République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque
Université Djilali Bounâama

Équations de la physique mathématique

Chapitre 06: Equation des Ondes

Presented by: **Chabane Farid**

Faculté des sciences et de la technologie
Département de mathématiques et informatique.

6 août 2025

Table de matières

Section 1

Résumé

Résumé

Ce chapitre est organisé en quatre sections principales. Dans la première section, nous rappelons les notions de base et présentons des définitions fondamentales relatives à ce type d'équations. La deuxième section est consacrée à la résolution des certains problem pour $n = 1$ des équations(on donne la formule de D'Alembert). Dans la troisième section, nous abordons la résolution de l'équation des ondes pour n=3 et n=2 par la méthode de séparation de variables sur le et le disque respectivement. Dans le quatrième section nous donnerons une expression explicite et appropriée pour une solution forte pour certains problèmes sur la demi-droite positive (Extrémité fixe : onde réfléchie) également si nous disposons ou non d'une formule explicite pour la solution en utilisant D'Alembert formule sur un intervalle bornée. Ensuite nous donnerons également une expression explicite pour la solution de l'équation d'onde non-homogène sur une droite numérique couplée à des conditions initiales et aux limites non-homogènes en utilisant le principe de Duhamile.

Résumé

Au chapitre 6, nous donnerons une solution explicite à l'équation des ondes homogènes de dimension n supérieure ou égale à 2 couplées à des conditions initiales non homogènes, en utilisant les propriétés de la moyenne sphérique d la fonction inconnue (formule de Darboux, formule de Kirchhoff et de Poisson pour n=3 et n=2). Enfin, la dernière section traite de l'étude qualitatives du problème de Cauchy(nature de solution fort ou faibles, propagations des ondes, formule de parallélogramme et notre équivalence a nature de solution fort, domaines de dépendance et d'influence et de détermination, la dépendance de solution a les donnés de Cauchy .
Mots clés :Classification des équations ; La méthode des caractéristique ; Réduction à la forme standard ; Changement de variables ; Probléme de Cauchy...

Section 2

Introduction

L'équation des ondes est l'équation type des **équations hyperboliques**.
Elle se présente sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$$

Cette équation décrit les **phénomènes de propagation** et les **phénomènes vibratoires**.

Une solution de cette équation est une fonction u qui dépend :

- des variables spatiales $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- de la variable temps t.

Si l'on pose $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors u est définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Selon la dimension n de l'espace, les solutions prennent différents noms :

- Si $n = 1$: les solutions sont appelées **ondes planes**.
- Si $n = 2$: les solutions sont appelées **ondes cylindriques**.
- Si $n = 3$: les solutions sont appelées **ondes sphériques**.

La constante c représente une **vitesse de propagation** (ou *célérité*) caractéristique du milieu.

Section 3

Forme canonique de l'équation des ondes et solution générale pour$n = 1$

Forme canonique de l'équation des ondes

L'équation des ondes à une dimension s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

En posant un changement de variables :

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct,$$

on transforme l'équation en :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Il s'agit de la **forme canonique** de l'équation des ondes à une dimension.

Solution générale

La solution générale de cette équation est :

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

où f et g sont des fonctions déterminées par les conditions initiales.

Solution générale

Exemple 3.1

Résolvons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, & \text{(condition initiale 1)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{(condition initiale 2)} \end{cases}$$

Étapes de résolution :

- On reconnaît que $c = 2$.
- La solution générale est : $u(x,t) = f(x-2t) + g(x+2t)$.
- À $t = 0$, on a $u(x,0) = f(x) + g(x) = \sin x$.
- Aussi, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = -2f'(x) + 2g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = g'(x)$, donc $f = g$.
- Donc $f(x) = g(x) = \frac{1}{2}\sin x$.

Solution finale :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sin(x-2t) + \frac{1}{2}\sin(x+2t)$$

Section 4

Problème de Cauchy et formule de d'Alembert

Problème de Cauchy et formule de d'Alembert

Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), & \text{(valeur initiale)} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x), & \text{(dérivée initiale)} \end{cases}$$

Problème de Cauchy et formule de d'Alembert

La solution du problème de Cauchy est donnée par la **formule de d'Alembert** :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-ct) + \phi(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds$$

Remark

Cette formule n'est valable que si x parcourt $\mathbb{R}$ tout entier.

Problème de Cauchy et formule de d'Alembert

Exemple 4.1

Résolvons :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(x,0) = \sin x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Ici, $c = 2$, $\phi(x) = \sin x$, $\psi(x) = 0$.
On applique la formule de d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\sin(x-2t) + \sin(x+2t)] = \sin x \cos(2t)$$

Section 5

Équation des ondes non homogène et principe de Duhamel

Équation des ondes non homogène et principe de Duhamel

Équation des ondes non homogène

On considère l'équation des ondes avec second membre (source extérieure) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)$$

accompagnée des conditions initiales :

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

Équation des ondes non homogène et principe de Duhamel

Décomposition de la solution
La solution $u(x,t)$ est la somme de deux termes :

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t)$$

où :

- $u_h(x,t)$ est la solution de l'équation homogène ($f = 0$) avec données initiales $\phi(x), \psi(x)$.
- $u_p(x,t)$ est la solution particulière liée au second membre $f(x,t)$.

