Test d'auto-évaluation – Chapitre : Équation des ondes

Exercice 1 : Formule de Kirchhoff en dimension 3

Considérons l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0,$$

avec conditions initiales :

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x).$$

1. Rappeler la formule de Kirchhoff en dimension 3.
2. Soit $\phi(x) = e^{-|x|^2}$ et $\psi(x) = 0$, avec $c = 1$. Exprimer $u(x,t)$.
3. Soit $\phi(x) = 0$ et $\psi(x) = \chi_{B(0,1)}(x)$ (fonction indicatrice de la boule unité). Discuter le support de $u(x,t)$ pour $t > 0$.

Exercice 2 : Formule de d'Alembert

On considère le problème de Cauchy suivant sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x,0) = \phi(x) = \sin x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x) = \cos x. \end{cases}$$

1. Énoncer la formule de d'Alembert.
2. En utilisant cette formule, déterminer explicitement $u(x,t)$.
3. Discuter le comportement de $u(x,t)$ pour $t \to \infty$.

Exercice 3 : Principe de Duhamel

On considère le problème non homogène :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \\ u(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

1. Énoncer le principe de Duhamel.
2. Soit $f(x,t) = e^{-t}\sin x$. Écrire la solution $u(x,t)$ selon ce principe.
3. Calculer $u(x,t)$ sous forme intégrale simplifiée.

Exercice 04 : (Formule de Kirchhoff)

Considérons le problème de Cauchy en trois dimensions (avec $c = 1$) où les données de Cauchy sont données par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \|x\| \leq 1, \\ 0 \text{ si } \|x\| > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = 0$$

Exercice 05 : (Formule de Kirchhoff)

Une onde de pression générée à la suite d'une explosion satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - 16\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

où $P(x,t)$ est la pression au point x et au temps t. Les conditions initiales au temps d'explosion $t = 0$ sont

$$P(x,0) = \begin{cases} 10, |x| \leq 1 \\ 0, |x| > 1, \end{cases}, \frac{\partial P}{\partial t}(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Un bâtiment est situé au point $x_0 = 10$. L'ingénieur qui a conçu le bâtiment a déterminé qu'il maintiendrait une pression jusqu'à $P = 6$. Trouvez l'instant t_0 où la pression au bâtiment est maximale. Le bâtiment s'effondrera-t-il ?