1. خاصية التبديل (أو الإبدال)

1.1. التبديل بالنسبة لعمليتي الجمع والطرح

جمع المصفوفات تبديليٌّ ، لأن من أجل كل مصفوفتين A و B لهما نفس البعد فإن

$$A + B = B + A$$

فمثلا إذا كانت المصفوفتانA و B بعدهما 3×3 حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

فإن

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & b_{13}+a_{13} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & b_{23}+a_{23} \\ b_{31}+a_{31} & b_{32}+a_{32} & b_{33}+a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = B + A \end{aligned}$$

لاحظ أن جمع المصفوفات تبديلي لأنه نتج من كون أن عملية جمع الأعداد الحقيقة تبديلية، لذلك فإن **طرح المصفوفات ليس تبديليّاً** لأن طرح الأعداد الحقيقية ليس تبديليّا، فمثلا العنصر $a_{32} - b_{32}$ لا يساوي دائما العنصر $b_{32} - a_{32}$.

2.1. التبديل بالنسبة لعملية الضرب

ضرب المصفوفات ليس تبديلياً ، لأن الجداء $A.B$ لا يساوي دائما الجداء $B.A$.

نأخذ على سبيل المثال المصفوفتين :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A.B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)(-1)+(1)(5) & (3)(2)+(1)(0) \\ (2)(-1)+(4)(5) & (2)(2)+(4)(0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(3)+(2)(2) & (-1)(1)+(2)(4) \\ (5)(3)+(0)(2) & (5)(1)+(0)(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 15 & 5 \end{pmatrix} \neq A.B$$

ملاحظة 1: ينتج من عدم تبديلية ضرب المصفوفات أن جهة الضرب (يمين أو يسار) مهمة في حالة ضرب طرفي مساواةٍ في مصفوفةٍ ما، فإذا كانت لدينا المساواة بين المصفوفات : $M = N$ وأردنا أن نضرب الطرفين في المصفوفة P فيجب المحافظة على جهة الضرب فنضرب الطرفين إما من جهة اليمين أو من جهة اليسار ولا نخلط بين الجهتين بحيث نضرب مثلا الطرف الأول من جهة اليسار والطرف الثاني من جهة اليمين.

$$M = N \Longrightarrow \boldsymbol{P}M = \boldsymbol{P}N$$
$$M = N \Longrightarrow M\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{P}$$

ملاحظة 2: هناك حالات خاصة جدّا يكون فيها ضرب المصفوفات تبديلياً منها ضرب مصفوفة في نفسها $A.A$ أو الضرب في المصفوفة الحيادية I : $M.I = I.M = M$ أو ضرب مصفوفة في مقلوبها : $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I$ حيث M^{-1} هي مقلوب المصفوفة M ، وسنرى لاحقا معنى المصفوفة الحيادية ومعنى مقلوب مصفوفة.

2. خاصية التجميع

1.2. التجميع بالنسبة لعمليتي الجمع والطرح

عملية جمع المصفوفات تجميعية، فمن أجل المصفوفات A ، B و C التي لها نفس البعد فإن

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

أي يمكننا تغيير موضع القوسين دون تغيُّر النتيجة.

فإذا كانت المصفوفات مثلا من البعد 2×2 حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

فإن

$$\begin{aligned}
(A + B) + C &= \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} + c_{11} & a_{12} + b_{12} + c_{12} \\ a_{21} + b_{21} + c_{21} & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} + (b_{11} + c_{11}) & a_{12} + (b_{12} + c_{12}) \\ a_{21} + (b_{21} + c_{21}) & a_{22} + (b_{22} + c_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right)$$
$$= A + (B + C)$$

أما طرح المصفوفات فليس تجميعياً لأن عملية طرح الأعداد الحقيقة ليست تجميعية فمثلا $(a_{11} - b_{11}) - c_{11}$ لا يساوي دائما $a_{11} - (b_{11} - c_{11})$.

2.2. التجميع بالنسبة لعملية الضرب

عملية ضرب المصفوفات تجميعية، فمن أجل المصفوفات الثلاث A ، B و C فإن

$$(A.B).C = A.(B.C)$$

طبعا مع توفُّر شرط الضرب بين المصفوفات.

