المحور الأول: العمليات على جبر المصفوفات

1. مفهوم المصفوفات

المصفوفة المصفوفة هي تنظيم مستطيل من الأعداد أو الرموز أو التعبيرات مرتبة في صفوف وأعمدة، وهي أداة رياضية تستخدم في مجالات عديدة كالفيزياء والهندسة والحوسبة. في الحوسبة، هي بنية بيانات لتخزين عناصر من نفس النوع في مساحة ذاكرة متسلسلة، لها سعة ثابتة تُحدد عند البرمجة. او يمكن أن نعرفها على أنها مجموعة مرتبة من الأرقام أو الرموز أو التعبيرات في صفوف وأعمدة.

$A_{(m\times n)}$ مصفوفة ذات بعدين $m\times n$، يعني أنها تحتوي على m سطر و n عمود، تسمى عناصر المصفوفة بالمعاملات ويرمز لها بالرمز a_{ij}، حيث: i رتبة السطر و $i=1,2,..m$ j رتبة العمود $j=1,2,..n$

$$\boldsymbol{A_{(m\times n)}=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}$$

مثال:

$$\boldsymbol{A_{(2\times 4)}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}}$$

2. أنواع المصفوفات

وجد أنواع عديدة من المصفوفات، ومنها: المصفوفات المربعة، والمصفوفات المستطيلة ، ومصفوفات الصف الواحد، ومصفوفات العمود الواحد، بالإضافة إلى ومصفوفة الوحدة، والمصفوفات القطرية والمثلثية.

2-1- **المصفوفة المربعة**

المصفوفة المربعة عدد الاعمدة يساوي عدد الاسطر $n\times n$ ، ونرمز لها بـ:

$A_{(n\times n)}$

$$\boldsymbol{A_{(n\times n)}=A_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

مثال: $n=3$:

$$\boldsymbol{A_{(3\times 3)}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

2-2 – المصفوفة السطرية

هي المصفوفة التي يساوي عدد أسطرها الواحد : $1 \times n$ ، وعدد أعمدتها n ، ويرمز لها بـ: $A_{(1\times n)}$

$$\boldsymbol{A_{(1\times n)} = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \dots \quad a_{1n}]}$$

2-3- المصفوفة العمودية

المصفوفة العمودية هي المصفوفة التي عدد أعمتها يساوي الواحد $n \times 1$ ، وعدد أسطرها يساوي n ونرمز لها بالرمز: $A_{(n\times 1)}$

$$\boldsymbol{A_{(n\times 1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}}$$

2-4- المصفوفة الصفرية

هي المصفوفة التي يساوي جميع عناصرها الصفر ويركز لها بالرمز: O.

$$\boldsymbol{O_{(m\times n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}$$

2-5-المصفوفة القطرية

هي المصفوفة التي جميع عناصرها تساوي الصفر ماعدا عناصر القطر الرئيسي ويرمز بها بـ: D.

$$\boldsymbol{D_{(n\times n)} = D_n = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}}$$

مثال:

$$\boldsymbol{D_{(3\times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}$$

2-5-المصفوفة الوحدة

هي المصفوفة التي جميع عناصرها تساوي أصفارا ما عدا عناصر القطر الرئيسي والتي تساوي الواحد الصحيح (1) ، ويرمز لها بـ: I.

$$I_{(n\times n)} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

3-محدد المصفوفات

ويُمكن حسابه من عناصر المصفوفة المربعة، ويحدد خصائص التحويل الخطي الذي تصفه هذه المصفوفة. يكون المحدد يساوي صفرًا إذا وفقط إذا كانت المصفوفة غير قابلة للعكس (غير قابلة للقلب).

ويرمز له بـ $\det(A)$ أو $|A|$.

يحسب المحدد بعدة طرق من أهمها:

3-1- قاعدة لابلاس (المحددات الصغرى) تحسب من العلاقة التالية:n

$$\det(A) = \sum_{j=1} (-1)^{i+j} a_{ij} \,.\, \det(M_{ij})$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = |A| = +a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$|A| = +a(ei - hf) - d(bi - hc) + g(bf - ec)$$

مثال: ليكن محدد المصفوفة $A_{(3\times3)}$ التالية كما يلي:

$$A_{(4\times4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

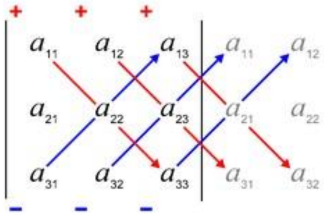
$$\det(A) = +1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = +1[(0\times 2) - (2\times 2)] - 0[(2\times 2) - (1\times 2)] + 1[(2\times 2) - (1\times 0)]$$

$$\det(A) = -4 - 0 + 4 = 0$$

3-2- طريقة ساروس:

