المقطع الأول : مبادئ عامة وأولية في نظرية الاحتمالات

1- الحدث:

تعتبر كلمة حدث مصطلحا أساسيا في نظرية الاحتمال ويعرف الحدث بالواقعة التي يمكن أن تتحقق أو لا تتحقق. وكأمثلة عن ذلك نذكر: نجاح الطالب في الامتحان، ولادة ذكر أو أنثى، الحصول على ربح أعظم، فوز أحد المترشحين في إحدى الانتخابات.

ونشير إلى أن الحدث في مثال الطالب ونجاحه يمكن أن يتحقق بدرجة جيدة أو مقبولة، كما أن نجاحه هذا يمكن أن لا يتحقق بسبب غيابه في الامتحان أو بإخفاقه. ولهذا يجب أن لا نفهم من تعريف الحدث أنه ذو وجهين فقط بل على العكس تماما، يجب أن نتذكر دائما أن كلا من الحالتين (التحقق أو عدم التحقق) يمكن أن يتضمنا عددا كبيرا من الحالات الممكنة لكل منها.

2- احتمال الحدث:

إن الحديث عن الحوادث يقودنا مباشرة إلى تقدير (حساب) إمكانية تحقيق الحوادث، فنقول مثلا: إن إمكانية نجاح الطالب في الامتحان هي كبيرة جدا، ولهذا فقد تكون لدينا فكرة دقيقة حول تحقيق الحادثة، نستخلص من خلالها عندما يعبر عن إمكانية تحقيق تلك الواقعة، فيسمى هذا العدد باحتمال تحقق الحدث، ولهذا نجد نفسنا أمام ضرورة البحث عن تعريف دقيق لاحتمال تحقق أو عدم تحقق الحدث وتحديده حسابيا.

أ. **التعريف النظري للاحتمال:** يعتمد هذا التعريف على دراسة جميع الحالات الممكنة للحدث (حالات تحققه أو عدم تحققه)، ثم نقوم بفرز الحالات التي يمكن أن يتحقق فيها الحدث ونسميها الحالات الملائمة، وعندها يعرف احتمال تحقق الحدث بالعلاقة التالية:

$$\text{احتمال تحقق الحدث} = \frac{\textbf{عدد الحالات الملائمة لتحقق الحدث}}{\textbf{عدد الحالات الممكنة لفراغ الحوادث الأولى}}$$

ونرمز لعدد الحالات الملائمة لتحقق الحدث بالرمز M وعدد الحالات الممكنة لجميع الحوادث الأولية بالرمز N ومنه نرمز لاحتمال تحقق الحدث بالرمز P حيث $\mathrm{P} = \frac{M}{N}$، ومن الواضح والبديهي أن هذا الاحتمال هو عدد غير سالب ولا يزيد على الواحد.

$$0 \leq \mathrm{P} \leq 1$$

مثال: ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي إذا رمينا زهرة النرد مرة واحدة؟

قبل التطرق إلى حساب هذا النوع من الاحتمالات لابد من تعريف الحدث تعريفا دقيقا، ففي هذا المثال الحدث الأساسي هو الحصول على عدد زوجي عندما نرمي زهرة النرد مرة واحدة، ونرمز لهذا الحدث بالرمز A وكذالك عندما نرمي زهرة النرد فيمكن استخراج جميع الحوادث الممكنة والتي عددها 6:

$\mathrm{N} = \{1,2,3,4,5,6\}$، ونسمي هذه المجموعة مجموعة الحوادث الممكنة، فراغ الحوادث الأولية ، المجموعة الكلية (المجموعة الأم) وعدد حالاتها 6 =N ولذلك نقوم باستخراج مجموعة الحالات الملائمة للحصول على عدد زوجي $\mathrm{A} = \{2,4,6\}$ وعدد حالاتها 3 =M وهي عدد الحالات الملائمة لتحقيق الحدث، ولهذا نستطيع حساب احتمال الحصول على عدد زوجي ونرمز له بالرمز P(A) ويكون مساويا إلى:

$$\frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)} = P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}(\mathrm{M})}{\text{عدد الحالات الكلية}(\mathrm{N})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

نلاحظ أن احتمال A محصور بين 0 و1.

