République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque
Université Djilali Bounâama

Équations de la physique mathématique

Chapitre 03:Équations paraboliques - Équation de la Chaleur

Presented by: **Chabane Farid**

Faculté des sciences et de la technologie
Département de mathématiques et informatique.

22 avril 2025

Table de matières

1 **Introduction**

2 **Généralités**

- PRINCIPE DU MAXIMUM
- PROBLEME DE VALEUR INITIALE (A)
  - Equation de la chaleur sur $\mathbb{R}$
  - Équation de la chaleur avec second membre sur $\mathbb{R}$
  - Equation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+$

3 **Méthode de séparation des variables**

Section 1

Introduction

Introduction

L'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \Delta u$ décrit de nombreux phénomènes de diffusion, notamment la répartition de la température à l'intérieur d'un corps. Elle est connue sous le nom d'équation de la chaleur, ou équation de diffusion. Dans cette équation, la variable t représente le temps, tandis que les autres variables correspondent à l'espace.
En dimension 1, elle s'écrit : $\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, Même si $u(x,t)$ dépend de deux variables, on parle généralement de l'équation de la chaleur en dimension un.
Ce chapitre est essentiellement consacré à l'étude de cette équation dans le cas unidimensionnel. Nous verrons par la suite comment les résultats obtenus peuvent être généralisés aux dimensions 2 et 3.
Considérons maintenant l'équation : $\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t)$, la fonction $u(x,t) = w(kx,t)$ est solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: quitte a faire le changement de fonctions correspondant a un changement d'échelle sur l'axe $0x$ nous supposerons désormais $k^2 = 1$. Etant donné l' interprétation de la variable t comme un temps nous supposerons $t > 0$.

Section 2

Généralités

I. PRINCIPE DU MAXIMUM

Les solutions de 1'équation $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans le rectangle $0 \leq t \leq T, a \leq x \leq b$ ne peuvent atteindre leur extremum (maximum ou minimum) que pour $t = 0$ ou $x = a$ ou $x = b$. Ceci implique de nombreuses propriétés et permet d'établir l'unicité des solutions dans un grand nombre de situations.

Théorème 2.1 (Lemme de positivité)

Soit F le rectangle fermé $0 \leq t \leq T, a \leq x \leq b$. Soit Γ la réunion des trois segments : $\mathrm{t} = 0, \mathrm{a} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{b}; \mathrm{x} = \mathrm{a}, 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}$ *et* $x = b, 0 \leq t \leq T$. *Désignons par u une solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans $a < x < b$, $0 < t \leq T$(soit $F \backslash \Gamma$). On suppose que u est continue sur F. Si $u(x,t) \geq 0$ sur Γ alors $u(x,t) \geq 0$ sur F.*

Généralités II

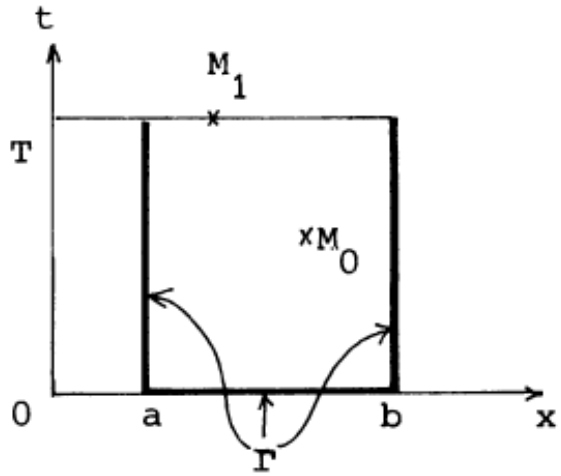

FIGURE 1 – Le rectangle F

Généralités III

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$ et $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon t$; v est continue sur : F, elle y admet donc un minimum m.

Supposons que le minimum soit atteint au point $M_0 = (x_0, t_0)$ du rectangle ouvert $0 < t < T, a < x < b$ alors $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,t_0) = 0 = \frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0)$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0,t_0) \geq 0$. Donc $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) + \varepsilon = 0$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0) \geq 0$ ce qui est impossible puisque $\frac{\partial u}{\partial t}(x_0,t_0) = -\varepsilon$ devrait être égal a $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,t_0)$.

