## المقطع الرابع/الإحصاء2

# التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغيرات العشوائية المنقطعة

**القانون الأول: قانون توزيع Bernoulli**

**1- تعريف:** نقول عن المتغير العشوائي المنقطع x بأنه يخضع لقانون توزيع **Bernoulli** ( هي تجربة مكونة من حدثين ممكنين ومتعارضين).

- تحقق الحدث (نجاح) بقيمة ممكنة مساوية إلى الواحد.

- عدم تحقق الحدث (خسارة) بقيمة ممكنة مساوية إلى الصفر.

هذين الحدثين المتكاملين والمتعارضين يكونان مجموعة الحوادث الممكنة $\Omega = \{0 ; 1\}$ بحيث أن كل قيمة ممكنة من هاتين القيمتين تتحقق بإحتمال خاص ومفروض.

$$\mathbf{P(x = 1) = P}$$

$$\mathbf{P(x = 0) = 1 - P = q}$$

**مثال:** لدينا زهرة نرد, ما هو إحتمال الحصول على الرقم 6.

لدينا: الحدث الممكن ( الحصول على الرقم6)

الحدث المعارض(عدم الحصول على الرقم 6)

$$\mathrm{PP}(x = 1) = \frac{1}{6} =$$

$$-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}\mathrm{P}(x = 1) = 1 - \mathrm{P} = 1$$

| X | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(x = x_i)$ | $P(x = 0)$ <br> $1 - P$ | $P(x = 1)$ <br> $P$ |

$(x=0)+P\ (x = 1)\sum_{x=0}^{1} P(x = x) = P$

$$\sum_{x=0}^{1} \mathrm{P}(X = x) = 1 - \mathrm{P} + \mathrm{P} = 1$$

⇐ **قانون Bernoulli** هو قانون توزيع الاحتمالات.

**2- المميزات العددية:**

**أ.التوقع الرياضي:**

إحتمال تحقق الحدث: $E(X) = P$

**ب. التباين:**

$$V(X) = \mathrm{P}\ (1 - P)$$

**القانون الثاني: قانون التوزيع الثنائي**

1- **تعريف:**

يمكننا أن نقول عن المتغير العشوائي $\boldsymbol{x}$ بأنه يخضع لقانون التوزيع الثنائي إذا كانت صيغة القانونية معطاة:

$$\mathrm{P}(\mathrm{x} = \boldsymbol{x}) = C_n^x \mathrm{Px\ qn - x} \quad / \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq n \\ \\ p + q = 1 \end{cases}$$

قانون التوزيع الثنائي هو قانون توزيع الإحتمالات:

$$\sum_{\mathrm{x}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{P}(\mathrm{x} = x) = 1$$

**2- المميزات العددية:**

**أ. التوقع الرياضي:**

$$E(\mathrm{x}) = n.P$$

**ب. التباين:**

$$\mathrm{V}\ (x) = \mathrm{n\ P\ q} \qquad \mathrm{q=1-P}$$

ملاحظة: نستعمل قانون Binomial إذا كان عدد التجارب أقل أو تساوي 30، واحتمال تحقق الظاهرة كبير أما إذا كان عدد التجارب يفوق 30 وإحتمال تحقق الظاهرة يكون صغير جدا، وهذا ما سوف نراه لاحقا.

**تمرين:** نرمي زهرة نرد 5 مرات

1) ما هو احتمال ظهور العدد 3 مرتين.
2) ما هو احتمال ظهور العدد 3 مرتين على الأكثر.
3) ما هو احتمال ظهور العدد 3 مرتين على الأقل.

**الحل:** ليكن المتغير العشوائي $X$ يمثل عدد مرات ظهور العدد3 في هذه التجربة الثنائية.

$X\sim$ B (n, $P$) ; n=5

P= $\frac{1}{6} \Rightarrow$ q= 1-P = $\frac{5}{6}$

$P(X = x) = C_n^x P^X q^{n-x}$ :دالة الإحتمال

$$P(X = x) = C_5^x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}$$

1) $P(X= 2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}16$
2) $P(X \leq 2)= P(X= 0)+ P(X= 1)+ P(X= 2)$
$$= C_5^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 + C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}914$$
3) $P(X \geq 2)=1- P(X < 2) =1-[ P(X= 0) + P(X= 1)]$

$P(X \geq 2)= 1- [0{,}393+0{,}379) = 0{,}228$

**تمرين:** إذا علمت أن 10% من المصابين بمرض معين يتم شفاءهم ، لهذا تم إختيار عينة عشوائية تتكون من 6 أشخاص يعانون من ذلك المرض.