Si $f = 0$, alors :

$$u_h(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x-ct) + \phi(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds$$

Équation des ondes non homogène et principe de Duhamel I

Exemple numérique

Considérons :

$$f(x,t) = e^{-t}\sin x, \quad \phi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0, \quad c = 1$$

Alors :

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} e^{-s}\sin(\xi)\,d\xi\,ds$$

On peut intervertir les intégrales et écrire :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}\left[\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \sin(\xi)\,d\xi\right] ds$$

L'intégrale intérieure donne :

$$\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \sin(\xi)\,d\xi = -\cos(x+t-s) + \cos(x-t+s)$$

Équation des ondes non homogène et principe de Duhamel II

Donc la solution devient :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-s}\left[\cos(x-t+s) - \cos(x+t-s)\right] ds$$

Équation des ondes non homogène et principe de Duhamel

Principe de Duhamel – Détail de calcul

Le principe de Duhamel consiste à représenter $u_p(x,t)$ par :

$$u_p(x,t) = \int_0^t \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi,s)\, d\xi\, ds$$

Justification

À chaque instant s, on considère la solution d'un problème homogène avec conditions initiales nulles et une impulsion $f(x,s)$ appliquée à $t = s$. La solution due à cette impulsion à $t > s$ est :

$$w(x,t;s) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(\xi,s)\, d\xi$$

Puis on intègre cet effet pour tous les instants $s \in [0,t]$.

Section 6

Équation des ondes en dimensions supérieures

Équation des ondes en dimensions supérieures

Considérons dans cette partie l'équation des ondes en dimension $n \geq 2$,

$$\partial_{tt}u = c^2 \Delta u, \; x \in \mathbb{R}^n \tag{6.1}$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \; u_t(x, 0) = g(x) \tag{6.2}$$

L'idée principal pour résoudre cette pb est de transformer, en utilisant les moyennes sphériques, l'équation précédente donnée en dimension $n \geq 2$ en une équation en dimension 1. Commençons par la définition suivante.

Équation des ondes en dimensions supérieures

Outil : Méthode de la moyenne sphérique

- Lorsque $n = 3$ le nouveau pb peut être transforme en l'équation des ondes en dimension 1 après la changement de la variable indépendante .
- La formule de D'Alemebert donnée la solution de cette pb.
- La solution de notre pb originale est récupéré par la formule de D'Alembert.

Équation des ondes en dimensions supérieures
Les moyennes sphériques

Notaions :

- Nous traitons des fonctions à n variables ($n \geq 2$).
- La norme Euclidian de vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est notée par $| x |= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.
- $\mathcal{B}(x, \rho)$ notée la boule ouvert de rayon $\rho > 0$ et de centre $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{B}(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n, \mid x - y \mid < \rho\}$$

- $\mathcal{S}(x, \rho)$ désigne la sphère (par abus de langage) de rayon $\rho > 0$ et de centre $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{S}(x, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n, \mid x - y \mid = \rho\}$$

, $\partial\mathcal{B}(x, \rho) = \mathcal{S}(x, \rho)$ et $\partial\mathcal{B}(x, \rho) \bigcup \mathcal{S}(x, \rho)$ = **Solid sphère**

Notaions :

- ω_n désigne la mesure de l'aire de la sphère unité $\mathcal{S}(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$,
  $\mid \mathcal{S}(x,\rho) \mid = \rho^{n-1}\omega_n$ dans $\mathbb{R}^n$.
- $\mathrm{d}S(z)$ signifié la mesure de surface sur $\mathcal{S}(0,1)$ et $\mathrm{d}\sigma$ est utilisée pour la mesure de surface sur un sphère qlq.

Équation des ondes en dimensions supérieures
Les moyennes sphériques

Intégrales multiples ; changement de variables , Intégrations par partie(formule de Green) :

On considérer le changement de variables suivantes :

$$z : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(x,\rho) & \longrightarrow & \mathcal{B}(0,1) \\ y & \longmapsto & \frac{y-x}{\rho} \end{array} \right. .$$

Soit g une fonction donnée $\begin{array}{ccccc} g & : & \mathcal{B}(x,\rho) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & y & \mapsto & g(y) \end{array}$, on défini une fonction $w := w(z)$ par :

$$\begin{array}{ccccc} w & : & \mathcal{B}(0,1) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & z & \mapsto & h(x+\rho z) \end{array} ,$$

la fonction h peut être exprimée en w par $h(y) = w\left(\frac{y-x}{\rho}\right)$

Intégrales multiples ; changement de variables , Intégrations par partie(formule de Green) :

- Si on suppose que $h \in C^2(\mathcal{B}(x,\rho))$ alors on obtient par le règle de Chain : $\nabla_y h(y) = \frac{1}{\rho}\nabla_z w\left(\frac{y-x}{\rho}\right)$ et $\Delta_y h(y) = \rho^{-2}\Delta_z h\left(\frac{y-x}{\rho}\right)$; $\mathrm{d}y = \rho^n \mathrm{d}z$;
- Par le formule de Green nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}(x,\rho)} \Delta_y h(y)\mathrm{d}y &= \int_{\mathcal{B}(0,1)} \rho^{-2}\Delta_z w(z)\,\rho^n \mathrm{d}z = \int_{\mathcal{B}(0,1)} \rho^{n-2}\Delta_z w(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \rho^{n-2}\int_{\mathcal{S}(0,1)} < \nabla_z w(z)\,, z > \mathrm{d}z \\
&= \rho^{n-2}\int_{\mathcal{S}(0,1)} < \rho\nabla_y h(x+\rho z)\,, z > \mathrm{d}S(z) \\
&= \rho^{n-1}\int_{\mathcal{S}(0,1)} \frac{\partial}{\partial\rho} h(x+\rho z)\,\mathrm{d}S(z) \\
&= \rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{\mathcal{S}(0,1)} h(x+\rho z)\,\mathrm{d}S(z)
\end{aligned}$$

Intégrales multiples ; changement de variables , Intégrations par partie(formule de Green) :
d'ou :

$$\int_{\mathcal{B}(x,\rho)} \Delta_y h(y) \mathrm{d}y = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\mathcal{S}(0,1)} h\,(x+\rho z)\,\mathrm{d}S(z) \tag{6.3}$$

