\alpha)})} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos(n(\theta - \alpha)) &= \frac{Rr \cos(\theta - \alpha) - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Rr \cos(\theta - \alpha) - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha)} g(\alpha) d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2} \right) g(\alpha) d\alpha. \quad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

4. (1) $G(r, \theta; r', \alpha)$ étant la fonction de Green pour le laplacien (en coordonnées polaires) relative au disque de centre O et de rayon R , $D(O, R) \subset \mathbb{R}^2$. Calculons $\frac{\partial G}{\partial r'}(r, \theta; R, \alpha)$: On sait que la solution de (\mathcal{P}) en terme de la fonction de Green est donnée par :

$$u(r, \theta) = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial r'}(r, \theta; R, \alpha) g(\alpha) d\alpha$$

en identifiant avec l'expression intégrale de $u(r, \theta)$ on trouve

$$\frac{\partial G}{\partial r'}(r, \theta; R, \alpha) = - \frac{R^2 - r^2}{2\pi (R^2 - 2Rr \cos(\theta - \alpha) + r^2)}$$

Remarque La dérivée normale de la fonction de Green en coordonnées polaires est la dérivée radiale pour $r = R$ c-à-d :

$$\frac{\partial G}{\partial n}(r, \theta; r', \alpha) = \frac{\partial G}{\partial r'}(r, \theta; R, \alpha).$$

Pour plus de détails voir le fichier attaché « **PREUVE QUE LA DÉRIVÉE NORMALE SUR LE BORD DU DISQUE EST LA DÉRIVÉE RADIALE** »

Exercice 2 :

(8pts) On considère les deux le problème de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = x + t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{NH})$$

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = x + t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^x, u_t(x, 0) = 1 \end{cases} \quad (\mathcal{D}_{NH})$$

1. Les deux problèmes sont de type hyperbolique. Ils représentent l'équation des ondes planes. Le problème (\mathcal{P}_{NH}) est non homogène avec conditions initiales homogènes. L'autre est homogène avec conditions initiales non homogènes. (2 pts)
2. — Résolvons le problème (\mathcal{P}_{DH}). Par la formule de D'Alembert, nous avons

$$U(x, t, s) = \frac{1}{2c} \int_{x-2t}^{x+2t} U_t(y, 0, s) dy = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} (y + s) dy$$

$$U(x, t, s) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} y^2 + sy \right]_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{4} [4xt + 4st] = xt + st$$

- Résolvons le problème (\mathcal{P}_{NH}). Par le principe de Duhamel, la solution de (\mathcal{P}_{NH}) se déduit du problème suivant d'inconnue $U(x, t, s)$ où s est un paramètre réel :

$$\begin{cases} U_{tt} - 4U_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x, 0, s) = 0, & U_t(x, 0, s) = x + s \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{DH})$$

- Maintenant, la solution de (\mathcal{P}_{NH}) est donnée par

$$u(x, t) = \int_0^t U(x, t-s, s) ds = \int_0^t (x(t-s) + s(t-s)) ds$$

$$= \int_0^t \left((t-x)s - s^2 + xt \right) ds = \left[\frac{1}{2}(t-x)s^2 - \frac{1}{3}s^3 + xts \right]_0^t$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(t-x)t^2 - \frac{1}{3}t^3 + xt^2 = \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}t^3 \cdot (3pts)$$

3. — Écrivons la solution du problème (\mathcal{D}_{NH}). Le problème étant homogène avec (**CI**) non homogènes, et x parcourant \mathbb{R} , nous appliquons la formule de D'Alembert :

$$u(x, t) = \frac{u(x+ct, 0) + u(x-ct, 0)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_t(y, 0) dy$$

$$= \frac{e^{x+2t} + e^{x-2t}}{2} + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} dy$$

$$u(x, t) = e^x ch(t) + t \cdot (1.5pts)$$

- Solution du problème

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = x + t, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = e^x, & u_t(x, 0) = 1 \end{cases} \quad (\mathcal{P}_{NN})$$

Ce problème est linéaire, sa solution est donc la somme de la solution du problème homogène avec (**CI**) non homogènes et celle du problème non homogène avec (**CI**) homogènes, i.e. la solution de (\mathcal{P}_{NN}) est somme de la solution d (\mathcal{D}_{NH}) et celle de (\mathcal{P}_{NH}). On trouve,

$$u(x, t) = \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}t^3 + e^x ch(t) + t \cdot (1.5pts)$$

Exercice 3 :
(6 pts)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2, 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 1, u(1, t) = 0, t \geq 0 \text{ (CL)} \\ u(x, 0) = 0, 0 < x < 1 \text{ (CI)} \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