ب. **تنوع الحوادث:** إن الحوادث تختلف عن بعضها من حيث الطبيعة والنوعية.

- **الحدث الأكيد** "Evénement possible": هو ذلك الحدث الذي يكون تحققه أكيدا أو بعبارة أخرى هو ذلك الحدث الذي يكون احتمال تحققه مساويا إلى الواحد 1.

ولهذا لاحظنا من تعريف الاحتمال تحقق أي حدث هو عدد غير سالب ولا يزيد عن الواحد 1 أي

$$0 \leq P \leq 1$$

ومن هنا جاء تصورنا بأنه من الممكن أن نصادف حدثا يكون احتماله مساويا لـ «1» وهو ما أطلقنا عليه اسم الحدث الأكيد ونرمز له عموما بالرمز «~» وهذا عندما يكون $P(\Omega)=1$

مثال: زيادة ذكر أو أنثى، وفاة أي إنسان، تعاقب الليل والنهار، سقوط جسم خاضع للجاذبية الأرضية.

- **الحدث المستحيل:** هو الحدث الذي يكون احتمال تحققه يساوي «0» أي يكون تحققه مستحيلا، ومن هنا نجد أن الحدث المستحيل هو تصور أو حقيقة لحدث احتماله «0» ، وذلك لاعتبار أن احتمال أي حدث لا يكون عددا سالبا، فإذا نرمز للحدث المستحيل بالمجموعة الخالية «Ø» ومنه $P(Ø)=0$.

مثال: خلود إنسان، عدم تعاقب الليل والنهار.

- **الحدث النقيض** Evénement contraire: وهو الحدث الذي يعني تحققه عدد تحقق الحدث الأساسي، مثلا نأخذ حدث نجاح الطالب (الحدث الأساسي)، فنجد أن الحدث النقيض لهذا الحدث هو رسوب الطالب حيث أن عدم تحقق النجاح هو الرسوب لذا نرمز للحدث الأساسي بالرمز (A) ولنقيض الحدث بالرمز($\overline{A}$) فإننا نلاحظ أنه لا يمكن أن تحقق الحدثان في آن واحد أو بمعنى آخر أنهما لا يتقاطعان بل أنهما متعارضان تماما حيث نلاحظ أن الحدث ونقيضه يشكلان حدثا أكيدا.

ملاحظة: إن اتجاه الحدث الأساسي والحدث النقيض هو الحدث الأكيد.

- **الحوادث البسيطة** Evénement Simple: هي الحوادث غير القابلة للتجزئة أو لا نريد تجزئتها، فعندما نرمي زهرة نرد نحصل على أحد الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 وظهور كل رقم يسمى الحدث البسيط.

- **الحوادث المركبة** Evénement composes: هي التي يكون أحدها مؤلفا من عدد من الحوادث البسيطة، فعندما نرمي زهرة النرد للحصول على عدد زوجي أو فردي يكون الحدث هو حدث مركب من 3 حوادث بسيطة {6, 4, 2} أو {5, 3, 1}.

- **الحوادث المتقاطعة:** [illegible]وادث التي يمكن أن [illegible] في آن واحد مثل: المطر، البرق، الرعد ويمكننا تمثيل هذه الحوادث [illegible] شكل مجموعات متقاطعه.

- **الحوادث المستقلة:** هي الحوادث التي إذا تحقق أحدها لا تؤثر على احتمال تحقق أي من الحوادث الأخرى أو بعبارة أخرى هي الحوادث التي لا تؤثر حدوث أحدها على حدوث أي أخر منها.

