

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Chapitre 02: Équations Hyperboliques - Equation des Ondes

Presented by: **Chabane Farid**

Faculté des sciences et de la technologie
Département de mathématiques et informatique.

22 avril 2025



1 Résumé

2 Équation des ondes en dimensions supérieures

- Les moyennes sphériques
- Réduction à un problème de Cauchy équivalent : Diminution de la dimension
- Formules de Kirchhoff et de Poisson
- Ondes sphériques et ondes planes
- Equations avec second membre : potentiels retardés
- Formule de Poisson

3 Quelques Étude Qualitatives

- Problème de Cauchy , PROPAGATION DES ONDES, Formule du parallélogramme et Domaines de dépendance, d'influence et de détermination
- Principe de Huyghnes : $n=3$
- Énergie Et Unicité

4 Problème de Cauchy

Section 1

Résumé

Ce chapitre est organisé en quatre sections principales. Dans la première section, nous rappelons les notions de base et présentons des définitions fondamentales relatives à ce type d'équations. La deuxième section est consacrée à la résolution des certains problem pour $n = 1$ des équations(on donne la formule de D'Alembert). Dans la troisième section, nous abordons la résolution de l'équation des ondes pour $n=3$ et $n=2$ par la méthode de séparation de variables sur le et le disque respectivement. Dans le quatrième section nous donnerons une expression explicite et appropriée pour une solution forte pour certains problèmes sur la demi-droite positive (Extrémité fixe : onde réfléchie) également si nous disposons ou non d'une formule explicite pour la solution en utilisant D'Alembert formule sur un intervalle bornée. Ensuite nous donnerons également une expression explicite pour la solution de l'équation d'onde non-homogène sur une droite numérique couplée à des conditions initiales et aux limites non-homogènes en utilisant le principe de Duhamile.

Au chapitre 6, nous donnerons une solution explicite à l'équation des ondes homogènes de dimension n supérieure ou égale à 2 couplées à des conditions initiales non homogènes, en utilisant les propriétés de la moyenne sphérique d la fonction inconnue (formule de Darboux, formule de Kirchhoff et de Poisson pour $n=3$ et $n=2$). Enfin, la dernière section traite de l'étude qualitatives du problème de Cauchy (nature de solution fort ou faibles, propagations des ondes, formule de parallélogramme et notre équivalence a nature de solution fort, domaines de dépendance et d'influence et de détermination, la dépendance de solution a les donnés de Cauchy .

Mots clés : Classification des équations ; La méthode des caractéristique ; Réduction à la forme standard ; Changement de variables ; Problème de Cauchy...

Section 2

Équation des ondes en dimensions supérieures

Équation des ondes en dimensions supérieures

Équation des ondes en dimensions supérieures

Considérons dans cette partie l'équation des ondes en dimension $n \geq 2$,

$$\partial_{tt}u = c^2 \Delta u, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x) \quad (2.2)$$

L'idée principal pour résoudre cette pb est de transformer, en utilisant les moyennes sphériques, l'équation précédente donnée en dimension $n \geq 2$ en une équation en dimension 1. Commençons par la définition suivante.

Équation des ondes en dimensions supérieures

Outil : Méthode de la moyenne sphérique

- Lorsque $n = 3$ le nouveau pb peut être transformé en l'équation des ondes en dimension 1 après le changement de la variable indépendante .
- La formule de D'Alembert donne la solution de cette pb.
- La solution de notre pb originale est récupérée par la formule de D'Alembert.

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques

Notations :

- Nous traitons des fonctions à n variables ($n \geq 2$).
- La norme Euclidienne de vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est notée par $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.
- $\mathcal{B}(x, \rho)$ notée la boule ouverte de rayon $\rho > 0$ et de centre $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{B}(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n, |x - y| < \rho\}$$

- $\mathcal{S}(x, \rho)$ désigne la sphère (par abus de langage) de rayon $\rho > 0$ et de centre $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{S}(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n, |x - y| = \rho\}$$

, $\partial\mathcal{B}(x, \rho) = \mathcal{S}(x, \rho)$ et $\partial\mathcal{B}(x, \rho) \cup \mathcal{S}(x, \rho) = \text{Solid sphère}$

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques

Notations :

- ω_n désigne la mesure de l'aire de la sphère unité $\mathcal{S}(0, 1)$ dans \mathbb{R}^n ,
| $\mathcal{S}(x, \rho)$ | = $\rho^{n-1} \omega_n$ dans \mathbb{R}^n .
- $d\mathcal{S}(z)$ signifié la mesure de surface sur $\mathcal{S}(0, 1)$ et $d\sigma$ est utilisée pour la mesure de surface sur un sphère qlq.

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques

Intégrales multiples ; changement de variables , Intégrations par partie(formule de Green) :

On considère le changement de variables suivantes :

$$z : \begin{cases} \mathcal{B}(x, \rho) & \longrightarrow & \mathcal{B}(0, 1) \\ y & \longmapsto & \frac{y-x}{\rho} \end{cases} .$$

Soit g une fonction donnée $g : \begin{matrix} \mathcal{B}(x, \rho) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & g(y) \end{matrix}$, on définit une fonction $w := w(z)$ par :

$$w : \begin{matrix} \mathcal{B}(0, 1) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & h(x + \rho z) \end{matrix} ,$$

la fonction h peut être exprimée en w par $h(y) = w\left(\frac{y-x}{\rho}\right)$

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques

Intégrales multiples ; changement de variables , Intégrations par partie(formule de Green) :

- Si on suppose que $h \in C^2(\mathcal{B}(x, \rho))$ alors on obtient par le règle de Chain :
 $\nabla_y h(y) = \frac{1}{\rho} \nabla_z w\left(\frac{y-x}{\rho}\right)$ et $\Delta_y h(y) = \rho^{-2} \Delta_z h\left(\frac{y-x}{\rho}\right)$; $dy = \rho^n dz$;
- Par le formule de Green nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(x, \rho)} \Delta_y h(y) dy &= \int_{\mathcal{B}(0,1)} \rho^{-2} \Delta_z w(z) \rho^n dz = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \rho^{n-2} \Delta_z w(z) dz \\ &= \rho^{n-2} \int_{S(0,1)} \langle \nabla_z w(z), z \rangle dz \\ &= \rho^{n-2} \int_{S(0,1)} \langle \rho \nabla_y h(x + \rho z), z \rangle dS(z) \\ &= \rho^{n-1} \int_{S(0,1)} \frac{\partial}{\partial \rho} h(x + \rho z) dS(z) \\ &= \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{S(0,1)} h(x + \rho z) dS(z) \end{aligned}$$

