Test Finale

Dr. Chabane Farid

Khemis Miliana Unieversity

Matre and Computer science Faculty

Mathematical Department

Email : *f.chabane@univ-dbkm.dz*

5.0

10 Mars 2025

Table des matières

Objectifs

Le test final vise à évaluer les connaissances et les compétences acquises par l'étudiant à l'issue du chapitre consacré à l'équation des ondes. Il couvre l'ensemble des notions théoriques et pratiques abordées dans le cours, notamment :

- La formulation mathématique de l'équation des ondes dans différentes dimensions ;
- Les conditions aux limites et les conditions initiales associées ;
- Les méthodes de résolution classiques (séparation de variables, séries de Fourier, etc.)
- L'interprétation physique des solutions ;
- Les applications dans des contextes concrets.

I Test finale

1. Exercice :

Soit le système différentiel suivant:

$$\frac{2dx}{x+2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \qquad \text{(H)}$$

Question 1

Résoudre le système différentiel (H).

Question 2

Déterminer l'équation du graphe de la solution de l'EDP suivante:

$$(x+2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

passant par la courbe initiale (γ) définie par:

$$x_0 = -1, \quad y_0 = s, \quad z_0 = \sqrt{s}, \quad s \geq 0$$

2. Exercice :

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'EDP d'ordre 2 suivante:

$$(n-1)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^{2n}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ny^{2n-1}\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1)$$

Question 1

Étudier selon les valeurs de l'entier n le type l'équation (E).

Question 2

Résoudre l'équation (E) pour $n = 1$.

Question 3

Pour $n \geq 2$, en posant $X = x + y^{1-n}$ et $Y = x - y^{1-n}$, l'équation (E) se ramène à l'équation (F) suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0 \qquad \text{(F)}$$

Question 4

Résoudre l'équation (F) et en déduire les solutions de (E) en fonction de n.

3. Exercice :

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(0,y) = y^2. \end{cases} \qquad (E_1)$$

Question 1

Donner la définition d'une courbe caractéristique de (E_1).

Question 2

Donner le théorème d'existence et d'unicité pour(E_1).

Question 3

Définir les caractéristiques de (E_1)

Question 4

Déterminer les courbes caractéristiques de (E_1).

Question 5

Démontrer que la solution de (E_1)est constante le long des caractéristiques.

Question 6

Résoudre(E_1) si c'est possible.

Question 7

Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases} \qquad (E_2)$$

admet-il des solutions?

Corrigé de Test Finale

[cf. Correger le test d'evaluarionN1v2]

* *

*

La méthode des caractéristiques est une technique fondamentale pour résoudre les problèmes de Cauchy associés aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Elle transforme ***l'EDPs*** en un système d'équations différentielles ordinaires le long de courbes appelées caractéristiques.

En suivant ces courbes, on construit des solutions qui satisfont à la fois l'équation et les conditions initiales données.

Cette méthode est particulièrement efficace pour les équations quasi-linéaires, car elle permet d'obtenir des solutions particulières à partir des données initiales.

De plus, pour qu'un problème de Cauchy soit bien posé, certaines conditions doivent être respectées :

la courbe initiale doit être non caractéristique et les données doivent être compatibles avec l'équation, assurant ainsi l'existence et l'unicité de la solution locale.

Ainsi, la méthode des caractéristiques établit un lien naturel entre les ***EDPs*** et les équations différentielles ordinaires, tout en fournissant un cadre rigoureux pour résoudre des problèmes concrets en mathématiques et en physique.