Supposons que le minimum soit atteint au point $M_1 = (x_1, T)$ avec $a < x_1 < b$, puisque u est solution sur $a < x < b, 0 < t \leq T$, $\frac{\partial u}{\partial t}(M_1)$ et $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(M_1)$ existent. Nécessairement $\frac{\partial v}{\partial x}(x_1,t_1) = 0$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_1,t_1) \geq 0$ alors que $\frac{\partial v}{\partial t}(x_1,t_1) \leq 0$, donc $\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,t_1) \leq -\varepsilon < 0$ ce qui est impossible. Le minimum de v est donc atteint sur Γ; u etant ≥ 0 sur Γ, $v \geq 0$ sur Γ donc dans F. Or $u(x,t) \geq v(x,t) - \varepsilon T \geq -\varepsilon T$, ceci est vrai $\forall \varepsilon$ alors $u(x,t) \geq 0$. □

I. PRINCIPE DU MAXIMUM

En appliquant le lemme précédent à -u on démontre que si $u(x,t) \leq 0$ sur Γ alors $u(x,t) \leq 0$ dans F.

Soient u_1 et u_2 deux solutions, $u_1 - u_2$ est aussi une solution donc si $u_1 \leq u_2$ sur Γ alors $u_1 \leq u_2$ sur F ; en choisissant pour u_2 le maximum M de u_1 sur Γ on obtient aussi que $u_1 \leq M$ dans F ; on peut même démontrer un résultat plus précis.

Théorème 2.2

Principe du maximum

1. *Soient u_1 et u_2 deux solutions de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dans $F \backslash \Gamma$, si $u_1 \leq u_2$ sur Γ alors $u_1 \leq u_2$ sur F.*
2. *Les extrémas d'une solution u sont atteints sur Γ : si $m \leq u(x,t) \leq M$ sur Γ alors $m \leq u(x,t) \leq M$ sur F ; en particulier si $u(x,t) = 0$ sur Γ alors $u(x,t) = 0$ sur F.*
3. *Si un'est pas constante sur Γ alors $m < u(x,t) < M$ sur F : les extrémas sont atteints sur Γ et seulement sur Γ.*

Application à l'étude de l'unicité

Généralités II

Le principe du maximum permet souvent d'établir l'unicité de certains problèmes. Nous allons le montrer sur un exemple.
On cherche une solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour $a < x < b$ et $0 < t \leq T$ et u continue sur F :
On veut que $u(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} u(a, t) &= f(t) \\ u(b, t) &= g(t) \end{aligned} \qquad \forall t \in [0, T]$$

Si u_1 et u_2 sont deux solutions de ce problème, leur différence est nulle sur Γ, elle est donc nulle sur F et $u_1 \equiv u_2$. Le principe du maximum se généralise d'une part à $\mathbb{R}^n$ et d'autre part aux équations paraboliques autres que celle de la chaleur.

II. PROBLEME DE VALEUR INITIALE (A)

II.1. Equation de la chaleur sur $\mathbb{R}$

Pour l'équation des ondes la donnée $u(x,0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ est une donnée initiale qui détermine la solution $u(x,t)$. Dans le cas de l'équation de la chaleur il s'agit d'une donnée sur une caractéristique puisque $t = 0$ est une caractéristique, de plus on cherche seulement une solution pour $t > 0$. Il est en fait inutile de se donner à la fois $u(x,0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$: en effet si $u(x,0) = g(x)$ alors $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,0) = g''(x)$ et donc $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g''(0)$; ou bien le problême est impossible si g''(x) est différente de la donnée de $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$, ou bien il est inutile de se donner $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$.

Nous allons constater qu'il suffit de $g(x)$ et plus précisément nous allons trouver une solution telle que :

$$\lim_{t \to 0^+} u(x,t) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dans ce paragraphe nous allons chercher des solutions en utides transformations intégrales, nous supposerons donc les données suffisamment régulières et nous chercherons des solutions elles-mémes très régulières ; nous obtiendrons ainsi certaines formules

Généralités II

dont nous démontrerons dans la seconde partie qu'elles s'appliquent beaucoup plus largement que dans le cadre étroit que nous nous sommes fixés au départ.
Nous chercherons une solution $u(x,t)$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x,t)|dx < \infty$ $\int_{-\infty}^{+\infty} 1\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| dx < \infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| dx < \infty$ de sorte que les fonctions $x \longmapsto u(x,t), x \longmapsto \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ et $x \longmapsto \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$ ont pour chaque valeur de t une transformée de Fourier. Nous désignerons la transformée de Fourier de $x \longmapsto u(x,t)$ par $F(v,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2i\pi vx)u(x,t)dx$; nous supposerons enfin qu'il existe $n \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| \leq n(x)\ \forall t$; nous supposerons enfin que $g \in L^1(\mathbb{R})$. L'égalité $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ entraine donc que $\frac{\partial F}{\partial t}(v,t) + 4\pi^2 v^2 F(v,t) = 0$; soit $G(v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2i\pi vx)g(x)dx$ alors $F(v,0) = G(v)$ et $F(v,t) = G(v)\exp\left(-4\pi^2 v^2 t\right)$. or $\exp\left(-4\pi^2 v^2 t\right) = F\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\right]$: $u(x,t) = g * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$ pour tout $t > 0$ fixé.