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques

Intégrales multiples ; changement de variables , Intégrations par partie(formule de Green) :

d'où :

$$\int_{\mathcal{B}(x,\rho)} \Delta_y h(y) dy = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{S(0,1)} h(x + \rho z) dS(z) \quad (2.3)$$

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

Définition 2.1

Pour une fonction h continue sur \mathbb{R}^n , sa moyenne sphérique sur la sphère de rayon r et de centre x est donnée par la fonction $M_h(x, r)$

$$M_h : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, r) \mapsto M_h(x, r) ,$$

défini par

$$M_h(x, r) = \frac{1}{|\mathcal{S}(x, r)|} \int_{\mathcal{S}(x,r)} h(y) d\sigma \quad (2.4)$$

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

Proposition 1

Pour une fonction h continue sur \mathbb{R}^n , sa moyenne sphérique sur la sphère de rayon r et de centre x est donnée par la fonction $M_h(x, r)$

$$M_h : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, r) \mapsto M_h(x, r) ,$$

défini par

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} h(x + rz) dS(z) \quad (2.5)$$

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_{S(x,r)} h(y) d\sigma &= \int_{S(x,r)} h(y) \frac{|y-x|^2}{r^2} d\sigma = \int_{S(x,r)} \left\langle h(y) \frac{y-x}{r}, \frac{y-x}{r} \right\rangle d\sigma \\ &= \int_{\mathcal{B}(x,r)} \operatorname{div} \left(h(y) \frac{y-x}{r} \right) dy = \int_{\mathcal{B}(x,r)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} h(y) \frac{y_i - x_i}{r} dy \\ &= \int_{\mathcal{B}(0,1)} \sum_{i=1}^n \frac{r^{-1} \partial}{\partial z_i} h(x + rz) z_i r^n dz = r^{n-1} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z_i} h(x + rz) z_i dz \\ &= r^{n-1} \int_{\mathcal{B}(0,1)} \operatorname{div}(h(x + rz)z) dz = r^{n-1} \int_{S(0,1)} \left\langle (h(x + rz)z), z \right\rangle dS(z) \\ &= r^{n-1} \int_{S(0,1)} (h(x + rz) |z|^2) dS(z) \text{ (comme } z \in S(0,1) \text{ on a } |z|^2 = 1)\end{aligned}$$

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

donc si on divise par l'aire de la sphère de centre x et rayon r et le fait que il y a une relation entre l'aire de la sphère unité et le sphère qlq on termine la proof de cette proposition.

Question 01 : pourquoi considérons nous les moyennes sphériques ?

Question 02 : Quel est l'avantage de la proposition 01 ?



Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques

Lemme sur la Moyenne sphérique d'une fonction continue LSMS

Hypothèses :

- Soit $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
- Soit $M_h(x, r)$ sa moyenne sphérique donnée par (2.5).

Conclusions :

- 1 Pour une fonction donnée $h = h(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$, la fonction $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $v(x, r) = M_h(x, r)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
- 2 $v(x, r)$ peut être étendu au domaine tel que $v(x, r)$ soit une fonction paire pour chaque x fixé dans \mathbb{R}^n .
- 3 la fonction $h(x)$ peut être récupérée à partir de $v(x, r)$ dans le sens suivant $\lim_{r \rightarrow 0} v(x, r) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
- 4 $\frac{\partial}{\partial r} v(x, 0) = 0$
- 5 $\frac{\partial^2}{\partial r^2} v(x, r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(x, r) = \Delta_x v(x, r)$, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ (la formule de Darboux)



Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques I

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

La preuve de conclusion 01.

Comme $h \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ alors on peut dériver successivement sous le signe intégrale et conclure que $v \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. □

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques II

La preuve de conclusion 02.

On a par (2.5)

$$v(x, r) = M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} h(x + rz) dS(z) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|v|=1} h(x - rv) dS(v)$$

par ce que le sphère unité est invariante sous l'application $v \mapsto -v$. d'où le seconde terme de l'équation permettre de généralisé la définition de la moyenne sphérique aux valeurs négatives de r , ainsi pour $r \in \mathbb{R} \setminus 0$ nous dirons que $M_h(x, r)$ est la moyenne sphérique de la fonction h sur la sphère de centre x et de rayon $|r|$ tel que $r \mapsto v(x, r)$ est une fonction paire. Posons $v(x, 0) = h(x)$, donc $r \mapsto v(x, r)$ est désormais significatif dans \mathbb{R} .

□

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques III

La preuve de conclusion 03.

Conclusion du 3 reformulée On a par (2.5)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} h(x + rz) dS(z) = h(x)$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Nous estimons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} h(x + rz) dS(z) - h(x) \right| &= \left| \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} h(x + rz) - h(x) dS(z) \right| \\ &\leq \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} |h(x + rz) - h(x)| dS(z) \end{aligned}$$

comme la fonction $h(x)$ est continue pour tout x , il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout y avec $|y - x| < \delta$ on a :

$$|h(y) - h(x)| < \varepsilon$$



Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques I

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

La preuve de conclusion 3(Cont).

Donc, nous avons pour $r < \delta$

$$|h(x + rz) - h(x)| < \varepsilon$$

La conclusion 3 découle de l'estimation

$$\left| \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} h(x + rz) dS(z) - h(x) \right| \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} |h(x + rz) - h(x)| dS(z)$$

□

Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques II

La preuve de conclusion 4.

Rappelons que nous avons prouvé

$$\int_{\mathcal{B}(x,\rho)} \Delta_y h(y) dy = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{S(0,1)} h(x + \rho z) dS(z)$$

Ainsi

$$r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} v(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathcal{B}(x,r)} \Delta_y h(y) dy = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r r^{n-1} \Delta_x \int_{S(0,1)} h(x + rz) dS(z) dr$$



Équation des ondes en dimensions supérieures

Les moyennes sphériques III

La preuve de conclusion 4(Cont).