فلو أخذنا بعد المصفوفات هو 2×2 حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

فإن

$$(A.B).C = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) . \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_3c_1 + a_1b_2c_3 + a_2b_4c_3 & a_1b_1c_2 + a_2b_3c_2 + a_1b_2c_4 + a_2b_4c_4 \\ a_3b_1c_1 + a_4b_3c_1 + a_3b_2c_3 + a_4b_4c_3 & a_3b_1c_2 + a_4b_3c_2 + a_3b_2c_4 + a_4b_4c_4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1(b_1c_1 + b_2c_3) + a_2(b_3c_1 + b_4c_3) & a_1(b_1c_2 + b_2c_4) + a_2(b_3c_2 + b_4c_4) \\ a_3(b_1c_1 + b_2c_3) + a_4(b_3c_1 + b_4c_3) & a_3(b_1c_2 + b_2c_4) + a_4(b_3c_2 + b_4c_4) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1c_1 + b_2c_3 & b_1c_2 + b_2c_4 \\ b_3c_1 + b_4c_3 & b_3c_2 + b_4c_4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right) = A.(B.C)$$

2.2.1. مثال

يمكنك – عزيزي الطالب – التأكد من أن عملية الضرب تجميعية من أجل المصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A.B).C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \right) . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 9 & 0 \\ 32 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 5 & 28 \\ 9 & 0 & 9 \\ 22 & -5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$A.(B.C) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 5 & 28 \\ 9 & 0 & 9 \\ 22 & -5 & 17 \end{pmatrix}$$

ومنه $(A.B).C = A.(B.C)$

3. خاصية توزيع الضرب على الجمع والطرح

3. 1. توزيع الضرب على الجمع

لتكن المصفوفات A ، B و C.

عملية الضرب توزيعية على الجمع أي أن $A.(B + C) = A.B + AC$

حيث شروط الضرب والجمع متوفّرة.

على سبيل مثال سابق لو أخذنا المصفوفات من البعد 2×2 حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

$$A.(B + C) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_3 + a_2 c_3 & a_1 b_2 + a_1 c_2 + a_2 b_4 + a_2 c_4 \\ a_3 b_1 + a_3 c_1 + a_4 b_3 + a_4 c_3 & a_3 b_2 + a_3 c_2 + a_4 b_4 + a_4 c_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 b_1 + a_2 b_3) + (a_1 c_1 + a_2 c_3) & (a_1 b_2 + a_2 b_4) + (a_1 c_2 + a_2 c_4) \\ (a_3 b_1 + a_4 b_3) + (a_3 c_1 + a_4 c_3) & (a_3 b_2 + a_4 b_4) + (a_3 c_2 + a_4 c_4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_3 & a_1 c_2 + a_2 c_4 \\ a_3 c_1 + a_4 c_3 & a_3 c_2 + a_4 c_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = A.B + AC$$

2. 2. توزيع الضرب على الطرح

الضرب توزيعي حتى على الطرح أي

$$A.(B - C) = A.B - AC$$

لو نستخدم نفس المصفوفات السابقة سنجد

$$A.(B-C)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1-c_1 & b_2-c_2\\ b_3-c_3 & b_4-c_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1b_1-a_1c_1+a_2b_3-a_2c_3 & a_1b_2-a_1c_2+a_2b_4-a_2c_4\\ a_3b_1-a_3c_1+a_4b_3-a_4c_3 & a_3b_2-a_3c_2+a_4b_4-a_4c_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(a_1b_1+a_2b_3)-(a_1c_1+a_2c_3) & (a_1b_2+a_2b_4)-(a_1c_2+a_2c_4)\\ (a_3b_1+a_4b_3)-(a_3c_1+a_4c_3) & (a_3b_2+a_4b_4)-(a_3c_2+a_4c_4)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4\\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_1c_1+a_2c_3 & a_1c_2+a_2c_4\\ a_3c_1+a_4c_3 & a_3c_2+a_4c_4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{pmatrix}=A.B-AC$$

4. العنصر الحيادي والعنصر النظير

سوف نهتم هنا بالمصفوفات المربّعة.

1.4. العنصر الحيادي والعنصر النظير بالنسبة لعملية الجمع

لتكن M مصفوفة مربّعة.

المصفوفة الحيادية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات هي المصفوفة I التي تحقق

$$M+I=I+M=M$$

نستطيع أن نثبت بسهولة أن I هي المصفوفة المعدومة أي التي جميع عناصرها معدومة.