- (1 pt) Déterminons une fonction $u_o(x)$ indépendante de t solution de (\mathcal{S}) . u_o étant indépendante de t , donc $(u_o)_t = 0$. En portant dans l'équation on trouve; $(u_o)_{xx} = u_o'' = -2$, d'où $u_o(x) = -x^2 + ax + b$. Cette solution doit satisfaire les conditions au bord : $u_o(0) = 1, u_o(1) = 0$. On trouve $u_o(x) = -x^2 + 1$.
- (1 pt) $v(x, t) = u(x, t) - u_o(x)$. Montrons que $v(x, t)$ est solution du problème \mathcal{S}_0 :

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, 0 < x < 1, t > 0 \\ v(0, t) = 1, v(1, t) = 0, t \geq 0 \text{ (CL)} \\ v(x, 0) = x^2 - 2x + 1, 0 < x < 1 \text{ (CI)} \end{cases} \quad (\mathcal{S}_0)$$

On a : $v_t = u_t - (u_o)_t = u_t = u_{xx} + 2 = u_{xx} - (u_o)_{xx}$, car $(u_o)_{xx} = -2$ d'où $v_t = v_{xx}$ pour $0 < x < 1$. $v(0, t) = u(0, t) - u_o(0) = 1 - 1 = 0$, $v(1, t) = u(1, t) - u_o(1) = 0 - 0 = 0$, $v(x, 0) = u(x, 0) - u_o(x) = 0 - (1 - x^2) = x^2 - 1$. Ainsi $v(x, t)$ est solution de (\mathcal{S}_0) .

- (3 pts) Résolvons (\mathcal{S}_0) .

Par la méthode de séparation des variables, posons $v(x, t) = X(x)T(t)$. En portant dans l'équation, on obtient

$$XT' = X''T \text{ d'où } \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}$$

Les variables x et t sont indépendantes on écrit alors

$$\frac{X''}{X} = \lambda = \frac{T'}{T}, \quad \lambda \text{ cste réelle.}$$

D'où $X'' - \lambda X = 0$, et $T' - \lambda T = 0$. Résolvons l'équation en x : Si $\lambda \geq 0$, on obtient la solution triviale. Pour $\lambda < 0$, disons $\lambda = -\alpha^2, (\alpha \in \mathbb{R}^*)$, alors $X(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$. On a $X(0) = 0$ d'où $A = 0$, et $X(1) = 0$ implique $B = 0$ ou $\sin \alpha = 0$. Nous cherchons les solutions non triviales écartons alors l'éventualité $B = 0$.

$$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

On a une famille de solutions : $X_n(x) = B_n \sin(n\pi x)$. Résolvons l'équation en t , pour $\lambda = -\alpha^2 = -n^2\pi^2$. Un simple calcul donne la famille de solutions suivante : $T_n(t) = D_n e^{-n^2\pi^2 t}$. Une famille de solutions de l'équation de départ est :

$$v_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x), \quad (\text{où } C_n = B_n D_n)$$

Par le principe de superposition on obtient la solution de (\mathcal{S}_0) :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

de la condition initiale on a

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(n\pi x) = x^2 - 1$$

et par suite

$$C_n = \int_{-1}^1 (f_{imp}(y)) \sin(n\pi y) dy, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

ou' f_{imp} | est une extension impaire de $x^2 - 1$ qui est donné par :

$$f_{imp}(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -(x^2 - 1), & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Donc

$$C_n = 2 \int_0^1 (y^2 - 1) \sin(n\pi y) dy = \frac{-2\pi^2 n^2 + 4((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Finalement

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2\pi^2 n^2 + 4((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

et

$$(1pt)u(x, t) = u_0(x) + v(x, t) = 1 - x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2\pi^2 n^2 + 4((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Matière : Équations Aux Dérivées Partielles - Examen Partiel N⁰2
Dimanche 30/04/2025 - Durée : 01 :30h

Corrigé

Exercice 1 :

(7 pts) Soit le probleme de la chaleur suivant :

$$\left(\mathcal{H}_f^h \right) \begin{cases} u_t - \frac{1}{\pi^2} u_{xx} = h(x, t), & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0 = u(1, t), & t > 0 \end{cases}$$

1. Résolvons le problème (\mathcal{H}_f^h) pour $h \equiv 0$ et $f(x) = \sin(\pi x)$.

La variable x appartient à un intervalle borné, le problème est linéaire, nous utilisons la méthode de séparation des variables. En posant $u(x, t) = X(x)T(t)$ on obtient

$$T'X - \frac{1}{\pi^2}TX'' = 0$$

D'ou

$$\frac{T'}{T} - \frac{1}{\pi^2} \frac{X''}{X} = 0 \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{1}{\pi^2} \frac{X''}{X}$$

Les variables t et x étant indépendantes, il existe une constante réelle λ telle que

$$\frac{T'}{T} = \lambda = \frac{1}{\pi^2} \frac{X''}{X}.$$

On aboutit ainsi aux deux équations suivantes

$$T' - \lambda T = 0 \quad \text{et} \quad X'' - \lambda \pi^2 X = 0$$

- Résolvons l'équation en T :

$$T' - \lambda T = 0 \Rightarrow T' = \lambda T \Rightarrow T(t) = ke^{\lambda t}$$