Nous dérivons les deux côtés par rapport à r , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} v(x, r) \right) = \Delta_x v(x, r)$$

Nous calculons la dérivée partielle de l'un des membres droits de l'équation ci-dessus et nous obtenons :

$$(n-1)r^{n-2} \frac{\partial}{\partial r} v(x, r) + r^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(x, r) = \Delta_x v(x, r)$$

l'annulation du facteur r^{n-1} donne la formule de Darboux. □

Équation des ondes en dimensions supérieures

Diminution de la dimension I

Diminution de la dimension :

Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ est une solution de pb de Cauchy (2.1) + (2.2) pour l'équation des ondes de dimension n . Regardons t comme paramètre et considérons la moyenne sphérique de $u(x, t)$,

$$v(x, r, t) = M_u(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} u(x + rz, t) dS(z) \quad (2.6)$$

Dérivons (2.6) deux fois par rapport à t

$$v(x, r, t)_{tt} = \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} u_{tt}(x + rz, t) dS(z)$$

et d'après (2.1)

$$v(x, r, t)_{tt} = \frac{c^2}{\omega_n} \int_{|z|=1} \Delta_x u(x + rz, t) dS(z) = c^2 \Delta_x \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} u(x + rz, t) dS(z) \right)$$



Équation des ondes en dimensions supérieures

Diminution de la dimension II

d'où

$$v(x, r, t)_{tt} = c^2 \Delta_x v(x, r, t).$$

En utilisant la formule de Darboux, nous obtenons

$$v(x, r, t)_{tt} = c^2 \left(\frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(x, r, t) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(x, r, t) \right)$$

c.-à-d.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t) = c^2 \left(\frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} M_u(x, r, t) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u(x, r, t) \right) \quad (2.7)$$

C'est l'équation d'Euler-Poisson-Darboux Concernant les conditions initiales :

$$M_u(x, r, 0) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} u(x + rz, 0) dS(z) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} f(x + rz) dS(z)$$

donc $M_u(x, r, 0) = M_f(x, r)$ et de même $\frac{\partial}{\partial t} M_u(x, r, 0) = M_g(x, r)$.



Équation des ondes en dimensions supérieures

Diminution de la dimension III

Lemme 2.2

Avec les notations suivantes : $M_u(x, r, t) = U(x, r, t)$, $M_f(x, r) = F(x, r)$ et $M_g(x, r) = G(x, r)$. les énoncés suivants concernant une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ sont équivalents

- 1** u est une solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes de dimension n .
- 2** La fonction $U(x, r, t)$ résout les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, r, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} U(x, r, t) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} U(x, r, t) \right); r \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x, r, 0) = F(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(x, r, 0) = G(x, r); \quad r \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\mathcal{ER})$$

Équation des ondes en dimensions supérieures

Diminution de la dimension I

Diminution de la dimension :

Remark

- 1 Puisque les dérivées portent sur les variables r et t alors le problème (\mathcal{ER}) est donné dans l'ensemble $\mathcal{A} = \{(r, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ et x représente un paramètre. C'est un problème en dimension 1, puisque r est un réel !
- 2 Nous disons que l'équation dans le problème (\mathcal{ER}) est l'équation des ondes avec terme d'ordre inférieur $\frac{\partial}{\partial r} U(x, r, t)$.

Équation des ondes en dimensions supérieures

Diminution de la dimension II

La preuve de Lemme 2.2.

- l'énoncé 2 découle de l'énoncé 1 par calcul direct en utilisant la définition de $M_u(x, r, t)$, compte tenu du calcul précédant immédiatement l'énoncé de cette formule de Lemme 2.2 et le formule Darboux.
- l'énoncé 1 découle de l'énoncé 2 au vu de la formule de Darboux et de la **Conclusion 4** du lemme sur les moyennes sphériques (LSMS).



Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson I

Idées clés pour résoudre le problème de Cauchy pour l'équation des ondes dans l'espace 3D :

- 1** Dans la sous-section précédente, nous avons trouvé un problème de Cauchy équivalent pour deux variables indépendantes r et t pour une équation des ondes dans un nombre quelconque de variables spatiales.
- 2** Le problème de Cauchy équivalent a été obtenu en suivant la méthode des moyennes sphériques.
- 3** Lorsque $n = 3$, des choses intéressantes se produisent :
 - Après un changement de variable dans le problème de Cauchy 3D, nous obtenons un problème de Cauchy pour l'équation des ondes dans l'espace 1D.
 - La formule de D'Alembert est disponible ici.
- 4** Une solution au problème de Cauchy pour l'équation des ondes en 3D est ensuite obtenue grâce au LSMS de la sous-section précédente.



Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson II

En utilisant les moyennes sphériques, on démontre le théorème suivant.

Théorème 2.3 (Formule de Kirchhoff)

Soient $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ et $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Alors le problème (2.1) admet une unique solution $u(x, t)$ définie par la formule de Kirchhoff,

$$u(x, t) = tG(x, ct) + \frac{\partial}{\partial t}(tF(x, ct)) \quad (F_1)$$

$$= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} [tg(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x)] dS(y) \quad (F_2)$$

où $F(x, r)$ et $G(x, r)$ sont les moyennes sphériques de f et g respectivement.

Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson III

Démonstration.

D'après la formule de Darboux et Lemme (2.2), le problème de Cauchy équivalent est :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u(x, r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} M_u(x, r, t) \right); & r \in \mathbb{R}, t > 0 \\ M_u(x, r, 0) = F(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial t} M_u(x, r, 0) = G(x, r), & r \in \mathbb{R}; \quad r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

désigne $L(r, t) = rM_u(x, r, t)$. Calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} L(r, t) &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rM_u(x, r, t)) = \frac{\partial}{\partial r} \left(M_u(x, r, t) + \frac{\partial}{\partial r} M_u(x, r, t) \times r \right) \\ &= r \frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u(x, r, t) + 2 \frac{\partial}{\partial r} M_u(x, r, t) \\ &= r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x, r, t) \end{aligned}$$

Démonstration Cont.

E utilisant l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u(x, r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} M_u(x, r, t) \right)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} L(r, t) &= r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u(x, r, t) + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} M_u(x, r, t) \right) \\ &= \frac{r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x, r, t) \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} L(r, t). \end{aligned}$$

Donc $L(r, t)$ satisfait le problème de Cauchy suivant pour l'équation d'onde 1-D :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} L(r, t) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} L(r, t); r \in \mathbb{R}, t > 0 \\ L(r, 0) = r M_f(x, r), \quad \frac{\partial}{\partial t} L(r, 0) = r \frac{\partial}{\partial t} M_u(x, r) r \in \mathbb{R}; \quad r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Démonstration Cont.

