المحور الثاني: التطبيقات الخطية والقيم الذاتية

الهدف من دراسة التطبيقات الخطية والقيم الذاتية هو فهم وتحليل السلوك الأساسي للأنظمة المعقدة في مجالات مثل الهندسة، العلوم،.... تساعد هذه المفاهيم في تبسيط البيانات المعقدة، تحديد الاتجاهات الهامة، وتقليل الأبعاد.

القيم والاشعة الذاتية:

تعريف:

ليكن $f \in \mathcal{L}(E)$. نقول عن شعاع $x \in E$ إنه ذاتي إذا:

1. $x \neq 0$.

2. اذا وُجد $\lambda \in \mathbb{k}$ بحيث $f(x) = \lambda x$.

السلمية λ وحيدة ونسميها قيمة ذاتية لـ f مرفقة بالشعاع الذاتي x ونسمي x شعاعا ذاتيا مرفقا بالقيمة الذاتي مجموعة القيم الذاتية لـ $f \in \mathcal{L}(E)$ هي كل السلميات $\lambda \in \mathbb{k}$ بحيث التطبيق الخطي الداخلي $f - \lambda I_n$ ليس متباينا، I_n التطبيق الحيادي على E . مجموعة الأشعة الذاتية المرفقة بـ λ هي الأشعة x من E بحيث $\left(f - \lambda I_n\right)(x) = 0$.

لتكن A_f مصفوفة f بالنسبة لأساس كيفي $\{e_i\}_{1 \le i \le n}$ لـ E . لدينا إذن $A_f - \lambda I_n$ مصفوفة $f - \lambda I_n$ وبالتالي من تعريف محدد مصفوفة فإن: $f - \lambda I_n = 0$.

$$(1)\text{.........}\det\left(f - \lambda I_n\right) = \det\left(A_f - \lambda I_n\right) = 0$$

العلاقة (1) تصبح:

$$\det\left(f - \lambda I_n\right) = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

كثير الحدود المميز:

نسمي كثير الحدود المميز لـ f كثير الحدود $P_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right)$ حيث A هي مصفوفة f بالنسبة لأي أساس.

إذا كانت A مصفوفة مربعة $n \times n$ ، كثير الحدود $P_A(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right)$ نسميه أيضا كثير الحدود المميز لـ A ، وجذرره هي إذن القيم الذاتية لـ A .

الفضاء الشعاعي:

تعريف:

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$، $f: E \to E$ ت.خ.د. و$\lambda \in \mathbb{k}$ قيمة ذاتية لـ f .

نسمي **الفضاء الجزئي الذاتي** المرفق بالقيمة الذاتية λ (باختصار **ف.ج.ذ**):

. $E(\lambda) = \{x \in E : f(x) = \lambda x\} = Ker(f - \lambda I_n)$

$E(\lambda)$ هو فضاء شعاعي جزئي من E لأنه نواة تطبيق خطي، مكون من صفر الفضاء E والأشعة الذاتية المرفقة بـ λ. من التعريف، الأشعة الذاتية ليست معدومة إذن $\dim E(\lambda) \geq 1$.

تعريف 2:

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{k}$، $f: E \to E$ ت.خ.د.

نقول عن f إنه **قابل للتقطير أومصفوفته مشابهة لمصفوفة قطرية** إذا كان E مجموعا مباشرا لفضاءاته الجزئية الذاتية. (أي يوجد أساس لـ E مكون من الأشعة الذاتية).