**المطلوب:**1) إيجاد إحتمال أن يكون عدد المرضى الذين تم شفاءهم من هذا المرض شخص واحد.

2) إيجاد إحتمال أن يكون عدد المرضى الذين تم شفاءهم من هذا المرض على الأقل شخص واحد.

3) إيجاد E(X) ; V(X) ; E(8-5X) ; V(8-5X)

**الحل:** ليكن x متغير عشوائي، X يمثل عدد الأشخاص المصابين بهذا المرض وتم شفاءهم في العينة.

$X\sim$ B (n, $P$)

n=6

P= 0.1 $\Rightarrow$ q= 1-P = 0.9

$$P(x = x) = \begin{cases} C_n^x P^X q^{n-x}, & x = 0, \dots n \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$$P(x = x) = \begin{cases} C_6^x (0{,}1)^X (0{,}9)^{6-x}, & x = 0, \dots n \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

1) P(X= 1) = $C_6^1$ $(0,1)^1(0,9)^5 = 0.3542$

2) P(X ≥ 1)=1- P(x=0)=1- $C_6^0$ $(0,1)^0(0,9)^6$=$1(0,9)^6 = 0,468$

$E(X) = n.P = 6(0,1) = 0,6$

$V(X) = n.P.q = 6(0,1)(0,9) = 0.54$

$E(8-5X) = E(8) + E(-5X) = 8 - 5E(X) = 8 - 5(0,8) = 5$

$V(8-5X) = (-5)^2V(X) = 25(0,54) = 13.5$ لأن $\boxed{V(b+ax) = a^2V(x)}$

**القانون الثالث: التوزيع فوق الهندسي Hypergéométrique**

**1- تعريف وإستنتاج دالة الإحتمال:**

ليكن لدينا صندوق يحتوي على N كرة بيضاء وغير بيضاء.

الكريات البيضاء موجودة بنسبة P أي عددها NP.

الكريات غير البيضاء موجودة بنسبة q أي عددها Nq.

ونسحب عينة من الصندوق ذات الحجم n، وليكن المتغير العشوائي X هو عدد الكريات البيضاء للعينة المسحوبة.

وبذلك:

- إذا كان السحب يتم بإعادة أي الكرة المسحوبة تعاد قبل سحب الكرة الموالية فتكون عملية السحب مستقلة وعندها يكون التوزيع ثنائي $X \sim B(n, P)$ .
- إذا كان السحب يتم بدون إعادة أي الكرة المسحوبة لا تعاد إلى الصندوق فبعد كل عملية سحب تتأثر تركيبة الصندوق وتصبح عملية السحب هذه غير مستقلة ويكون عدد العينات الممكنة هو $C_N^n$

عدد العينات ذات x من الكريات البيضاء و$(n-x)$ من الكريات غير البيضاء هو $C_{NP}^x.C_{Nq}^{n-x}$
وبذلك تكون دالة الإحتمال المتغير العشوائي x معطاة بالعبارة التالية:

$$P(\mathrm{x}=x) = \begin{cases} \frac{C_{NP}^x.C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n} , & x = 0, \dots n \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

وعندما نقول أن x يتبع التوزيع المنقطع فوق الهندسي ذو المعلمات( P, n , N) وتكتب:

$$X \sim \mathrm{H}(\mathrm{N}, \mathrm{n}, P)$$

مع: $0 \le x \le NP$ و $0 \le n - x \le Nq$

**ملاحظة:**

- إن سحب (n) من الكرات الواحدة تلو الأخرى بدون إعادة أو نسحب (n) كرة واحدة فالعملية نفسها.
- إن دالة الاحتمال تحقق شروط التالية : $\forall x. P(X = x) \geq 0$

$$\sum_{x=0}^{n} P(X = x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{n} \frac{C_{nP}^{x}. C_{nq}^{n-x}}{C_N^n} = 1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{n} C_{NP}^{x}. C_{Nq}^{n-x} = C_N^n$$

**مثال:** لدينا صندوق به 10 كريات منها 6 بيضاء و4 سوداء ونسحب 3 كريات بدون إعادة، وليكن $(x)$ هو عدد الكريات البيضاء المحصل عليها.