Disposons-nous d'une solution classique au problème réduit ?

- $L(r, 0)$ doit être $C^2(\mathbb{R})$
- $\frac{\partial}{\partial t}L(r, 0)$ doit être $C^1(\mathbb{R})$

Question : Les conditions ci-dessus sont-elles remplies ?

Réponse : Oui, d'après LSMS 2, nous devons avoir $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ et $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

2^{me} question : Pourquoi suppose-t-on plus de régularité sur f et g ? En utiliser la formule de D'Alembert , nous avons :

$$rM_u(x, r, t) = rL(r, t) = \frac{1}{2} \left[(r - ct)M_f(x, r - ct) + (r + ct)M_f(x, r + ct) \right] + \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} sM_g(x, s) ds$$

l'équation ci-dessus donne

$$M_u(x, r, t) = \frac{1}{2r} \left[(r - ct)M_f(x, r - ct) + (r + ct)M_f(x, r + ct) \right] + \frac{1}{2rc} \int_{r-ct}^{r+ct} sM_g(x, s) ds \quad (2.8)$$

□

Démonstration.

Grâce à LSMS, la solution u peut être récupérée en passant à la limite lorsque r passe à 0.

La limite de la 1^{er} terme en(2.8) :

le 1er terme est donnée par $\frac{1}{2r} \left[(r - ct)M_f(x, r - ct) + (r + ct)M_f(x, r + ct), \right]$.

Lorsque r tend vers zéro, le numérateur et le dénominateur tendent également vers zéro. En utilisant la règle de L'Hospital, la limite est la même que la limite de l'expression suivante lorsque r tend vers zéro :

$$\frac{1}{2} \left[M_f(x, r - ct) + M_f(x, r + ct), \right] + \frac{1}{2} \left[(r - ct) \frac{\partial}{\partial r} M_f(x, r - ct) + (r + ct) \frac{\partial}{\partial r} M_f(x, r + ct), \right] \quad (2.9)$$

le 1er terme dans (2.9) tend en $M_f(x, ct)$ comme $r \rightarrow 0$.

le deuxième terme on peut le récrire comme suivante :

$$\frac{r - ct}{2w_3} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|z|=1} f(x + (r - ct)z) dS(z) + \frac{r + ct}{2w_3} \frac{\partial}{\partial r} \int_{|z|=1} f(x + (r + ct)z) dS(z)$$

En utilisant $w_3 = 4\pi$ et en prenant les dérivées par rapport à r à l'intérieur de l'intégrale, nous obtenons

$$\frac{r - ct}{8\pi} \int_{|z|=1} \nabla f(x + (r - ct)z) z dS(z) + \frac{r + ct}{8\pi} \int_{|z|=1} \nabla f(x + (r + ct)z) z dS(z)$$

Démonstration.

Par passage à la limite quand $r \rightarrow 0$ on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{-ct}{8\pi} \int_{|z|=1} \nabla f(x - ctz) z dS(z) + \frac{ct}{8\pi} \int_{|z|=1} \nabla f(x + ctz) z dS(z) \\ &= \frac{-t}{8\pi} \int_{|z|=1} \frac{\partial}{\partial t} f(x - ctz) dS(z) + \frac{t}{8\pi} \int_{|z|=1} \frac{\partial}{\partial t} f(x + ctz) dS(z) \\ &= \frac{t}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{|z|=1} f(x + ctz) - f(x - ctz) dS(z) \right) \\ &= \frac{t}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|z|=1} f(x + ctz) dS(z) \end{aligned}$$

Donc la limite de 1^{er} terme en equation (2.8) est

$$M_f(x, ct) + \frac{t}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} M_f(x, ct) = \frac{\partial}{\partial t} (tM_f(x, ct))$$

Démonstration.

Par la même procédure, nous trouvons la fin du deuxième terme de l'équation lorsque r tend vers zéro comme suit :

$$\begin{aligned}\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2cr} \int_{r-ct}^{r+ct} sM_g(x, s)ds &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2c} \left[(r+ct)M_g(x, (r+ct)) - (r-ct)M_g(x, (r-ct)) \right] \\ &= \frac{1}{2c} \left[ctM_g(x, ct) + ctM_g(x, -ct) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[tM_g(x, ct) + tM_g(x, -ct) \right] = tM_g(x, ct)\end{aligned}$$

D'où la solution du problème de Cauchy est la somme de ces limites, donc

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(tM_f(x, ct) \right) + tM_g(x, ct)$$



Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson I

Ones sphériques et ondes planes

Définition 2.4

Une Ones sphériques est une solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$ qui ne dépend de r et de t (on a $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$).

Si φ est un fonction qui ne dépend que de r et de t . On peut montre facilement que

$$\Delta \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dr}$$

Une onde sphérique est donc une solution de $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$ A toute onde sphérique

u associons une fonction v par $v(r, t) = ru(r, t)$ alors $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = r \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

donc v est solution de $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ et il existe deux fonctions F et G telles que $v(r, t) = F(r + ct) + G(r - ct)$.

On obtient ainsi le résultat suivant :

Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson II

Théorème 2.5

Une onde sphérique est de la forme $u(r, t) = \frac{1}{r}[F(r + ct) + G(r - ct)]$ On notera que pour l'onde $\frac{1}{r}G(r - ct)$ ne vérifie pas $u(r, t) = u(r - ct, 0)$ et que $u(r, t) \neq u\left(r + a, t + \frac{a}{c}\right)$ comme pour une onde en dimension 1. Ainsi le long d'un rayon une onde sphérique n'est pas une onde en dimension 1, il y a amortissement du fait que l'onde "s'étale" sur une surface $4\pi c^2 t^2$ de plus en plus grande lorsque t augmente. On notera que le flux $\iint_{S(0,r)} \text{grad } u \cdot d\sigma = 4\pi r^2 \frac{\partial u}{\partial r}(r, t)$ à travers une sphère de rayon r donné est $-4\pi G(r - ct) + 4\pi r G'(r - ct)$, si $r = \varepsilon \ll 1$ ce flux est $-4\pi G(-ct) + O(\varepsilon)$ ce qui correspond au fait que $u(r, t)$ tend vers l'infini lorsque r tend vers 0.

Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson III

Définition 2.6

On appelle onde plane une solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$ qui pour chaque valeur de t est constante sur chacun des plans parallèles à une direction donnée.

On appelle onde plane monochromatique une fonction de la forme suivante :

$$u(x, y, z, t) = A \exp \frac{2i\pi}{cT} (\alpha x + \beta y + \gamma z - ct)$$

On considérera souvent la partie réelle ou la partie imaginaire de u .

Propagation :

On vérifie facilement que u est bien solution de (E); il est clair que u est constante sur tout plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ lorsque t est fixé. On dit que l'onde se propage dans la direction (α, β, γ) perpendiculaire aux plans précédents.

Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson IV

Soient M_0 et M_1 deux points situés sur une droite passant par l'origine dans la direction (α, β, γ) alors $x_1 - x_0 = \alpha l, y_1 - y_0 = \beta l, z_1 - z_0 = \gamma l$ et : $\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - ct_1 = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 - ct_0$ équivaut à $\alpha l = c(t_1 - t_0)$. Pour de tels points $u(M_0, t_0) = u(M_1, t_1)$: l'onde se propage à la vitesse c

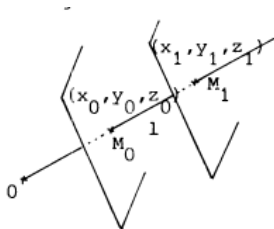


FIGURE 1 – Deux plans parallèle

Longueur d'onde : t fixé .

Sur la direction (α, β, γ) la longueur d'onde est cT : ceci signifie que pour une valeur donnée de t , $u(x_0, y_0, z_0, t) = u(x_1, y_1, z_1, t)$ si et seulement si : $\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma(z_0 - z_1) = kcT, k \in \mathbb{N}$.

Périodicité : M_0 fixé .

En un point M_0 fixé, $u(x_0, y_0, z_0, t) = A \exp\left[\frac{2\pi i}{cT}(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) - \frac{2\pi t}{T}\right]$ a pour période T .

Superposition d'ondes planes :

Etant donné la linéarité de l'équation des ondes, on peut superposer des solutions, et sous réserve d'existence et de régularité, considérer :

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(T) \exp\left(-\frac{2i\pi t}{T}\right) \exp\frac{2i\pi}{cT}(\alpha x + \beta y + \gamma z) dT$$

Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson I

Equations avec second membre : potentiels retardés Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = F(x, y, z, t) \quad (\mathcal{PNH}_3)$$

Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson II

Théorème 2.7 (Potentiels retardés)

La solution de (\mathcal{PNH}_3) telle que :
$$\begin{cases} u(x, y, z, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = 0 \end{cases} \text{ est donnée par :}$$

$$u(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint_{B(M_0, ct)} \frac{F(x, y, z, t - r/c)}{r} dx dy dz \quad (2.10)$$

où $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$. Cette formule est souvent désignée sous le nom de formule des "potentiels retardés".

La solution de (\mathcal{PNH}_3) telle que
$$\begin{cases} u(x, y, z, 0) = f \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = g \end{cases} \text{ est la somme de la fonction}$$
 déterminer par le formule de Kirchhoff (F_1) ou (F_2) et de celle déterminer par potentiels retardés (2.10).

Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson I

Formule de Poisson Considérons à présent le problème (\mathcal{P}_n) pour $n = 2$. Nous allons déduire la solution du problème (\mathcal{P}_2) en se servant de celle du problème (\mathcal{P}_3) . La méthode qui permet de faire ce passage s'appelle la méthode de descente d'Hadamard.

Théorème 2.8 (Formule de Poisson)

: Soient $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ et $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors le problème (\mathcal{P}_2) admet une unique solution $u(x, t)$ définie par la formule de Poisson,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{|y-x| < ct} \frac{tg(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y-x|^2}} dy$$

pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[$.

Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson II

Démonstration.

Nous savons que \mathbb{R}^2 peut-être considéré comme un sous-espace de \mathbb{R}^3 via l'identification $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$, alors en prenant $x = (x_1, x_2, 0)$ nous écrivons d'après la formule de Kirchhoff que

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} [tg(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x)] dS(y)$$

En désignant par (x_1, x_2, x_3) les points de \mathbb{R}^3 nous pouvons écrire avec

$$y = (y_1, y_2, y_3), \quad g(y) = g(y_1, y_2), \quad f(y) = f(y_1, y_2)$$

que

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} [tg(y_1, y_2) + f(y_1, y_2) + \nabla f(y_1, y_2) \cdot (y-x)] dS(y)$$



Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson III

Cont.

Sachant qu'une sphère est formée de deux hémisphères alors

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \left(2 \int_{|y-x|=ct, y_3>0} [\text{tg}(y_1, y_2) + f(y_1, y_2) + \nabla f(y_1, y_2) \cdot (y-x)] dS(y) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct, y_3>0} [\text{tg}(y_1, y_2) + f(y_1, y_2) + \nabla f(y_1, y_2) \cdot (y-x)] dS(y) \quad (5)\end{aligned}$$

Calculons maintenant l'élément de surface $dS(y)$.

Paramétrisons d'abord l'hémisphère supérieure définie par $|y-x|=ct, y_3>0$. On a

$$|y-x|=ct \Rightarrow \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + y_3^2} = c^2 t^2$$



Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson I

Formule de Poisson

d'où l'on tire

$$y_3 = \sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} = \phi(y_1, y_2)$$

car $y_3 > 0$. Par suite

$$dS(y) = \sqrt{1 + |\nabla \phi(y_1, y_2)|^2} dy_1 dy_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y_2}\right)^2} dy_1 dy_2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_i}(y_1, y_2) = -\frac{y_i - x_i}{\sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}; i = 1, 2$$

D'où

$$dS(y) = \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2$$



Équation des ondes en dimensions supérieures

Formules de Kirchhoff et de Poisson II

Sachant que la projection de l'hémisphère considérée sur le plan horizontal, d'équation $y_3 = 0$, est le disque $D = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |y - x| < ct\}$ nous déduisons de (5) que

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|<ct} \frac{[\text{tg}(y_1, y_2) + f(y_1, y_2) + \nabla f(y_1, y_2) \cdot (y - x)] ct}{\sqrt{c^2 t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}} dy_1 dy_2$$

i.e.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{\{y; |y-x|<ct\}} \frac{\text{tg}(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y - x)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y - x|^2}} dy_1 dy_2$$

avec rappelons-le $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$.

