

Module : Equations de la Physique Mathématique - Examen Partiel  
Dimanche 08/12/2024 - Durée : 1 h et 30 m

**Corrigé : Sujet 1**

**Exercice 1 :**

1. Résolvons le système différentiel suivant :

$$\frac{2dx}{x+2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad (\text{H})$$

La première équation nous donne

$$\int \frac{2dx}{x+2} = \int \frac{dy}{y}$$

D'où

$$\ln(x+2)^2 = \ln |\lambda y|, \lambda \in \mathbb{R}^* \quad (1pt)$$

et par suite

$$\frac{(x+2)^2}{y} = k. \quad (0, 5pt)$$

Une intégrale première est

$$U(x, y, z) = \frac{(x+2)^2}{y}, \quad x > -2, \quad y > 0. \quad (0, 5pt)$$

De la deuxième équation, en procédant de la même manière, nous obtenons la deuxième intégrale première :

$$V(x, y, z) = \frac{z}{y}, \quad y > 0, \quad z > 0. \quad (2pt)$$

Ces deux intégrales premières sont fonctionnellement indépendantes, en effet

$$\frac{D(U, V)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{2(x+2)}{y} & -\frac{(x+2)^2}{y^2} \\ 0 & -\frac{z}{y^2} \end{vmatrix} = \frac{2z(x+2)}{y^3} \neq 0 \dots (1pt)$$

dans un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , par exemple dans  $\Omega = ]-2, +\infty[ \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ . Les solutions du système donné sont les courbes  $\gamma_{ab}$  intersection des surfaces d'équations  $U(x, y, z) = a$  et  $V(x, y, z) = b$ . (0, 5pt) ou La forme implicite est donnée par

$$(x, y, z) \mapsto F(U(x, y, z), V(x, y, z)) = C^{cte}$$

où F est une fonction quelconque 2. Déterminons l'équation du graphe de la solution de l'EDP suivante :

$$(x+2)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

passant par la courbe initiale (  $\gamma$  ) définie par :

$$x_0 = -1, y_0 = s, z_0 = \sqrt{s}, \quad s \geq 0$$

Le système caractéristique associé à l'EDP est

$$\frac{dx}{x+2} = \frac{dy}{2y} = \frac{dz}{2z} \quad (0, 5pt)$$

qui est équivalent au système

$$\frac{2dx}{x+2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

déjà résolu. La solution de l'EDP est donnée implicitement par la formule

$$F\left(\frac{(x+2)^2}{y}, \frac{z}{y}\right) = 0. \quad (0, 5pt)$$

Par le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction d'une seule variable, de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  telle que

$$\frac{z}{y} = \varphi\left(\frac{(x+2)^2}{y}\right) \dots (0.5pt)$$

Ainsi les solutions de l'EDP sont :

$$z(x, y) = y\varphi\left(\frac{(x+2)^2}{y}\right). \quad (0, 5pt)$$

Déterminons la solution dont le graphe passe par la courbe ( $\gamma$ ) définie par

$$x_0 = -1, y_0 = s, z_0 = \sqrt{s}, \quad s \geq 0$$

On a  $z(x_0, y_0) = z_0$  d'où  $z(-1, s) = \sqrt{s}$ . En portant dans l'expression de la fonction  $z$  nous obtenons

$$\sqrt{s} = s\varphi\left(\frac{1}{s}\right), \quad (0, 5pt)$$

D'où

$$\varphi\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

Posons  $\tau = 1/s$  alors  $\varphi(\tau) = \sqrt{\tau}$ , (0, 5pt) et la solution cherchée est

$$\begin{aligned} z(x, y) &= y\varphi\left(\frac{(x+2)^2}{y}\right) \\ &= y\sqrt{\frac{(x+2)^2}{y}} \\ z(x, y) &= (x+2)\sqrt{y}; x > -2, y > 0. \quad (1pt) \end{aligned}$$

**Auter Méthoud :** Introduisons un nouveau paramètre dans le système caractéristique.

$$\frac{2dx}{x+2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = dt \dots (0.5pt)$$

Il en découle

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{x+2} &= dt \\ \frac{dy}{y} &= 2dt \\ \frac{dz}{z} &= 2dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x+2) = t + a \\ \ln y = 2t + b \\ \ln z = 2t + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = Ae^t - 2 \\ y = Be^{2t} \\ z = Ce^{2t} \end{cases} \dots (1pt)$$

Déterminons les constantes  $A, B$  et  $C$ . Pour  $t = 0$  on a  $x = -1$  d'où  $-1 = A - 2$  et  $A = 1$ . On a  $y(0) = s$  d'où  $B = s$ . De même  $z(t) = \sqrt{s}$  donne  $C = \sqrt{s}$ . La solution de l'EDP dont le graphe passe par la courbe ( $\gamma$ ) est définie par

$$\begin{cases} x = e^t - 2 \\ y = se^{2t} \\ z = \sqrt{s}e^{2t} \end{cases} \quad (0.5pt)$$