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

Définition 6.1

Pour une fonction h continue sur $\mathbb{R}^n$, sa moyenne sphérique sur la sphère de rayon r et de centre x est donnée par la fonction $M_h(x,r)$

$$\begin{array}{cccc} M_h & : & \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,r) & \mapsto & M_h(x,r) \end{array},$$

défini par

$$M_h(x,r) = \frac{1}{\mid \mathcal{S}(x,r) \mid} \int_{\mathcal{S}(x,r)} h(y) \mathrm{d}\sigma \tag{6.4}$$

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

Proposition 1

Pour une fonction h continue sur $\mathbb{R}^n$, sa moyenne sphérique sur la sphère de rayon r et de centre x est donnée par la fonction $M_h(x, r)$

$$\begin{array}{rccc} M_h & : & \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, r) & \mapsto & M_h(x, r) \end{array},$$

défini par

$$M_h(x, r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} h(x + rz) \mathrm{d}S(z) \tag{6.5}$$

Équation des ondes en dimensions supérieures
Les moyennes sphériques

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

Démonstration.

$$\int_{\mathcal{S}(x,r)} h(y)\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}(x,r)} h(y)\frac{\mid y-x\mid^2}{r^2}\mathrm{d}\sigma = \int_{\mathcal{S}(x,r)} < h(y)\frac{y-x}{r}, \frac{y-x}{r} > \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_{\mathcal{B}(x,r)} div\left(h(y)\frac{y-x}{r}\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{B}(x,r)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} h(y)\frac{y_i - x_i}{r}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\mathcal{B}(0,1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{r^{-1}\partial}{\partial z_i} h(x+rz)z_i r^n \mathrm{d}z = r^{n-1}\int_{\mathcal{B}(0,1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} h(x+rz)z_i \mathrm{d}z$$

$$= r^{n-1}\int_{\mathcal{B}(0,1)} div(h(x+rz)z)\mathrm{d}z = r^{n-1}\int_{\mathcal{S}(0,1)} < (h(x+rz)z), z > \mathrm{d}S(z)$$

$$= r^{n-1}\int_{\mathcal{S}(0,1)} (h(x+rz) \mid z\mid^2 \mathrm{d}S(z) (comme\ z \in \mathcal{S}(0,1)\ on\ a \mid z\mid^2 = 1$$

□

Équation des ondes en dimensions supérieures
Les moyennes sphériques

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

donc si on divisé par l'aire de la sphère de centre x et rayon r et le fait que il y a un relation entre l'aire de la sphère unité et le sphère qlq on termine la proof de cette proposition.

Question 01 : pourquoi considérons nous les moyennes sphériques ?

Question 02 : Quel est l'avantage de la proposition 01 ?

Lemme sur la Moyenne sphérique d'une fonction continueLSMS

Hypothèses :

- Soit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
- Soit $M_h(x, r)$ sa moyenne sphérique donnée par (6.5).

Conclusions :

1. Pour une fonction donnée $h = h(x) \in C^k(\mathbb{R}^n), k \geqslant 2$, la fonction $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $v(x, r) = M_h(x, r)$ est de classe C^k sur : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.
2. $v(x, r)$ peut être étendu au domaine tel que $v(x, r)$ soit une fonction paire pour chaque x fixé dans $\mathbb{R}^n$.
3. la fonction $h(x)$ peut être récupérée à partir de $v(x, r)$ dans le sens suivant $\lim_{r\to 0} v(x, 0) = h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.
4. $\frac{\partial}{\partial r} v(x, 0) = 0$
5. $\frac{\partial^2}{\partial r^2} v(x, r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(x, r) = \Delta_x v(x, r)$, dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$(la formule de Darboux).

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

La prouve de conclusion 01.

Comme $h \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ alors on peut dériver successivement sous le signe intégrale et conclure que $v \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. $\square$

La prouve de conclusion 02.

On a par (6.5)

$$v(x,r) = M_h(x,r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} h(x+rz)\mathrm{d}S(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|v|=1} h(x-rv)\mathrm{d}S(v)$$

par ce que le sphère unité est invariante sous l'application $v \mapsto -v$. d'où le seconde terme de l'équation permettre de généralisé la définition de la moyenne sphérique aux valeurs négatives de r, ainsi pour $r \in \mathbb{R} \setminus 0$ nous dirons que $M_h(x,r)$ est la moyenne sphérique de la fonction h sur la sphère de centre x et de rayon $\mid r \mid$ tel que $r \mapsto v(x,r)$ est une fonction paire. Posons $v(x,0) = h(x)$, donc$r \mapsto v(x,r)$ est désormais significatif dans $\mathbb{R}$.

$\square$

La prouve de conclusion 03.

Conclusion du 3 reformulée On a par (6.5)

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} h(x+rz)\mathrm{d}S(z) = h(x)$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Nous estimons :

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} h(x+rz)\mathrm{d}S(z) - h(x)\right| &= \left|\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} h(x+rz) - h(x)\mathrm{d}S(z)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} |h(x+rz) - h(x)|\mathrm{d}S(z)\end{aligned}$$

comme la fonction $h(x)$ est continue pour tout x, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout y avec $| y - x |< \delta$ on a :

$$|h(y) - h(x)| < \varepsilon$$

□

Moyennes sphériques d'une fonction continue :

La preuve de conclusion 3(Cont).

Donc, nous avons pour $r < \delta$

$$|h(x+rz) - h(x)| < \varepsilon$$

La conclusion 3 découle de l'estimation

$$\left|\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} h(x+rz)\mathrm{d}S(z) - h(x)\right| \leqslant \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} |h(x+rz) - h(x)|\mathrm{d}S(z)$$

□

La preuve de conclusion 4.

Rappelons que nous avons prouvé

$$\int_{\mathcal{B}(x,\rho)} \Delta_y h(y) \mathrm{d}y = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\mathcal{S}(0,1)} h\left(x + \rho z\right) \mathrm{d}S(z)$$

Ainsi

$$r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} v(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathcal{B}(x,r)} \Delta_y h(y) \mathrm{d}y = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r r^{n-1} \Delta_x \int_{\mathcal{S}(0,1)} h(x+rz) dS(z) \mathrm{d}r$$

□

La preuve de conclusion 4(Cont).