**المطلوب:**

- ماهي دالة الإحتمال ل $x$ .
- تأكد من أن مجموع الإحتمالات $\sum_{x=0}^{3} P(X = x) = 1$

**الحل:** إذا كان المتغير العشوائي $X$ يمثل عدد الكريات البيضاء المسحوبة لدينا:

$X \sim$ H (N, n, $P$)

$$P(\mathrm{x} = x) = \begin{cases} \frac{C_{NP}^{x}. C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n} & , \quad x = 0,1, \dots n \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

$N = 10, NP = 6, N q = 4, P = 0.6, q = 0.4, n = 3$

$$P(\mathrm{x} = x) = \begin{cases} \frac{C_6^{x}. C_4^{3-x}}{C_{10}^3} & , \quad x = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

- مجموع الإحتمالات = 1.

$$\mathrm{P(X= 0)} = \frac{C_6^0 * C_4^{3-0}}{C_{10}^3} = \frac{1}{10}$$

$$\mathrm{P(X= 1)} = \frac{C_6^1 * C_4^{3-1}}{C_{10}^3} = \frac{9}{30}$$

$$\mathrm{P(X= 2)} = \frac{C_6^2 * C_4^{3-2}}{C_{10}^3} = \frac{15}{30}$$

$$\mathrm{P(X= 3)} = \frac{C_6^3 * C_4^{3-3}}{C_{10}^3} = \frac{5}{30}$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{3} P(X = x) = \mathrm{P(X= 0)} + \mathrm{P(X= 1)} + \mathrm{P(X= 2)} + \mathrm{P(X= 3)}$$

$= \frac{1}{10} + \frac{9}{30} + \frac{15}{30} + \frac{5}{30} = 1 \Rightarrow 1 =$ مجموع الاحتمالات

**2- المميزات العددية:** $X \sim H(N, n, P)$

**أ. التوقع الرياضي:**

$$E(X) = n\,P$$

ب. **التباين:**

$$V(X) = n\ P\ q\,\frac{(N-n)}{N-1}$$

**ملاحظة:** عند مقارنة التوقع الرياضي والتباين للتوزيع الثنائي مع التوزيع فوق الهندسي نجد أن:

- لهما نفس التوقع الرياضي $E(X) = n.P$ .
- بالنسبة للتباين في التوزيع فوق الهندسي يكون أصغر من التباين والمتعلق بالتوزيع الثنائي ويقل كلما كبرت العينة المسحوبة لأن المعامل $\frac{N-n}{N-1}$ يكون أصغر من 1 بمجرد ما نسحب أكثر من مرة.
- لكن عندما $N$ حجم المجتمع كبير جدا بالمقارنة مع حجم العينة $n$ فإن: $\lim_{N\to+\infty}\frac{N-n}{N-1} = 1$ ويصبح التوزيعان متكافئان.

**القانون الرابع: توزيع Poisson:**

إن التجارب التي تعطينا عدد النجاحات لفترة زمنية معينة أو منطقة محددة تسمى تجارب **Poisson**، والفترة الزمنية يمكن أن تكون ثانية أو يوم ....و المنطقة المحددة يمكن أن تكون صفحة أو متر مكعب أو سنتميتر....

فعدد الزبائن الذين يدخلون إلى مكتب البريد كل 5 دقائق، عدد السيارات التي تمر عند تقاطع الطرق كل دقيقة، عدد النقاط المسجلة بالمقابلة لكرة السلة، عدد المكالمات الهاتفية التي تصل كل 10 دقائق، كلها أمثلة عن تجارب **Poisson.**

**1- تجربة وقانون Poisson:**

**أ.تجربة Poisson:** إن تجربة **Poisson** هي كل تجربة تحقق الشروط التالية وهي:

- معدل عدد النجاحات $\lambda$ التي تحدث في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة معلومة.
- إحتمال حدوث نجاح واحد في فترة زمنية قصيرة أو منطقة صغيرة تتناسب مع طول تلك الفترة أو مساحة تلك المنطقة.
- إحتمال حدوث نجاحين أو أكثر في فترة زمنية قصيرة أو منطقة زمنية مهملة إذا إعتبرنا أن عدة فترات زمنية منفصلة عن بعضها البعض فإن النجاحات في أي فترة مستقل عن حدوث النجاحات في فترة أخرى.

