Test d'auto-évaluation

Chapitre : Équation de Laplace

Exercice 1 : Reconnaissance de l'équation de Laplace (2 pts)

Parmi les équations suivantes, lesquelles sont des formes valides de l'équation de Laplace ?

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
3. $\Delta u = 0$
4. $\dfrac{d^2 u}{dx^2} = f(x)$

Exercice 2 : Fonction harmonique (2 pts)

Déterminer si les fonctions suivantes sont harmoniques (justifier en calculant le Laplacien) :

1. $u(x, y) = x^2 - y^2$
2. $u(x, y) = x^2 + y^2$

Exercice 3 : Principe du maximum (1 pts)

Vrai ou faux :

Une fonction u harmonique définie dans un domaine borné atteint son maximum sur le bord de ce domaine. [ ]

Exercice 4 :(1 pt)

Montrer qu'une fonction qui est une série de puissances dans la variable complexe $x + iy$ doit satisfaire les équations de Cauchy-Riemann et donc celle de Laplace.

Exercice 5 :(2 pt)

Trouver les solutions qui ne dépendent que de r de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 u$$

où k est une constante positive. (Indication : remplacer $u = v/r$).

Exercice 6 : Équation de Poisson (2 pts)

Résoudre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

dans la coque sphérique $0 < a < r < b$ avec les conditions aux limites $u = A$ sur $r = a$ et $u = B$ sur $r = b$, où A et B sont des constantes. (Astuce : cherchez une solution dépendant