Nous dérivons les deux côtés par rapport à r, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}v(x,r)\right) = \Delta_x v(x,r)$$

Nous calculons la dérivée partielle de l'un des membres droits de l'équation ci-dessus et nous obtenons :

$$(n-1)r^{n-2}\frac{\partial}{\partial r}v(x,r) + r^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(x,r) = \Delta_x v(x,r)$$

l'annulation du facteur r^{n-1} donne la formule de Darboux. $\square$

Diminution de la dimension :

Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ est une solution de pb de Cauchy (6.1) + (6.2) pour l'equation des ondes de dimension n. Regardons t comme paramètre et considérons la moyenne sphérique de $u(x,t)$,

$$v(x,r,t) = M_u(x,r,t) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} u(x+rz,t)\mathrm{d}S(z) \tag{6.6}$$

Dérivons (6.6) deux fois par rapport à t

$$v(x,r,t)_{tt} = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} u_{tt}(x+rz,t)\mathrm{d}S(z)$$

et d'après (6.1)

$$v(x,r,t)_{tt} = \frac{c^2}{\omega_n}\int_{|z|=1} \Delta_x u(x+rz,t)\mathrm{d}S(z) = c^2\Delta_x\left(\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} u(x+rz,t)\mathrm{d}S(z)\right),$$

Équation des ondes en dimensions supérieures
Diminution de la dimension II

d'ou

$$v(x,r,t)_{tt} = c^2\Delta_x v(x,r,t).$$

En utilisant la formule de Darboux, nous obtenons

$$v(x,r,t)_{tt} = c^2\left(\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}v(x,r,t) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}v(x,r,t)\right)$$

c.-à-d.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(x,r,t) = c^2\left(\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}M_u(x,r,t) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}M_u(x,r,t)\right) \tag{6.7}$$

C'est l'équation d'Euler-Poisson-Darboux Concernant les conditions initiales :

$$M_u(x,r,0) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} u(x+rz,0)\mathrm{d}S(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} f(x+rz)\mathrm{d}S(z)$$

donc $M_u(x,r,0) = M_f(x,r)$ et de même $\frac{\partial}{\partial t}M_u(x,r,0) = M_g(x,r)$.

Lemme 6.2

Avec les notations suivantes : $M_u(x, r, t) = U(x, r, t)$, $M_f(x, r) = F(x, r)$ *et* $M_g(x, r) = G(x, r)$. *les énoncés suivants concernant une fonction* $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ *sont équivalents*

1. *u est une solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes de dimension* n .
2. *La fonction* $U(x, r, t)$ *résout les problèmes de Cauchy suivants :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, r, t) = c^2 \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} U(x, r, t) + \dfrac{n-1}{r} \dfrac{\partial}{\partial r} U(x, r, t) \right); r \in \mathbb{R}, t > 0 \\ U(x, r, 0) = F(x, r), \quad \dfrac{\partial}{\partial t} U(x, r, 0) = G(x, r); \quad r \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad (\mathcal{ER})$$

Diminution de la dimension :

Remark

1. Puisque les dérivées portent sur les variables .r et t alors le problème $(\mathcal{ER})$ est donné dans l'ensemble $\mathcal{A} = \{(r,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ et x représente un paramètre. C'est un problème en dimension 1, puisque . r est un réel !
2. Nous disons que l'équation dans le problème $(\mathcal{ER})$ est l'équation des ondes avec terme d'ordre inférieur $\frac{\partial}{\partial r} U(x,r,t)$.

La preuve de Lemme 2.2.

- l'énoncé 2 découle de l'énoncé 1 par calcul direct en utilisant la définition de $M_u(x, r, t)$, compte tenu du calcul précédant immédiatement l'énoncé de cette formule de Lemme 2.2 et le formule Darboux.
- l'énoncé 1 découle de l'énoncé 2 au vu de la formule de Darboux et de la **Conclusion 4** du lemme sur les moyennes sphériques (**LSMS**).

□

Équation des ondes en dimensions supérieures
Formules de Kirchhoff et de Poisson I

Idées clés pour résoudre le problème de Cauchy pour l'équation des ondes dans l'espace 3D :

1. Dans la sous-section précédente, nous avons trouvé un problème de Cauchy équivalent pour deux variables indépendantes r et t pour une équation des ondes dans un nombre quelconque de variables spatiales.
2. Le problème de Cauchy équivalent a été obtenu en suivant la méthode des moyennes sphériques.
3. Lorsque $n = 3$, des choses intéressantes se produisent :
   - Après un changement de variable dans le problème de Cauchy 3D, nous obtenons un problème de Cauchy pour l'équation des ondes dans l'espace 1D.
   - La formule de D'Alembert est disponible ici.
4. Une solution au problème de Cauchy pour l'équation des ondes en 3D est ensuite obtenue grâce au LSMS de la sous-section précédente.

En utilisant les moyennes sphériques, on démontre le théorème suivant.

Théorème 6.3 (Formule de Kirchhoff)

Soient $f \in C^3\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $g \in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$. Alors le problème (6.1) *admet une unique solution $u(x,t)$ définie par la formule de Kirchhoff,*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= tG(x,ct) + \frac{\partial}{\partial t}(tF(x,ct)) && (F_1) \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} [\mathrm{tg}(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x)] dS(y) && (F_2) \end{aligned}$$

où $F(x,r)$ et $G(x,r)$ sont les moyennes sphériques defet g respectivement.

Équation des ondes en dimensions supérieures Formules de Kirchhoff et de Poisson III

Démonstration.