**ب. قانون الإحتمال "دالة الإحتمال":**

نقول عن المتغير العشوائي المنقطع X أنه ذو المعلمة λ إذا كان هذا المتغير يمثل عدد النجاحات التي تحدث في فترة زمنية معينة أو في منطقة محددة بمعدل قدره λ، وتكتب:

$$X \sim P(\lambda)$$

$$P(\mathrm{x}=x)=\begin{cases}\frac{\lambda^{x}\, e^{-\lambda}}{X!} \quad , & x=0,1,2\\ 0 & \text{عدا ذلك}\end{cases}$$

حيث: e= 2.718 هو أساس اللوغاريتم النبيري.

**ملاحظة:** إذا كانت F دالة مستمرة وتقبل مشتقات متتابعة مستمرة بجوار المبدئ فحسب علاقة Maclaurin :

$$f\ (\mathrm{x})= f\ (0) + \frac{x^1}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots . + \frac{x^n}{n!} f^n(0)$$

$$e^{\lambda} = 1+ \frac{\lambda^1}{1!}+ \frac{\lambda^2}{2!}+ \ldots . + \frac{\lambda^n}{n!}$$

و منه يمكن ملاحظة أن العبارة $P(X = x)$ تحقق شرو$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$

دالة الإحتمال: $\forall x\ P(X = x) > 0$

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(X = x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

2- **المميزات العددية:**

**أ. التوقع الرياضي:**

$$E(x) = \lambda$$

**ب. التباين:**

$$V(x) = \lambda$$

- **تقريب التوزيع الثنائي لتوزيع Poisson:**

إذا كان متغير العشوائي X يتبع التوزيع الثنائي$\mathrm{X}{\sim}B(n,P)$ إذا كانت المعلمة $n$ تتزايد بصفة غير منتهية وكان $P$ يقترب من الصفر بصفة نجعل الجداء $(n,P)$ يؤول إلى ثابث λ، أي $P$ يقترب من $\frac{\lambda}{n}$.

في هذه الحالات يقترب التوزيع الثنائي من توزيع Poisson ذو المعلمة λ أي أن:

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^x \mathrm{P}^x \mathrm{q}^{n-x} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

**ملاحظة:** نستعمل قانون توزيع Poisson إذا كان:

1- عدد التجارب كبير جدا واحتمال تحقق الحدث صغير جدا.

2- إذا كان المتغير متعلق بالزمن.

**تمرين:** نفرض أنه في مدينة ما 3 من ألف مصابين بمرض معين، فإذا أخذنا عينة ذات 1500 شخص.

ما هو إحتمال أن نجد أقل من 6 مصابين.

**الحل:** ليكن متغير عشوائي$x$ يمثل عدد المصابين في العينة

$$X\sim B(1500{,}0.003)\text{، } n=1500,\ P=0.003$$

بما أن: $P$ صغير و$n > 30$ كبير يمكن التقريب التوزيع الثنائي بتوزيع Poisson.

$\lambda = n.P = 1500(0.003) = 4.5 \Rightarrow X\sim P(\lambda = 4.5)$

$P(X = x) = \frac{e^{-4.5}(4.5)^x}{x!}$ ; x=0 ;1 ;2 ;3 ;….

$P(X < 6) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$+ P(X = 5)$

$$= e^{-4.5} + (4.5)e^{-4.5} + \frac{(4.5)^2}{2!}e^{-4.5} + \frac{(4.5)^3}{3!}e^{-4.5} + \frac{(4.5)^4}{4!}e^{-4.5} + \frac{(4.5)^5}{5!}e^{-4.5}$$

$\Rightarrow P(X < 6) = 0.7029$