Éliminons le paramètres  $s$  et  $t$  :

On a

$$e^t = x + 2$$

d'où

$$\begin{aligned} y &= s(x+2)^2, \quad z = \sqrt{s}(x+2)^2 \quad (1pt) \\ y &= s(x+2)^2 \Rightarrow s = \frac{y}{(x+2)^2} \Rightarrow \sqrt{s} = \frac{\sqrt{y}}{x+2} \end{aligned}$$

En portant dans l'expression de  $z$ , nous obtenons

$$z = \sqrt{s}(x+2)^2 = \frac{\sqrt{y}}{x+2}(x+2)^2$$

i.e.

$$z(x, y) = (x+2)\sqrt{y}. (1pt)$$

**Exercice 2 :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère l'EDP d'ordre 2 suivante :

$$(n-1)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^{2n} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ny^{2n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1)$$

1. Type l'équation (  $E$  ). (3 × 1pt)-Le discriminant de l'équation est

$$\Delta = 4(n-1)^2 y^{2n}.$$

- Ainsi si  $n = 1$ ,  $\Delta = 0$  est l'équation est parabolique.
  - Si  $n \geq 2$  et  $y \neq 0$ ,  $\Delta > 0$  et l'équation est hyperbolique en dehors de l'axe des abscisses.
2. Pour  $n = 1$  l'équation (  $E$  ) s'écrit :

$$\begin{aligned} -y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial u}{\partial y} \\ y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (2 \times 1pt) \end{aligned}$$

D'où

$$y \frac{\partial u}{\partial y} = C(x)$$

Où  $C$  est une fonction d'une seule variable (ne dépendant que de  $x$  ). L'équation (1) peut-être regardée comme étant une EDO d'ordre 1 :

$$y \frac{du}{dy} = c \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{C}{y} \Rightarrow du = \frac{C}{y} dy \Rightarrow u(x, y) = C(x) \ln |y| + K(x) \quad (1pt)$$

Où  $K$  est une fonction d'une seule variable.

3. Pour  $n \geq 2$ , en posant  $X = x + y^{1-n}$  et  $Y = x - y^{1-n}$ , l'équation (  $E$  ) se ramène à l'équation (  $F$  ) suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0$$

Résolution de l'équation (F) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial Y} = A(Y), (1pt)$$

ou'  $A$  est une fonction d'une seule variable ne dépendant que de  $y$ .

$$\frac{\partial u}{\partial Y} = A(Y) \Rightarrow u(X, Y) = B(Y) + D(X) \quad (1pt)$$

Avec  $B$  une primitive de  $A$  et  $D$  est une fonction de  $X$ . Les fonctions  $B$  et  $D$  sont de classe  $C^2$ . Les solutions  $u$  de l'équation (  $E$  ) pour  $n \geq 2$  sont données par :

$$u(x, y) = B(x - y^{1-n}) + D(x + y^{1-n}) \quad (1pt)$$

### Corrigé : Sujet 2

#### Exercice 1 :

( 6.5 pts ) Soit le système différentiel suivant :

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \quad (S)$$

De la première équation

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow xdx = ydy \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 + c$$

D'où  $x^2 - y^2 = C$ . Une première intégrale première est  $u(x, y, z) = x^2 - y^2$ . De la même manière, de la deuxième équation nous avons la deuxième intégrale première,  $v(x, y, z) = y^2 - z^2$ . (2 × 1pt) Remarquons que

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 4xy. (0, 5pt)$$

Donc  $u$  et  $v$  sont fonctionnellement indépendantes dans au moins un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , par exemple  $\Omega = ]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . (0, 5pt)

Les solutions du système donné sont les courbes (  $\gamma_{ab}$  ) intersection des surfaces de  $\mathbb{R}^3$  d'équations  $x^2 - y^2 = a$ ,  $y^2 - z^2 = b$ . (0, 5pt)

2. Solutions de l'EDP suivante

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

Le système caractéristique de cette EDP d'inconnue  $z$  est

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \quad (0, 5pt)$$

ayant, d'après la première question, pour intégrales premières  $u$  et  $v$ . Les solutions de l'EDP sont données implicitement par

$$F(u(x, y, z), v(x, y, z)) = 0 \text{ i.e. } F(x^2 - y^2, y^2 - z^2) = 0, \quad (0, 5pt)$$

où  $F$  est une fonction de deux variables de classe  $C^1$ . Il existe alors une fonction  $\varphi$  de classe  $C^1$  telle que  $y^2 - z^2 = \varphi(x^2 - y^2)$ . D'où l'en tire