D'après la formule de Darboux et Lemme (6.2), le problem de Cauchy équivalent est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x,r,t) = c^2 \left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} M_u(x,r,t) + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} M_u(x,r,t) \right); r \in \mathbb{R}, t > 0 \\ M_u(x,r,0) = F(x,r), \quad \dfrac{\partial}{\partial t} M_u(x,r,0) = G(x,r),\ r \in \mathbb{R}; \quad r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

désigne $L(r,t) = rM_u(x,r,t)$. Calculons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} L(r,t) = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rM_u(x,r,t)\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(M_u(x,r,t) + \frac{\partial}{\partial r} M_u(x,r,t) \times r \right) \\ &= r\frac{\partial^2}{\partial r^2} M_u(x,r,t) + 2\frac{\partial}{\partial r} M_u(x,r,t) \\ &= r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) M_u(x,r,t) \end{aligned}$$

□

Démonstration Cont.

E utilisant l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(x,r,t) = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_u(x,r,t) + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}M_u(x,r,t)\right)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}L(r,t) &= r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_u(x,r,t) + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}M_u(x,r,t)\right)\\ &= \frac{r}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(x,r,t)\\ &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}L(r,t).\end{aligned}$$

Donc $L(r,t)$ satisfait le problème de Cauchy suivant pour l'équation d'onde 1-D :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}L(r,t) = c^2\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}L(r,t); r \in \mathbb{R}, t > 0\\ L(r,0) = rM_f(x,r), \quad \dfrac{\partial}{\partial t}L(r,0) = r\dfrac{\partial}{\partial t}M_u(x,r)\, r \in \mathbb{R}; \quad r \in \mathbb{R}.\end{cases}$$

Démonstration Cont.

Disposons-nous d'une solution classique au problème réduit ?

- $L(r,0)$ doit être $C^2(\mathbb{R})$
- $\frac{\partial}{\partial t}L(r,0)$ doit être $C^1(\mathbb{R})$

Question : Les conditions ci-dessus sont-elles remplies ?

Réponse : Oui, d'après LSMS 2, nous devons avoir $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ et $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$.

2^{me} **question** : Pourquoi suppose-t-on plus de régularité sur f et g ? En utiliser la formule de D'Alembert , nous avons :

$$rM_u(x,r,t) = rL(r,t) = \frac{1}{2}\left[(r-ct)M_f(x,r-ct) + (r+ct)M_f(x,r+ct),\right] + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} sM_g(x,$$

l'équation ci-dessus donne

$$M_u(x,r,t) = \frac{1}{2r}\left[(r-ct)M_f(x,r-ct) + (r+ct)M_f(x,r+ct)\right] + \frac{1}{2rc}\int_{r-ct}^{r+ct} sM_g(x,s)\mathrm{d}s \quad (6.8)$$

□

Démonstration.

Grâce à LSMS, la solution u peut être récupérée en passant à la limite lorsque r passe à 0.

La limite de la 1^{er} **terme en**(6.8) **:**

le 1er terme est donnée par $\frac{1}{2r}\left[(r-ct)M_f(x, r-ct) + (r+ct)M_f(x, r+ct),\right]$.

Lorsque r tend vers zéro, le numérateur et le dénominateur tendent également vers zéro. En utilisant la règle de L'Hospital, la limite est la même que la limite de l'expression suivante lorsque r tend vers zéro :

$$\frac{1}{2}\left[M_f(x, r-ct) + M_f(x, r+ct),\right] + \frac{1}{2}\left[(r-ct)\frac{\partial}{\partial r}M_f(x, r-ct) + (r+ct)\frac{\partial}{\partial r}M_f(x, r+ct),\right] \tag{6.9}$$

le 1er terme dans (6.9) tend en $M_f(x, ct)$ comme $r \to 0$.

le deuxième terme on peut le récrire comme suivante :

$$\frac{r-ct}{2w_3}\frac{\partial}{\partial r}\int_{|z|=1} f(x+(r-ct)z)\mathrm{d}S(z) + \frac{r+ct}{2w_3}\frac{\partial}{\partial r}\int_{|z|=1} f(x+(r+ct)z)\mathrm{d}S(z)$$

En utilisant $w_3 = 4\pi$ et en prenant les dérivées par rapport à r à l'intérieur de l'intégrale, nous obtenons

$$\frac{r-ct}{8\pi}\int_{|z|=1} \nabla f(x+(r-ct)z)z\mathrm{d}S(z) + \frac{r+ct}{8\pi}\int_{|z|=1} \nabla f(x+(r+ct)z)z\mathrm{d}S(z)$$

Démonstration.

Par passage à la limite quand $r \to 0$ on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{-ct}{8\pi}\int_{|z|=1}\nabla f(x-ctz)z\mathrm{d}S(z)+\frac{ct}{8\pi}\int_{|z|=1}\nabla f(x+ctz)z\mathrm{d}S(z)\\ &=\frac{-t}{8\pi}\int_{|z|=1}\frac{\partial}{\partial t}f(x-ctz)\mathrm{d}S(z)+\frac{t}{8\pi}\int_{|z|=1}\frac{\partial}{\partial t}f(x+ctz)\mathrm{d}S(z)\\ &=\frac{t}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{|z|=1}f(x+ctz)-f(x-ctz)\mathrm{d}S(z)\right)\\ &=\frac{t}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|z|=1}f(x+ctz)\mathrm{d}S(z)\end{aligned}$$

Donc la limite de 1^{er} terme en equation (6.8) est

$$M_f(x,ct)+\frac{t}{\pi}\frac{\partial}{\partial t}M_f(x,ct)=\frac{\partial}{\partial t}\left(tM_f(x,ct)\right)$$

□

Démonstration.