Exercice1

Justifier l'unicité de la solution confirmée par le théorème 2.3

Exercice2

Montrer que si $v(x, t) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ est solution de l'équation des ondes(2.1) alors $v(x, t)_t$ est également solution de l'équation des ondes (2.1).

Section 3

Quelques Étude Qualitatives

Quelques Étude Qualitatives I

PROPAGATION DES ONDES :

Supposons que t représente le temps, la relation $u(x, t) = f(x - t)$ implique que :
 $\forall x_0, \forall t \geq 0 \quad u(x_0 + t, t) = u(x_0, 0)$: la valeur prise à l'instant t , par u , au point $x_0 + t$ est la même que celle prise à l'instant 0 au point x_0 . Ce qu'on peut illustrer par deux "photos instantanées", on dit que u est une onde qui se propage à vitesse unité. "photos" :

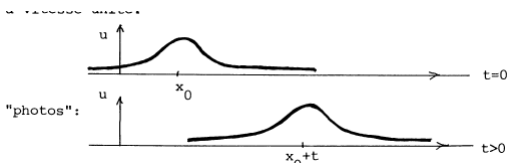


FIGURE 2 – Photos

Quelques Étude Qualitatives II

On démontre de la même façon le résultat suivant :

Théorème 3.1

Soit l'équation suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

- 1** Toute solution de (3.11) est de la forme $u(x, t) = F(x - ct)$ où F est de classe C^1 .
- 2** Une courbe caractéristique est une droite $x - ct = k$, si u est donnée sur une courbe γ , elle est connue dans toute la bande délimitée par les caractéristiques qui coupent r en un seul point. La relation $u(x_0 + ct, t) = u(x_0, 0) \quad \forall t \geq 0$ exprime que u se propage le long de l'axe Ox vitesse c . Si $c > 0$, u se propage vers la droite, si $c < 0$ u se propage vers la gauche.
- 3** $u(x, t) = f(x - ct)$ est la solution de (3.11) dont la valeur au point x à l'instant 0 est $f(x)$: c'est la solution du problème de valeur initiale f .

Quelques Étude Qualitatives III

Dans ce qui suit nous désignerons par (E) l'équation des ondes : (E) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Nous supposons toujours $t \geq 0$ en convenant que l'origine des temps a été choisie à l'instant où on commence à observer le phénomène représenté par l'équation (E).

Formule du parallélogramme :

Toute solution de (E) est de la forme $u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)$; F est constante le long des caractéristiques $x + ct = \text{constante}$, G l'est le long des caractéristiques $x - ct = \text{constante}$. Soit A, B, C, D un parallélogramme dont les côtés sont portés par des caractéristiques : $F(A) = F(C)$ si AC est parallèle à $x + ct = 0$ $F(D) = F(B)$ $G(A) = G(B)$ $G(D) = G(C)$, on obtient en additionnant le résultat suivant :

$$u(A) + u(D) = u(B) + u(C)$$

Quelques Étude Qualitatives IV

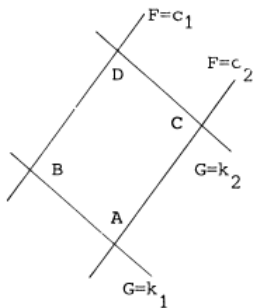
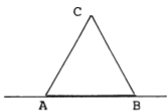


FIGURE 3 – Parallélogramme caractéristique

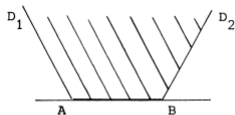
Quelques Étude Qualitatives II

Ainsi la valeur $u(Q)$ en tout point du triangle A, B, C est complètement déterminée : le triangle (A, B, C) s'appelle domaine de détermination de u par le segment (A, B) , corrélativement, le segment (A, B) s'appelle domaine de dépendance de u au point C . La valeur de u sur le segment (AB) influe sur un domaine plus grand que le triangle (A, B, C) : elle influe sur le domaine compris entre les droites D_1 et D_2 qui s'appelle domaine d'influence du segment (AB) .

En effet en un point N de ce domaine $u(N) = u(P_2) + u(P_1) - u(P)$ d'après la formule du parallélogramme.



(ABC) est le domaine de détermination de (AB)
 (AB) est le domaine de dépendance de C .



Le domaine hachuré est le domaine d'influence de (AB) .

Quelques Étude Qualitatives I

Principe de Huyghnes :

Supposons que les valeurs initiales f et g de u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ soit nulle hors de domaine D de frontière ∂D . soit h la fonction nulle hors de D :

$$h = tg - f + \langle \nabla(f); (y - x) \rangle > ct$$

Nous avons établi que $u(p_0, t) = M_h(p, ct)$, donc

$$u(p_0, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} h(p) d\theta d\varphi$$

dans cette expression p est dépende de θ et φ décrit le sphère $\mathcal{S}(p_0, ct)$:

$u(p_0, t)$ est non nulle seulement si $\mathcal{S}(p_0, ct) \cap D \neq \emptyset$.

Soit P_0 un point extérieur à D , d_1 et d_2 le minimum et le maximum de $d(Q, P_0)$ lorsque $Q \in D$;

- si $ct < d_1$ $u(P_0, t) = 0$
- si $d_1 < ct < d_2$ $u(P_0, t) \neq 0$

Quelques Étude Qualitatives II

- si $ct > d_2$ $u(P_0, t) = 0$ car la sphère (surface !) de rayon ct et de centre P_0 a une intersection vide avec D .

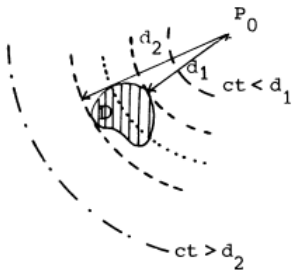


FIGURE 5 – Une image explicatif

Quelques Étude Qualitatives III

On peut exprimer cela de la façon suivante :

Théorème 3.2 (Principe de Huyghens)

Tout se passe comme si chaque point de ∂D émettait une onde qui se propage à la vitesse ct ; tant qu'aucune de ces ondes n'a atteint P_0 ou (P_0) est nul, puis lorsque toutes les ondes ont dépassé P_0 ou (P_0) est de nouveau nul. Il y a ainsi deux fronts d'onde : un front avant et un front arrière.