$$z^2(x, y) = y^2 - \varphi(x^2 - y^2) \cdot (0, 5pt)$$

3. Déterminons les solutions  $z$  dont le graphe contient le point  $A(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$ .  $A$  est un point du graphe de  $z \Leftrightarrow \sqrt{2}^2 = 1 - \varphi(\sqrt{2}^2 - 1) \Leftrightarrow \varphi(1) = -1$ . Les solutions  $z$  dont le graphe

contient le point  $A$  sont les fonctions  $z$  pour lesquelles  $\varphi(1) = -1$ . (1 pt) Exemples (1 pt) :  
Pour  $\varphi(t) = -t$ , nous obtenons

$$z^2(x, y) = y^2 + x^2 - y^2 = x^2$$

Pour  $\varphi(t) = \cos(\pi t)$ , nous obtenons

$$z^2(x, y) = y^2 - \cos\left(\pi\left(x^2 - y^2\right)\right)$$

## Exercice 2 :

( 7 pts ) On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u(0, y) = y^2. \end{cases} \dots (E_1)$$

1) Une courbe caractéristique associé à (  $E_1$  ) est une solution de son système caractéristique (S) (0.5pts)

$$dx = -\frac{dy}{xy}, dz = 0$$

2) Le problème de Cauchy est posé sur la courbe  $\mathcal{C}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$  (L'axe des ordonnées) : (1pts)

- a) Si la courbe ( $\mathcal{C}_1$ ) n'est pas caractéristique, le problème (  $E_1$  ) admet une solution unique.
- b) Si la courbe ( $\mathcal{C}_1$ ) est une courbe caractéristique, le problème (  $E_1$  ) peut ne pas avoir de solution ou il peut en avoir une infinité.
- 3) On définit les caractéristiques comme des courbes  $\mathbb{R}^2$  données par  $(x_c(s), y_c(s))$ . Les équations qui satisfont  $(x_c(s), y_c(s))$  sont

$$\begin{cases} x'_c(s) = 1 \\ y'_c(s) = -x_c(s)y_c(s), \dots (1pts) \\ z'_c(s) = 0. \end{cases}$$

4) Déterminons les courbes caractéristiques de (  $E_1$  ).

Intégrons l'équation

$$dx = -\frac{dy}{xy} \Rightarrow xdx = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \ln y = c$$

Ceci donne

$$ye^{\frac{x^2}{2}} = K \dots, \quad K \in \mathbb{R} \dots (1pts)$$

une intégrale première. Comme l'équation est linéaire homogène, l'équation cartésienne des courbes caractéristiques est