Par la même procédure, nous trouvons la fin du deuxième terme de l'équation lorsque r tend vers zéro comme suit :

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{1}{2cr}\int_{r-ct}^{r+ct} sM_g(x,s)\mathrm{d}s &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2c}\Big[(r+ct)M_g(x,(r+ct))-(r-ct)M_g(x,(r-ct))\Big]\\ &= \frac{1}{2c}\Big[ctM_g(x,ct)+ctM_g(x,-ct)\Big]\\ &= \frac{1}{2}\Big[tM_g(x,ct)+tM_g(x,-ct)\Big] = tM_g(x,ct)\end{aligned}$$

D'ou la solution du problem de Cauchy est la somme de ces limites, donc

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(tM_f(x,ct)\Big) + tM_g(x,ct)$$

$\square$

Oneds sphériques et ondes planes

Définition 6.4

Une Oneds sphériques est une solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial^t 2} = c^2 \Delta u$ qui ne dépend de r et de t (on a $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$).

Si φ est un fonction qui ne dépend que de r et de t. On peut montre facilement que $\Delta\varphi = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$
Une onde sphérique est donc une solution de $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r}$ A toute onde sphérique u associons une fonction v par $v(r,t) = ru(r,t)$ alors $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{\partial u}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ donc v est solution de $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ et il existe deux fonctions F et G telles que $v(r,t) = F(r+ct) + G(r-ct)$.
On obtient ainsi le résultat suivant :

Équation des ondes en dimensions supérieures
Formules de Kirchhoff et de Poisson II

Théorème 6.5

Une onde sphérique est de la forme $u(r,t) = \frac{1}{r}[F(r+ct) + G(r-ct)]$ *On notera que pour l′ ’onde* $\frac{1}{r}G(r-ct)$ *ne vérifie pas* $u(r,t) = u(r-ct,0)$ *et que* $u(r,t) \neq u\left(r+a, t+\frac{a}{c}\right)$ *comme pour une onde en dimension 1 . Ainsi le long d'un rayon une onde sphérique n'est pas une onde en dimension 1, il y a amortissement du au fait que l'onde "s'étale" sur une surface* $4\pi c^2 t^2$ *de plus en plus grande lorsque t augmente. On notera que le flux* $\iint_{S(0,r)}$ *grad* $u \cdot d\sigma = 4\pi r^2 \frac{\partial u}{\partial r}(r,t)$ *à travers une sphère de rayon r donné est* $-4\pi \mathrm{G}(r-ct) + 4\pi r \mathrm{G}'(r-ct)$*, si* $r = \varepsilon \ll 1$ *ce flux est* $-4\pi G(-ct) + O(\varepsilon)$ *ce qui correspond au fait que* $u(r,t)$ *tend vers l'infini lorsque r tend vers 0 .*

Définition 6.6

On appelle onde plane une solution de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$ qui pour chaque valeur de t est constante sur chacun des plans parallèles à une direction donnée.
On appelle onde plane monochromatique une fonction de la forme suivante :

$$u(x, y, z, t) = A \exp \frac{2i\pi}{cT}(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct)$$

.

On considérera souvent la partie réelle ou la partie imaginaire de u.

Propagation :

On vérifie facilement que u est bien solution de (E) ; il est clair que u est constante sur tout plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ lorsque t est fixé. On dit que l'onde se propage dans la direction (α, β, γ) perpendiculaire aux plans précédents.

.

Équation des ondes en dimensions supérieures Formules de Kirchhoff et de Poisson IV

Soient M_0 et M_1 deux points situés sur une droite passant par l'origine dans la direction (α, β, γ) alors $x_1 - x_0 = \alpha l, y_1 - y_0 = \alpha l$, $z_1 - z_0 = \alpha l$ et : $\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 - ct_1 = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 - ct_0$ équivaut à $\alpha l = c\,(t_1 - t_0)$. Pour de tels points $u\,(M_0, t_0) = u\,(M_1, t_1)$: l'onde se propage à la vitesse c

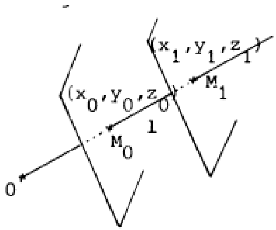


Figure 1 – Deux planes parallèle

Longueur d'onde : t fixé .
Sur la direction (α, β, γ) la longueur d'onde est cT : ceci signifie que pour une valeur donnée de t, $u(x_0, y_0, z_0, t) = u(x_1, y_1, z_1, t)$ si et seulement si : $\alpha(x_0 - x_1) + \beta(y_0 - y_1) + \gamma(z_0 - z_1) = kcT, k \in \mathbb{N}$.
Périodicité : M_0 fixé .
En un point M_0 fixé, $u(x_0, y_0, z_0, t) = A \exp\left[\frac{2\pi i}{cT}(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) - \frac{2\pi t}{T}\right]$ a pour période T.

Superposition d'ondes planes :
Etant donné la linéarité de l'équation des ondes, on peut superposer des solutions, et sous réserve d'existence et de régularité, considérer :

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(T) \exp\left(-\frac{2i\pi t}{T}\right) \exp \frac{2i\pi}{CT}(\alpha x + \beta y + \gamma z) dT$$

Équation des ondes en dimensions supérieures Formules de Kirchhoff et de Poisson I

Equations avec second membre : potentiels retardés Soit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = F(x, y, z, t) \qquad (\mathcal{PNH}_3)$$

Équation des ondes en dimensions supérieures
Formules de Kirchhoff et de Poisson II

Théorème 6.7 (Potentiels retardés)

La solution de $(\mathcal{PNH}_3)$ *telle que :* $\begin{cases} u(x,y,z,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = 0 \end{cases}$ *est donnée par :*

$$u\left(x_0, y_0, z_0, t\right) = \frac{1}{4\pi c^2} \iiint_{B(M_0, ct)} \frac{F\left(x, y, z, t - r/c\right)}{r} dxdydz \qquad (6.10)$$

où $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$. *Cette formule est souvent désignée sous le nom de formule des "potentiels retardés".*

La solution de $(\mathcal{PNH}_3)$ *telle que* $\begin{cases} u(x,y,z,0) = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,0) = g \end{cases}$ *est la somme de la fonction déterminer par le formule de Kirchhoff* (F_1) *ou* (F_2) *et de celle déterminer par potentiels retardés* (6.10).