Si au lieu d'une intégrale prise sur la surface $S(P_0, ct)$ il s'agit

Exemples :

1-soit $f \equiv 0$ et $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$M_g(ct) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[(x_0 + ct \sin \theta \cos \varphi)^2 + (y_0 + ct \sin \theta \sin \varphi)^2 + (z_0 + ct \cos \theta)^2 \right] = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + c^2 t^2$$

$$tM_g(ct) = u(x_0, y_0, z_0, t) = t(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) + c^2 t^3$$

$$\text{Ainsi : } u(x, y, z, t) = t(x^2 + y^2 + z^2) + c^2 t^3.$$

Quelques Étude Qualitatives IV

2. Soit $g \equiv 0$ et $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$M_f(ct) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + c^2 t^2 \quad M_f(ct) + t \frac{\partial}{\partial t} M_f(ct) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + c^2 t^2 + t(2c^2 t)$$

Ainsi :

$$u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + 3c^2 t^2.$$

Quelques Étude Qualitatives I

principe d'Huygens n=2 : Il n'y a plus de principe d'Huygens : si f et g sont nulles hors de D , lorsque $ct > d_2$, le disque $D(P_0, ct)$ englobe (D) et $u(P_0, t)$ est en général non nul. Cependant f et g étant bornées par une constante A sur D il est facile de constater sur la formule de Poisson que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(P_0) = 0$. $t \rightarrow +\infty$

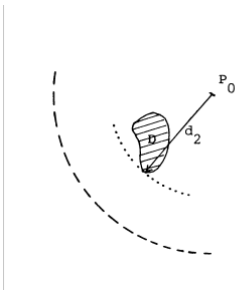


FIGURE 6 – Une deuxième image explicatif pour $n=2$

Quelques Étude Qualitatives I

Énergie Et Unicité :

Nous indiquerons sur un exemple comment l'étude de l'énergie des solutions peut permettre de conclure à l'unicité de la solution de certains problèmes.

Définition 3.3

Soit u une solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ dans l'intervalle I de $\mathbb{R}(x \in I)$. On appelle énergie de u à l'instant t la quantité

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_I \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

Quelques Étude Qualitatives II

Proposition 2

Proposition : Soit $I = [a, b]$ alors $\frac{dE}{dt} = c^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) \frac{\partial u}{\partial t}(b, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) \frac{\partial u}{\partial t}(a, t) \right]$

$$\text{En effet } \frac{dE}{dt} = \int_a^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) dx; \text{ or}$$

$$\int_a^b \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = \left[c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x=a}^{x=b} - c^2 \int_a^b \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

Comme $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ il ne reste que le terme entre crochets.

Théorème 3.4

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème suivant : (E) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in [a, b]$
avec les conditions (I) $u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ et les conditions (F)
 $u(a, t) = \alpha(t) \quad u(b, t) = \beta(t) \quad \forall t \geq 0$

Alors $u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad x \in [a, b] \forall t \geq 0$.

Preuve :

Quelques Étude Qualitatives III

$u_1 - u_2$ est une solution de (E) $u_1(a, t) - u_2(a, t) = \alpha(t) - \alpha(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$ donc $\frac{d}{dt}(u_1 - u_2)(a, t) = 0 \quad \forall t$, de même $\frac{d}{dt}(u_1 - u_2)(b, t) = 0 \quad \forall t$ et d'après la proposition précédente $\frac{dE}{dt} = 0$: l'énergie associée à la fonction $u_1 - u_2$ est donc constante.

Calculons $E(0) = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} \right]^2(x, 0) + c^2 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right]^2(x, 0) dx$; or $\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ et $\frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, de plus $u_1(x, 0) = f(x) = u_2(x, 0) \quad \forall x$ donc $E(0) = 0$. Alors $0 =$

$2E(t) = \int_a^b \left[\frac{\partial u_1}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, t) \right]^2 + c^2 \left[\frac{\partial u_1}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, t) \right]^2 dx$, comme les fonctions $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont continues ceci implique $\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}$ et $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$ donc $u_1 - u_2$ est une constante, cette constante est nulle du fait des conditions initiales.

Cette méthode peut être généralisée à d'autres situations et et à d'autres équations. Ainsi en remplaçant $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Delta u$ par : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ on obtient en dimension 3 que pour une solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$ sur un domaine fermé Ω de frontière $\partial\Omega$ et pour une condition frontière $u(M) = f(M)$ indépendante de t que $E(t)$ est constante, cela permet de conclure à l'unicité.

Quelques Étude Qualitatives I

Énergie Et Unicité :

La méthode précédente permet aussi d'établir l'unicité du problème ou (E) est remplacée par l'équation avec second membre $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x, t)$, en effet si u_1 et u_2 sont deux solutions $u_1(x, t) - u_2(x, t)$ est solution du problème sans second membre.

La méthode peut aussi être utilisée par exemple pour l'équation des télégraphistes. Celle-ci peut être transformée en : $a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k^2 u + cg(x, t)$. L'énergie d'une solution u est définie par $\frac{1}{2} \int_a^b \left[a \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + k^2 u^2 \right] (x, t) dx$ et on peut raisonner comme précédemment pour établir l'unicité des solutions à un problème dont les conditions initiales et frontières sont déterminées.

Section 4

Problème de Cauchy

Problème de Cauchy I

Problème de Cauchy

Soit f une fonction d'une seule variable et (γ) la courbe définie par l'équation $y = f(x)$. Posons $F(x, y) = f(x) - y$. Alors, le vecteur $\vec{n} = \nabla F(x_0, f(x_0)) = (f'(x_0), -1)$ est perpendiculaire à (γ) en $(x_0, f(x_0))$.

Problème de Cauchy II

Définition 4.1

Le problème de Cauchy relatif à une courbe (γ) régulière consiste à chercher (si elle existe) la solution de l'équation

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

qui vérifie

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ sur } (\gamma)$$

et

$$\frac{du}{dn}(x, y) = h(x, y) \text{ sur } (\gamma).$$

où $\frac{du}{dn}$ désigne la dérivée normale et f et g sont des fonctions de classe C^1 et C^2 sur γ , respectivement.