$$y_K = Ke^{-\frac{x^2}{2}}, K \in \mathbb{R}.$$

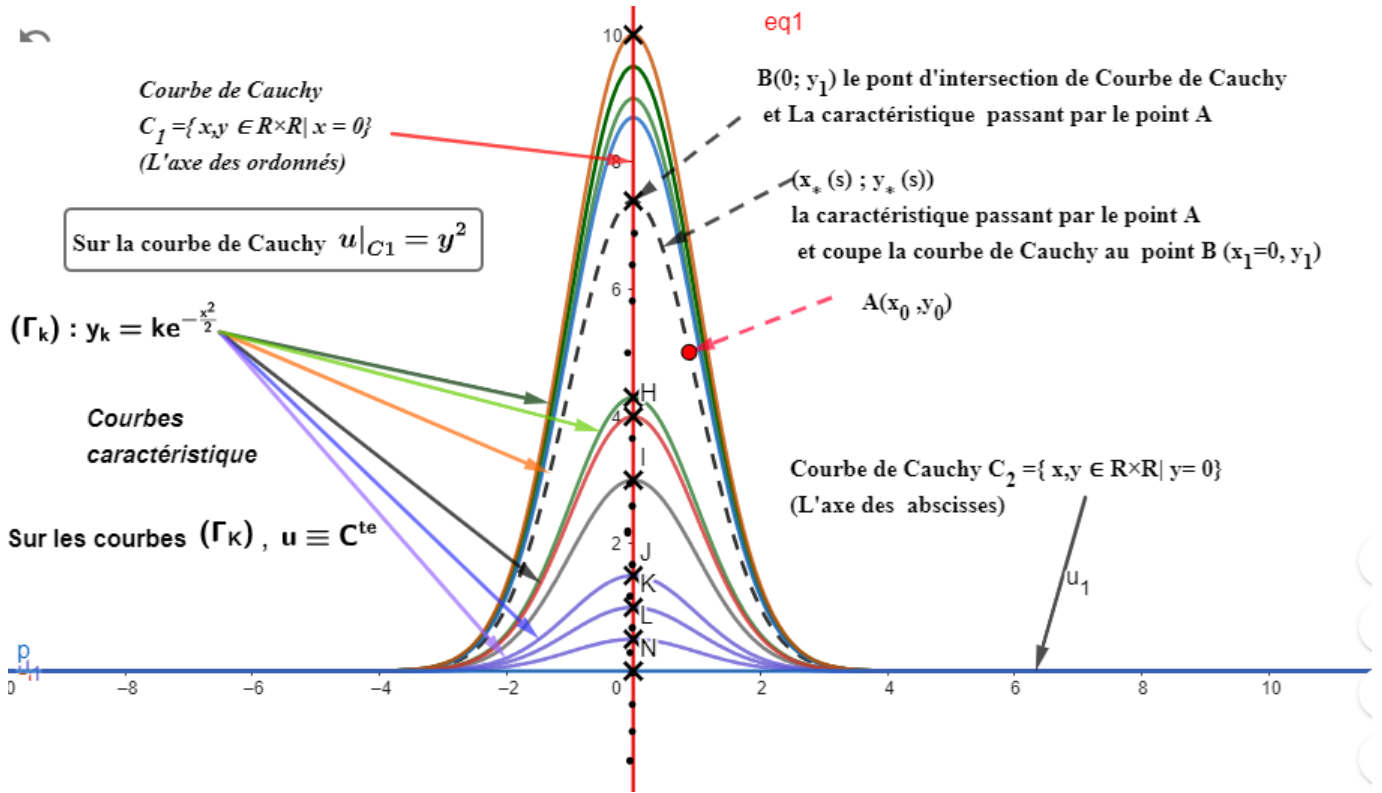


FIGURE 1 – les courbes caractéristiques

Pour tracer cette courbe, on trace la graphe des fonctions (0.5pts)

$$y_K = K e^{-\frac{x^2}{2}}, K \in \mathbb{R}$$

5) Démontrons que la solution de  $(E_1)$  est constante le long  $(x_c(s), y_c(s))$ . Le long des caractéristiques, la solution vérifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} u(x_c(s), y_c(s)) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s), y_c(s)) \frac{x_c(s)}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}(x_c(s), y_c(s)) \frac{y_c(s)}{ds} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_c(s), y_c(s)) - x_c(s) y_c(s) \frac{\partial u}{\partial y}(x_c(s), y_c(s)) = 0 \dots (1\text{pts}) \end{aligned}$$

ce qui implique que les solutions sont constantes le long des caractéristiques.

6) Résolvons  $(E_1)$  si c'est possible : Comme la courbe  $(C_1)$  n'est pas caractéristique et comme toutes les caractéristiques coupent la courbe  $(C_1)$ , le problème  $(E_1)$  admet une solution unique. Soit  $A(x_0, y_0)$  un point du plan correspondant à  $s = s_0$ . Soit  $(x_*(s); y_*(s))$  la caractéristique passant par ce point et coupe la courbe de Cauchy au  $B(x_1, y_1)$  avec  $x_1 = 0$ , alors on obtient

$$\begin{cases} y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}} = K_* \\ y_1 = K_* \end{cases}$$

ce qui implique que  $y_1 = y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}}$ . Comme la solution est constante le long de  $(x_*(s); y_*(s))$ , il en résulte qu

$$u((x_*(s), y_*(s))) = u(x_0, y_0) = u(0, y_1) = u\left(0, y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}}\right) = y_0^2 e^{0x_0^2}.$$

On obtient donc pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$u(x, y) = y^2 e^{\frac{x^2}{2}}$$

7) Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x, 0) = x^2 \end{cases} \quad (E_2)$$

n'admet pas de solution d'après le théorème d'existence et d'unicité car il est posé sur une caractéristique

### Exercice 3 :

On considère l'EDP d'ordre 2 suivante :

$$e^{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2ye^x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}$$

1. Type de cette EDP : Calculons son discriminant

$$\Delta = (ye^x)^2 - e^{2x}y^2 = 0. (1pt)$$

L'EDP est donc parabolique. (1 pt)

2. La forme standard des EDP paraboliques d'ordre 2 est :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = F\left(\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, u, X, Y\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = G\left(\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, u, X, Y\right). (1pt)$$

3. Déterminons ses courbes caractéristiques : Ses courbes caractéristiques sont solutions de l'EDO suivante,

$$e^{2x} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2ye^x \frac{dy}{dx} + y^2 = 0. (1pt)$$

Cette EDO s'écrit sous la forme

$$\left(e^x \frac{dy}{dx} + y\right)^2 = 0$$

Donc



$$e^x \frac{dy}{dx} + y = 0 (0, 5pt)$$
$$e^x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -e^{-x} dx \Rightarrow \ln |y| = e^{-x} + k (0, 5pt)$$

D'où

$$y = C \exp(e^{-x}) \cdot (0, 5pt)$$

Il y a une seule famille de courbes caractéristiques :

$$\psi(x, y) = y \exp(-e^{-x}) \cdot (0, 5pt)$$