Généralités III

Théorème 2.3

Une solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *telle que* $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = g(x)$ *est :*

$$u(x,t) = g * \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2 - y^2}{4t}\right) g(y)\mathrm{d}y \qquad (2.1)$$

II.2 Équation de la chaleur avec second membre sur $\mathbb{R}$

Théorème 2.4

Une solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x,t)$ *telle que* $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = g(x)$ *est :*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] g(y)dy + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4s}\right] h(y, t-s)dy \quad (2.2)$$

Généralités II

Démonstration.

Soit $H(v,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi vx)h(x,t)dx$ alors

$$H(v,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi vx)\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right]dx = \frac{\partial F}{\partial t}(v,t) + 4\pi^2 v^2 F(v,t)$$

donc $F(v,t) = G(v)\exp\left(-4\pi^2 v^2 t\right) + \int_0^t \exp\left[-4\pi^2 v^2 (t-s)\right]H(v,s)ds$. Pour tout t et tout $v, H(v,t-v)$ est la transformée de Fourier de $x \to h(x,t-v)$ et $\exp\left(-4\pi^2 v^2 t\right)$ celle de $x \to \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4v}\right)$, en notant F_x le fait qu'il s'agit d'une transformée de Fourier relative a la variable x, on obtient :

$$\int_0^t H(v,t-v)\exp\left(-4\pi^2 v^2 v\right)dv = \int_0^t F_x\left[h(x,t-v) * \frac{1}{2\sqrt{\pi v}}\exp\left(-\frac{x^2}{4v}\right)\right]dv, 1a$$

□

Généralités III

Démonstration Cont.

convolution portant naturellement sur la variable x ; en intervertissant l'intégration par rapport à t et celle indiquée par la transformée de Fourier on voit que cette dernière expression est égale a :

$$F_x\left[\int_0^t h(x,t-v) * \frac{1}{2\sqrt{\pi v}} \exp\left(-\frac{x^2}{4v}\right) dv\right]$$

comme $G(v)\exp\left(-4\pi^2 v^2 t\right)$ est la transformée de : Fourier $\hat{i}$ + g(x) $g * exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$ on obtient la formule indiquée. □

II.3. Equation de la chaleur sur $\mathbb{R}^+$

Le problème de valeur initiale sur IR^+est un problème ou on se fixe $u(x,0)$ pour $x \geq 0$ mais aussi $u(0,t)$ pour $t > 0$.
Nous allons indiquer trois rêsultats très simples dont la combinaison permet de rêsoudre d'autres problèmes.

Théorème 2.5

Une solution de $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *pour* $x > 0$ *et* $t > 0$ *telle que*

$\lim_{t+0^+} u(x,t) = f(x)$ *et* $u(0,t) = 0$ *est t*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(y) \left[\exp -\frac{(x-y)^2}{4t} - \exp -\frac{(x+y)^2}{4t} \right] dy$$

Généralités II

Démonstration.

Soit $\tilde{f}$ la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x > 0$ et $\tilde{f}(x) = -f(-x)$ si $x < 0$. La fonction $v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] dy$ est une solution de $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ telle que $\lim_{t+0^+} v(x,t) = \widetilde{f}(x)$. Pour x > 0, u et v coincident. Or si x > 0

$$v(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} -f(-y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] dy + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} f(y) \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4}\right] dy$$

on vérifie de plus que $u(0,t) = 0$. Nous reviendrons sur la validité de cette formule. On utilise souvent pour exprimer $u(x,t)$ les fonctions suivantes. □

Section 3

Méthode de séparation des variables

Méthode de séparation des variables pour certains problèmes

Comme pour l' equations des ondes. Nous allons étudier quelque problèmes par méthode de séparation des variables. voir le liver donné (la page 205).

References I

- Baddari K, Abbassov A. *"Equations de la physique mathématique appliquées"*. **OPU** ; 2009
- Courant R, Hilbert D., *"Methods of mathematical physics"*, ; **Wiley -V C H** ,édition de 1989. .
- Eriksson K, Estep D, Hansbo P, Johnson C. Computational Differential Equations. Cambridge University Press, New York, 1990
- Reinhard H. Équations aux dérivées partielles. Dunod, paris, 2001.
- Schwartz L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, Paris, 1983.
- Walter A. Strauss. Partial Difierential Equations : An Introduction. Wiley, 1992

Many thanks for your attention.