La température T doit être bornée, on prend donc $\lambda \leq 0$, i.e. $\lambda = -\alpha^2, \alpha \geq 0$. - Résolvons l'équation en X avec $\lambda = -\alpha^2$:

$$X'' + \alpha^2 \pi^2 X = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 + \alpha^2 \pi^2 = 0, r = i\pi\alpha$ ou $r = -i\pi\alpha$. D'où

$$X(x) = A \cos(\alpha\pi x) + B \sin(\alpha\pi x)$$

Déterminons les constantes A et B . On a $u(0, t) = 0 = u(1, t)$ pour tout $t > 0$, d'ou $X(0) = X(1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ A \cos(\alpha\pi) + B \sin(\alpha\pi) = 0 \end{array} \right.$$

On arrive à l'équation $B \sin(\alpha\pi) = 0$. Si on prend $B = 0$, on trouve $X \equiv 0$, solution refusée. Prenons alors $\sin(\alpha\pi) = 0$.

$$\sin(\alpha\pi) = 0 \Rightarrow \alpha = n, n \in \mathbb{N}$$

En conclusion, une famille de solutions en X est :

$$X_n(x) = A_n \cos(n\pi x) + B_n \sin(n\pi x)$$

Et une famille de solution en T est :

$$T_n(t) = k_n e^{-n^2 t}, \quad \text{car } \lambda = -\alpha^2 = -n^2$$

En conséquence une famille de solution en u est

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = e^{-n^2 t} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))$$

où l'on a posé $k_n A_n = a_n$ et $k_n B_n = b_n$. Par le principe de superposition on trouve

$$u(x, t) = a_0 + \sum_{n \times 1} e^{-n^2 t} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))$$

Reste à calculer les coefficients a_n et b_n :

On a $u(x, 0) = \sin(\pi x)$, d'où

$$u(x, 0) = a_0 + \sum_{n \times 1} (a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x))$$

Par une simple identification on trouve $a_n, \forall n \geq 0, b_1 = 1$ et $b_n = 0, \forall n \geq 2$. Et la solution est donnée par

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x) \dots (3pts)$$

2. On prend $h(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x)$ et $f \equiv 0$.

Déterminons une solution de (H_f^t) sous la forme $u(x, t) = C t e^{-t} \sin(\pi x)$, où C est une constante réelle. Il suffit de dériver et remplacer dans l'équation : on trouve $C = 1$. (2 pts)

3. Solution générale de (H_f^t) pour $h(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x)$ et $f(x) = \sin(\pi x)$.

Le problème est linéaire, non homogène avec des conditions non homogènes, sa solution est donc la somme des solutions des problèmes précédents :

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(\pi x) + t e^{-t} \sin(\pi x) = (1 + t) e^{-t} \sin(\pi x) \cdot (2 \text{ pts})$$

Exercice 2 :

Soit $D(0, 2) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ et on note $\partial D(0, 2)$ par $S(0, 2)$ le cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon $r = 2$.

Considérer le problème de Neumann (**BVP**) :

$$(\mathbf{BVP}) \begin{cases} \Delta u = 0, \text{ sur } D(0, 2) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \text{ pour } (x, y) \in S(0, 2) \end{cases}$$

avec α, β et γ sont des nombres réels.

— Si le (**BVP**) admet une solution $u \in C^2(D(0, 2)) \cap C^1(S(0, 2))$, alors trouvée une relation entre les nombres réels α, β et γ qui doit être satisfaits.

Un petit rappel sur le problème de Neumann (**BVP**)

$$(\mathbf{BVP}) \begin{cases} \Delta u = f, \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, \text{ pour } \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour que avoir une solution, les données f et g doit être compatible.

Lemme : Soit $f \in C(\bar{\Omega})$ et $g \in C(\partial\Omega)$. Si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ou $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$ résoudre (**BVP**) alors

$$\int_{\partial\Omega} g(y) dS_y = \int_{\Omega} f(x) dx$$

Dans le problem présent, nous avons $f \equiv 0$ et $g(x, y) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, donc si $\int_{\partial D(0,2)} \alpha x^2 + \beta x + \gamma ds_y = 0$ ne pas satisfit, alors (**BVP**) n'admit pas solution $u \in C^2(\bar{\Omega})$ ou $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$.
Commençons a calculé $\int_{\partial D(0,2)} \alpha x^2 + \beta x + \gamma ds_y$.

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} (\alpha (2 \cos(\theta))^2 + \beta 2 \cos(\theta) + \gamma) 2 d\theta \\ &= 8\alpha \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 d\theta + 4\beta \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta + 2\gamma \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 8\alpha\pi + 4\beta \times 0 + \gamma 4\pi = 4\pi(2\alpha + \gamma) \cdot (3pts) \end{aligned}$$

Donc il faut $(2\alpha + \gamma) = 0$