Formule de Poisson Considérons à présent le problème $(\mathcal{P}_n)$ pour $n = 2$. Nous allons déduire la solution du problème ($\mathcal{P}_2$) en se servant de celle du problème $(\mathcal{P}_3)$. La méthode qui permet de faire ce passage s'appelle la méthode de descente d'Hadamard.

Théorème 6.8 (Formule de Poisson)

: Soient $f \in C^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ et $g \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$. Alors le problème $(\mathcal{P}_2)$ admet une unique solution $u(x,t)$ définie par la formule de Poisson,

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi ct}\int_{|y-x|<ct} \frac{tg(y) + f(y) + \nabla f(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}dy$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \left]0, +\infty\right[$.

Équation des ondes en dimensions supérieures
Formules de Kirchhoff et de Poisson II

Démonstration.

Nous savons que $\mathbb{R}^2$ peut-être considéré comme un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ via l'identification $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$, alors en prenant $x = (x_1, x_2, 0)$ nous écrivons d'après la formule de Kirchhoff que

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} [\mathrm{tg}(y) + f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x)] dS(y)$$

En désignant par (x_1, x_2, x_3) les points de $\mathbb{R}^3$ nous pouvons écrire avec

$$y = (y_1, y_2, y_3), \quad g(y) = g(y_1, y_2), \quad f(y) = f(y_1, y_2)$$

que

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|=ct} [tg(y_1, y_2) + f(y_1, y_2) + \nabla f(y_1, y_2) \cdot (y-x)] \, dS(y)$$

$\square$

Cont.

Sachant qu'une sphère est formée de deux hémisphères alors

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t^2}\left(2\int_{|y-x|=ct,y_3>0}\left[tg\left(y_1,y_2\right)+f\left(y_1,y_2\right)+\nabla f\left(y_1,y_2\right)\cdot(y-x)\right]dS(y)\right)\\
&= \frac{1}{2\pi c^2 t^2}\int_{|y-x|=ct,y_3>0}\left[tg\left(y_1,y_2\right)+f\left(y_1,y_2\right)+\nabla f\left(y_1,y_2\right)\cdot(y-x)\right]dS(y)\ (5)
\end{aligned}
$$

Calculons maintenant l'élément de surface $dS(y)$.
Paramétrisons d'abord l'hémisphère supérieure définie par $|y-x|=ct, y_3>0$. On a

$$
|y-x|=ct \Rightarrow \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+y_3^2}=c^2t^2
$$

□

Formule de Poisson

d'où l'on tire

$$y_3 = \sqrt{c^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2} = \phi\,(y_1, y_2)$$

car $y_3 > 0$. Par suite

$$dS(y) = \sqrt{1 + |\nabla\phi\,(y_1, y_2)|^2}dy_1dy_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y_2}\right)^2}dy_1dy_2$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_i}\,(y_1, y_2) = -\frac{y_i - x_i}{\sqrt{c^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}; i = 1, 2$$

D'où

$$dS(y) = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - (y_1 - x_1)^2 - (y_2 - x_2)^2}}dy_1dy_2$$

Équation des ondes en dimensions supérieures Formules de Kirchhoff et de Poisson II

Sachant que la projection de l'hémisphère considérée sur le plan horizontal, d'équation $y_3 = 0$, est le disque $D = \left\{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, |y - x| < ct\right\}$ nous déduisons de (5) que

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c^2 t^2} \int_{|y-x|<ct} \frac{\left[\operatorname{tg}(y_1,y_2) + f(y_1,y_2) + \nabla f(y_1,y_2)\cdot(y-x)\right] ct}{\sqrt{c^2t^2 - (y_1-x_1)^2 - (y_2-x_2)^2}} dy_1 dy_2$$

i.e.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{\{y;|y-x|<ct\}} \frac{\operatorname{tg}(y) + f(y) + \nabla f(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} dy_1 dy_2$$

avec rappelons-le $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$.

Exercice1

Justifier l'unicité de la solution confirmée par le théorème 2.3

Exercice2

Montrer que si $v(x,t) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ est solution de l'équation des ondes(6.1) alors $v(x,t)_t$ est également solution de l'équation des ondes (6.1).

Section 7

Quelques Étude Qualitatives

PROPAGATION DES ONDES :
Supposons que t représente le temps, la relation $u(x,t) = f(x-t)$ implique que : $\forall x_0, \forall t \geq 0 \quad u(x_0+t,t) = u(x_0,0)$: la valeur prise à l'instant t, par u, au point x_0+t est la même que celle prise a l'instant 0 au point x_0. Ce qu'on peut illustrer par deux "photos instantanées", on dit que u est une onde qui se propage à vitesse unité. "photos" :

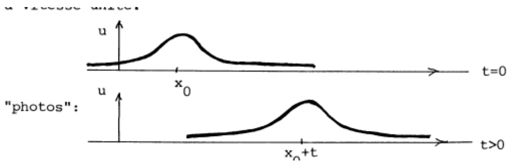


FIGURE 2 – Photos

On démontre de la même façon le résultat suivant :

Théorème 7.1

Soit l'équation suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{7.11}$$

.

1. *Toute solution de* (7.11) *est de la forme* $u(x,t) = F(x-ct)$ *où* F *est de classe* C^1.
2. *Une courbe caractéristique est une droite* $x - ct = k$, *si* u *est donnée sur une courbe* γ, *elle est connue dans toute la bande délimitée par les caractéristiques qui. coupent* r *en un seul point. La relation* $u(x_0 + ct, t) = u(x_0, 0) \quad \forall t \geq 0$ *exprime que* u *se propage le long de l'axe* $0x$ *vitesse* c. *Si* $c > 0$, u *se propage vers la droite, si* $c < 0 \quad u$ *se propage vers la gauche.*
3. $u(x,t) = f(x-ct)$ *est la solution de* (7.11) *dont la valeur au point* x *à l'instant 0 est* $f(x)$ *: c'est la solution du problème de valeur initiale* f.