مثل: نجاح الطالب في القسم لا يؤثر على نجاح أو رسوب الطلبة الباقون.

- **الحوادث المرتبطة:** هي الحوادث التي إذا تحقق أحدها يؤثر بمقدارها على تحقق أحد أو بعض الحوادث الأخرى.

- **الحوادث المتكاملة:** هي عبارة عن جملة من الحوادث التي تتألف من جميع الحوادث الممكنة للتجربة أو الظاهرة المدروسة ومن هذا التعريف نستنتج أن نتيجة التجربة أو الظاهرة لابد أن تكون أحد أو بعض

هذه الحوادث، وبعبارة أخرى نقول أن مجموعة الحوادث المتكاملة هي مجموعة من الحوادث مؤلفة من اتحاد جميع الحوادث الممكنة للتجربة أو الظاهرة المدروسة.

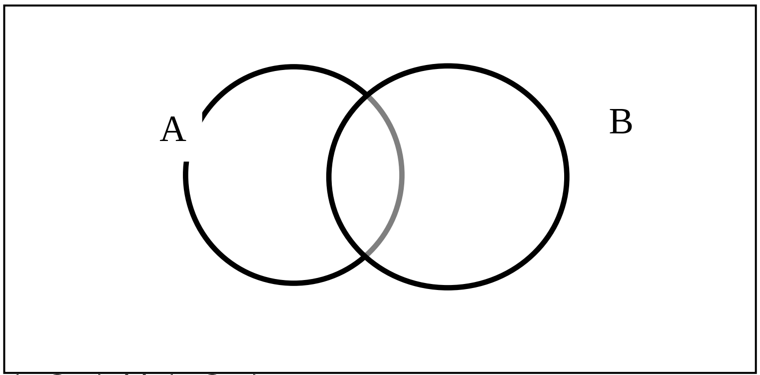
3- الدساتير الأساسية للاحتمالات:

إن المشاكل التي نتعرض إليها في التطبيقات العملية قد تجعل حساب الاحتمالات أمرا صعبا، وهذا ما يضطرنا إلى اللجوء إلى طرق غير مباشرة لحساب مثل تلك الاحتمالات اعتمادا على ما يسمى بالدساتير الأساسية للاحتمالات.

***الدستور العام لاحتمال اتحاد حالتين:** لنأخذ حدثين A وB من فراغ الحوادث الأولية Ω ولنفرض أنهما متقاطعان وغير متعارضين فإن احتمال اتحادهما:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A ∪B



$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (A \cap B)$

وأن الأحداث: $(A\cap B)$، $(A\cap \overline{B})$، $(\overline{A}\cap B)$ متنافية.

فحسب هذا التعريف الرياضي يصبح:

$\boxed{P(A \cup B) = P(A\cap B) + P(A\cap \overline{B}) +}$ ...... (1)

ولدينا: $B = (A\cap B) \cup (\overline{A}\cap B)$; $(A\cap B) \cap (A\cap \overline{B}) \cap (\overline{A}\cap B) = \emptyset$

$\Rightarrow P(B) = P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B)$

$\boxed{\Rightarrow P(\overline{A}\cap B) = P(B) - P(A\cap B)}$ ..... (2)

$A = (A\cap B) \cup (A\cap \overline{B})$; $(A\cap B) \cap (A\cap \overline{B}) = \emptyset$

$\Rightarrow P(A) = P(A \cup B) + P(A\cap \overline{B})$

..... (3)

$\boxed{\Rightarrow P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)}$

نعوض 2 و3 في 1 نجد:

$P(A \cup B) = P(A\cap B) + [P(A) - P(A\cap B)] + [P(B) - P(A\cap B)]$

ويمكن التعميم كالتالي:

$\boxed{\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

∀ A ϵ ϒ (Ω) ; ∀ B ϵ ϒ (Ω) ; ∀ C ϵ ϒ (Ω)

$\boxed{P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)}$