طريقة ساروس هي طريقة لحساب محدد مصفوفة من الدرجة 3× 3 وتتضمن نسخ العمودين الأول والثاني من المصفوفة إلى جانبها، ثم جمع حاصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية من أعلى إلى أسفل، وطرح مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الثانوية من أعلى إلى أسفل، كما يبينها الشكل التالي:



ويحسب المحدد وفقا لطريقة ساروس بالعلاقة التالية:

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

مثال: حساب نفس المثال السابق بطريقة ساروس:

$$\boldsymbol{A}_{(\boldsymbol{4}\times\boldsymbol{4})} = \left[\left(\begin{array}{ccc|cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{array}\right)\right]$$

$$\det(A) = +1 \times 0 \times 2 + 0 \times 2 \times 1 + 1 \times 2 \times 2 - 1 \times 0 \times 1 - 2 \times 2 \times 1 - 2 \times 2 = 0$$

4-حساب منقول المصفوفة:

ويتكون عن طريق تبديل صفوف المصفوفة بأعمدتها ، ويرمز له بالرمز : A^T.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{p} \end{bmatrix} \to \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{f} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{g} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{l} & \boldsymbol{p} \end{bmatrix}$$

مثال:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \to \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

5-العمليات الأساسية على المصفوفات:

5-1- جمع المصفوفات

يتم فيها جمع مصفوفتين متطابقتين في الأبعاد (نفس عدد الصفوف وعدد الأعمدة)، حيث جمع العناصر المتناظرة في كل مصفوفة، ويكون الناتج مصفوفة جديدة بنفس الأبعاد .

إذا كانت A و B مصفوفتان لهما نفس الابعاد $(m \times n)$، فإن المصفوفة الناتجة تكون وفق العلاقة التالية:

$$C = A + B \rightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

مثال: لتكن لدينا المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن جمع المصفوفتين يكون من الشكل التالي:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+0 \\ 0+1 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

5-2-طرح المصفوفات

يتم فيها طرح مصفوفتين متطابقتين في الأبعاد (نفس عدد الصفوف وعدد الأعمدة)، حيث تطرح العناصر المتناظرة في كل مصفوفة، ويكون الناتج مصفوفة جديدة بنفس الأبعاد .

إذا كانت A وB مصفوفتان لهما نفس الابعاد $(m \times n)$، فإن المصفوفة الناتجة تكون وفق العلاقة التالية:

$$C = A - B \rightarrow C_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$$

مثال: لتكن لدينا المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن حاصل طرح المصفوفتين يكون كالتالي:

$$C = A - B = \begin{bmatrix} 8-5 & 2-0 \\ 5-3 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5-3-ضرب المصفوفات

5-3-1- ضرب ثابت في مصفوفة: حيث يمكن ضرب ثابت في عناصر المصفوفة وفقا للعلاقة التالية:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \times k = k \times \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

5-3-1- ضرب مصفوفة في مصفوفة: كما يمكن ضرب مصفوفتين متوافقتان في الأبعاد حيث أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد أسطر المصفوفة الثانية وفقا للعلاقة التالية:

المصفوفة الأولى من الدرجة $(m \times n)$ والمصفوفة الثانية من الدرجة $(n \times p)$ فإن المصفوفة الناتجة تكون من الدرجة $(m \times p)$.

كما يبينها الشكل الموالي:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap_1 + bp_2 + cp_3 \\ dp_1 + ep_2 + fp_3 \\ gp_1 + hp_2 + ip_3 \end{bmatrix}$$

مثال: لتكن المصفوفتين التاليتين:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

فإن حاصل ضرب المصفوفات التالية يكون من الشكل :

$$\boldsymbol{A \times B} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{8 \times 5 + 2 \times 3} & \mathbf{8 \times 0 + 2 \times 1} \\ \mathbf{5 \times 5 + 4 \times 3} & \mathbf{5 \times 0 + 4 \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{46} & \mathbf{2} \\ \mathbf{37} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B \times A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{5 \times 8 + 0 \times 5} & \mathbf{5 \times 2 + 0 \times 4} \\ \mathbf{3 \times 8 + 1 \times 5} & \mathbf{3 \times 2 + 1 \times 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{40} & \mathbf{10} \\ \mathbf{29} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

6-خصائص المصفوفات:

- $\mathbf{det}(\boldsymbol{A}) \neq \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{A\ is\ Invertible}$
- $\boldsymbol{A \times A^{-1} = I}$
- $\boldsymbol{det(kA) = k \times det(A)}$
- $\boldsymbol{det(A + B) \neq det(A) + det(B)}$
- $\boldsymbol{det(A \times B) = det(A) \times det(B)}$
- $\boldsymbol{det(A^T) = det(A)}$
- $\boldsymbol{A \times B \neq B \times A}$
- $\boldsymbol{A \times (B + C) = A \times B + A \times C}$
- $\boldsymbol{(A \times B) \times C = A \times (B \times C)}$