Problème de Cauchy III

Soit $\gamma : t \mapsto (x = \varphi(t), y = \psi(t))$ une courbe de \mathbb{R}^2 dont tout point est régulier c'est à dire tel que $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 > 0$. On cherche une solution de Pb de cauchy qui vérifie des conditions supplémentaires sur la courbe γ : On suppose connue la valeur de u sur γ ainsi que celle de ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

Rappels :

a) Soient $x(t), y(t)$ les coordonnées du point $M(t)$ parcourant la courbe $\gamma(t)$. On appelle abscisse curviligne une primitive de $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$; c'est une fonction s telle que $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$.

b) Soit

$$\vec{T} = \frac{dx}{ds}\vec{e}_1 + \frac{dy}{ds}\vec{e}_2 = \frac{dt}{ds} \left[\frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 \right]$$

avec $\|\vec{T}\| = 1$. Le vecteur \vec{T} est tangent à la courbe γ , de plus le vecteur normal $\vec{N} = -\frac{dy}{ds}\vec{e}_1 + \frac{dx}{ds}\vec{e}_2$. \vec{N} s'obtient à partir du vecteur tangent \vec{T} par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

c) On appelle dérivée normale la grandeur $\frac{du}{dn} = \langle \text{gradu}, \vec{N} \rangle$. φ une fonction de classe C^1 , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\varphi(M + h\vec{N}) - \varphi(M)] = \frac{d}{dn}(\varphi)$



Problème de Cauchy IV

On pose maintenant

$$H(t) = u[\varphi(t), \psi(t)]$$

$$U(t) = \frac{\partial u}{\partial x}[\varphi(t), \psi(t)]$$

$$V(t) = \frac{\partial u}{\partial y}[\varphi(t), \psi(t)]$$

$$W(t) = \frac{du}{dn}[\varphi(t), \psi(t)]$$

nous avons alors :

$$\frac{du}{dn}(\varphi(t), \psi(t)) = -\frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \frac{d\psi}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \frac{d\varphi}{ds} = \langle \text{grad } u, \vec{N} \rangle$$

Done

$$W(t) = -U(t) \frac{d\psi}{ds} + V(t) \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\frac{dH}{dt} = U(t) \frac{d\varphi}{ds} + V(t) \frac{d\psi}{ds}$$



Problème de Cauchy V

Remark

- 1 Si on connaît U, V et H on connaît W et H , réciproquement si on connaît W et H on connaît W et $\frac{dH}{dt}$. Le système linéaire précédent permet de déterminer U et V car tout point de γ est régulier $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 > 0$.
- 2 Si on suppose H, U, V connues, c'est à dire $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ sur γ . Si u est complètement déterminée, ses dérivées secondes doivent être déterminés sur γ .

En dérivant le système précédent on a :

$$\begin{cases} U'(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \\ V'(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \\ F(\varphi(t), \psi(t), H(t), U(t), V(t)) = a(\varphi(t), \psi(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\varphi(t), \psi(t)) + \\ b(\varphi(t), \psi(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\varphi(t), \psi(t)) + c(\varphi(t), \psi(t))\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\varphi(t), \psi(t)). \end{cases}$$

Le déterminant Δ est :

Problème de Cauchy VI

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) & 0 \\ 0 & \varphi(t) & \psi'(t) \\ a(\varphi(t), \psi(t)) & b(\varphi(t), \psi(t)) & c(\varphi(t), \psi(t)) \end{vmatrix}$$
$$\Delta = \mathbf{c} [\varphi'(t)]^2 - \mathbf{b} \varphi'(t) \psi'(t) + \mathbf{a} [\psi'(t)]^2$$

En résumé si $\Delta \neq 0$ les dérivées secondes sur γ sont déterminées de façon unique. Si $\Delta = 0$ le système précédent a soit aucune, soit une infinité de solutions.

Définition 4.2

- 1 Les courbes caractéristiques sont les courbes γ qui annulent $\Delta(t)$:

$$\Delta(t) = c(\varphi(t), \psi(t)) [\psi'(t)]^2 - 2b(\varphi(t), \psi(t)) [\varphi'(t)\psi'(t)] + a(\varphi(t), \psi(t)) [\psi'(t)]^2.$$

- 2 On dit que γ n'est caractéristique en aucun point si $\forall t \Delta(t) \neq 0$.

Problème de Cauchy VII

Théorème 4.3

Si la courbe (γ) n'est pas caractéristique, le problème de Cauchy admet une solution unique.

Exercice sur problème de Cauchy I

Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

avec les conditions initiales :

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

où $c > 0$ est une constante, $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions continues représentant les données initiales.

Méthode des caractéristiques et solution

Nous introduisons les variables caractéristiques :

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct.$$

Exercice sur problème de Cauchy II

Dans ces nouvelles variables, la solution générale de l'équation est donnée par :

$$u(x, t) = F(\xi) + G(\eta),$$

où F et G sont des fonctions à déterminer.

En utilisant les conditions initiales :

1 Première condition : $u(x, 0) = f(x)$, ce qui donne :

$$F(x) + G(x) = f(x).$$

2 Deuxième condition : $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, ce qui conduit à :

$$-cF'(x) + cG'(x) = g(x).$$

Exercice sur problème de Cauchy III

En résolvant ce système, on trouve :

$$F'(x) = \frac{1}{2} \left(f'(x) - \frac{g(x)}{c} \right), \quad G'(x) = \frac{1}{2} \left(f'(x) + \frac{g(x)}{c} \right).$$

Par intégration, on obtient :

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) - \frac{1}{c} \int g(x) dx \right), \quad G(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \frac{1}{c} \int g(x) dx \right).$$

Solution finale La solution du problème de Cauchy est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$







Exemple

Prenons $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = 0$. La solution devient :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[e^{-(x-ct)^2} + e^{-(x+ct)^2} \right].$$



References I

-  BADDARI K, ABBASSOV A. "*Equations de la physique mathématique appliquées*". **OPU**; 2009
-  COURANT R, HILBERT D., "*Methods of mathematical physics*"; ; **Wiley -V C H**, édition de 1989. .
-  Eriksson K, Estep D, Hansbo P, Johnson C. Computational Differential Equations. Cambridge University Press, New York, 1990
-  Reinhard H. Équations aux dérivées partielles. Dunod, paris, 2001.
-  Schwartz L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, Paris, 1983.
-  Walter A. Strauss. Partial Diferential Equations : An Introduction. Wiley, 1992

Many thanks for your attention.