

Test d'auto-évaluation – Chapitre 07 : Équation de la chaleur

Ce test d'auto-évaluation permet de consolider vos acquis sur l'équation de la chaleur, ses solutions fondamentales, les conditions initiales, et l'utilisation du noyau de la chaleur dans des contextes variés.

Exercice 1 : Solution fondamentale avec translation

On suppose que la donnée initiale g est continue et uniformément bornée sur \mathbb{R} . Vérifier que :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-t-y|^2}{4t}} g(y) dy$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$, est bien une solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Exercice 2 : Principe du maximum

(Cas où le domaine spatial est \mathbb{R}^n) Soit $g \in C(\mathbb{R}^n)$ et soit $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ telles que $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ existent et soient continues dans $\mathbb{R}^n \times]0, T[$. Si de plus :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[, \\ u(x, 0) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x, t) \leq M e^{a|x|^2} & \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times]0, T[. \end{cases}$$

Montrer que $u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$.

Exercice 3 : Solution fondamentale de l'équation de la chaleur

Vérifier que la fonction suivante est une solution de l'équation de la chaleur homogène :

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Quel est le comportement de cette solution quand $t \rightarrow 0^+$ et $t \rightarrow +\infty$?

Exercice 4 : Effet de la convolution

Soit $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ (continue et bornée), définir :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) g(y) dy, \quad \text{où} \quad \Gamma(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

- Montrer que u satisfait l'équation $\partial_t u - \Delta u = 0$.
- Vérifier que $u(x, 0) = g(x)$ au sens des distributions.

Remarque : Ces exercices peuvent faire l'objet d'un travail personnel ou de discussion dans l'*espace collaboratif du chapitre*.