ففي حالة المصفوفات ذات البعد 2×2 تكون I هي

$$I=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

وفي حالة المصفوفات ذات البعد 3×3 تكون I هي

$$I=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

مثلا من أجل المصفوفة $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ فإن

$$\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+0 & 2+0\\ 3+0 & 4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

أما نظير المصفوفة M بالنسبة لعملية الجمع فهي المصفوفة P التي تُحقق

$$M+P=P+M=I$$

حيث I هي المصفوفة الحيادية بالنسبة لعملية الجمع.

يمكنك إثبات أن $P=-M$.

ومنه نظير M هي المصفوفة $-M$ (وهي المصفوفة M مضروبة في العدد الحقيقي -1)

في نفس المثال السابق لدينا

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-5 & 2-2 \\ 3-3 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I$$

2.4. العنصر الحيادي والعنصر النظير بالنسبة لعملية الضرب

لتكن M مصفوفة مربّعة.

المصفوفة الحيادية بالنسبة لعملية الضرب هي المصفوفة I التي تحقق

$$M.I = I.M = M$$

وتُسمى أيضا مصفوفة الوحدة وهي مصفوفة قطريةٌ جميعُ عناصر قطرِها الرئيسي تساوي 1 أي

$$\forall i,j \in \mathbb{R} \quad : \quad a_{ij} = 0 \quad if \quad i \neq j \quad , \quad a_{ii} = a_{jj} = 1 \quad if \quad i = j$$

ففي حالة المصفوفات ذات البعد 2×2 فإن I هي

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وفي حالة المصفوفات ذات البعد 3×3 تكون مصفوفة الوحدة هي

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وفي حالة المصفوفات ذات البعد 4×4 فإن

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهكذا.

أما العنصر النظير بالنسبة لضرب المصفوفات فيُسمى هنا مقلوب مصفوفة.

مقلوب المصفوفة M هي المصفوفة M^{-1} التي تُحقق

$$M.M^{-1} = M^{-1}.M = I$$

حيث I هي المصفوفة الحيادية بالنسبة لعملية الضرب.

وسنهتم بهذا في فصل آت حيث سندرس متى تكون المصفوفة قابلةً للقلب وكيف نحسب مقلوبها.

5. تمرين تطبيقي:

لتكن المصفوفات

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&2\\1&4&1\end{pmatrix}\quad,\quad C=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\3&3&-2\\4&5&-3\end{pmatrix}$$

1/ أحسب $A+B$ ، $B+A$. ماذا تُلاحظ؟

2/ تأكد من أن ضرب المصفوفات ليس تبديليا وذلك بإجراء العمليات التالية : $A.B$ ، $B.A$.

3/ أثبت أن $(A.B).C=A.(B.C)$.

4/ أحسب الجداءين $A.C$ ، $C.A$. ماذا تستنتج؟

الحل

1/

$$A+B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&2\\1&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&2+1&-1+0\\1+3&-1+1&1+2\\3+1&1+4&0+1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&3&-1\\4&0&3\\4&5&1\end{pmatrix}$$
$$B+A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&2\\1&4&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1&1+2&0-1\\3+1&1-1&2+1\\1+3&4+1&1+0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3&3&-1\\4&0&3\\4&5&1\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $A+B=B+A$ وذلك لأن جمع المصفوفات تبديليٌّ.

2/

$$A.B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&2\\1&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-1&3\\0&4&-1\\9&4&2\end{pmatrix}$$
$$B.A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&2\\1&4&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&-1\\10&7&-2\\8&-1&3\end{pmatrix}$$

وجدنا أن $A.B\neq B.A$ وهذا ما يعني أن ضرب المصفوفات ليس تبديليّا.

3/

$$(A.B).C=\left(\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&2\\1&4&1\end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix}-1&-1&1\\3&3&-2\\4&5&-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}7&-1&3\\0&4&-1\\9&4&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&-1&1\\3&3&-2\\4&5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&0\\8&7&-5\\11&13&-5\end{pmatrix}$$

$$A.(B.C)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}.\left(\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&2\\1&4&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&-1&1\\3&3&-2\\4&5&-3\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&0\\8&10&-5\\15&16&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&0\\8&7&-5\\11&13&-5\end{pmatrix}$$

ومنه $(A.B).C=A.(B.C)$.

4/

$$A.C=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1&-1&1\\3&3&-2\\4&5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

$$C.A=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\3&3&-2\\4&5&-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I$$

إذن $A.C=C.A=I$ ، حيث I هي المصفوفة الحيادية بالنسبة لعملية الضرب.

نستنتج أن C هي مقلوب A وفي نفس الوقت A هي مقلوب C .