Quelques Étude Qualitatives III

Dans ce qui suit nous désignerons par (E) l'équation des ondes : (E) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Nous supposerons toujours $t \geq 0$ en convenant que l'origine des temps a été choisie à l'instant où on commence à observer le phénomène représenté par l'équation (E).

Formule du parallèlogramme :

Toute solution de (E) est de la forme $\mathrm{u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct)}$; F est constante le long des caractéristiques $x + ct$ = constante, G l'est le long des caractéristiques $x - ct$ = constante. Soit A, B, C,D un parallèlogramme dont les côtés sont portés par des caractéristiques : $F(A) = F(C)$ si AC est parallèle à $x + ct = 0$ $F(D) = F(B)$ $G(A) = G(B)$ $G(D) = G(C)$, on obtient en additionnant le résultat suivant :

$$u(A) + u(D) = u(B) + u(C)$$

Quelques Étude Qualitatives IV

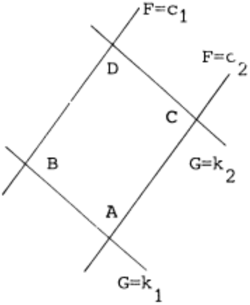


Figure 3 – Parallélogramme caractéristique

Domaines de dépendance, d'influence et de détermination :
Soit (AB) un segment de l'axe $t = 0$; supposons $c > 0$ dans 1'équation (E). Avec les notations précèdentes $F(P_1) = F(P)$ et $G(P_2) = G(P)$ $F(Q_1) = F(Q)$ et $G(Q_2) = G(Q)$. Dans la bande hachurée verticalement limitée par les caractéristiques $x - ct = x_A$ et $\mathrm{x - ct = x_B}$, G est déterminée par sa valeur sur $[A, B]$. Dans la bande hachurée horizontalement F est déterminée par sa valeur sur [A,B].

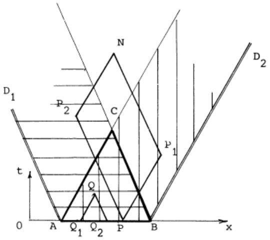
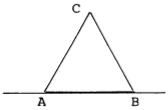


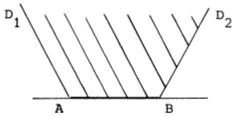
Figure 4 – Domaines de dépendance, d'influence et de détermination

Quelques Étude Qualitatives II

Ainsi la valeur $u(Q)$ en tout point du triangle A, B, C est complètement déterminée : le triangle (A, B, C) s'appelle domaine de détermination de u par le segment (A, B), corrélativement, le segment (A, B) s' appelle. domaine de dépendance de u au point c. La valeur de u sur le segment (AB) influe sur un domaine plus grand que le triangle (A, B, C) : elle influe sur le domaine compris entre les droites D_1 et D_2 qui s'appelle domaine d'influence du segment (AB).
En effet en un point N de ce domaine $u(N) = u\,(P_2) + u\,(P_1) - u(P)$ d'après la formule du parallèlogramme.



(ABC) est le domaine de détermination de (AB)
(AB) est le domaine de dépendance de C.



Le domaine hachuré est le domaine d'influence de (AB).

Section 8

Exercices

Exercices I

Exercice 1 :

Résoudre le problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$u(x,0) = x^2, -\infty < x < \infty$$

$$u_t(x,0) = 1, -\infty < x < \infty$$

Exercice 02 :

1. Résoudre le problème de Darboux

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, t > \max\{-x, x\}, t \geq 0,$$
$$u(x,t) = \begin{cases} \varphi(t), x = t, t \geq 0, \\ \psi(t), x = -t, t \geq 0, \quad -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

   où $\varphi, \psi \in C^2([0,\infty)$ vérifie $\varphi(0) = \psi(0)$.

2. Prouver que le problème est bien posé.

Exercice 03 :

Considérons l'équation des ondes homogène dans $\mathbb{R}^3$ avec vitesse $c = 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0,$$

avec conditions initiales :

$$u(x,0) = \phi(|x|) = \frac{1}{1+|x|^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0.$$

- Rappeler la formule de **Kirchhoff** en dimension 3.
- Montrer que la solution s'écrit :

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\frac{d}{dt}\left(\int_{S(x,t)} \frac{1}{1+|y|^2}\, dS(y)\right).$$

Exercices IV

Exercice 03 :

- En supposant $x = 0$, exprimer $u(0,t)$:

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t}\frac{d}{dt}\left(\int_{S(0,t)} \frac{1}{1+|y|^2}\, dS(y)\right).$$

- Calculer explicitement $u(0,t)$ en utilisant la symétrie sphérique.

Solution

- La formule de Kirchhoff en dimension 3 est donnée par :

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\frac{d}{dt}\left(\int_{S(x,t)} \phi(y)\, dS(y)\right)$$

  puisque $\psi = 0$.

- En remplaçant $\phi(y) = \frac{1}{1+|y|^2}$, on obtient :

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\frac{d}{dt}\left(\int_{S(x,t)} \frac{1}{1+|y|^2}\, dS(y)\right).$$

- Si $x = 0$, alors :

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t}\frac{d}{dt}\left(\int_{S(0,t)} \frac{1}{1+|y|^2}\, dS(y)\right).$$

Exercices VI

Solution Cont

- Sur la sphère $S(0,t)$, $|y| = t$, donc $\frac{1}{1+|y|^2} = \frac{1}{1+t^2}$:

$$\int_{S(0,t)} \frac{1}{1+t^2}\, dS(y) = \frac{1}{1+t^2} \cdot 4\pi t^2$$

donc :

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi t^2}{1+t^2}\right).$$

On calcule :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi t^2}{1+t^2}\right) = \frac{8\pi t}{(1+t^2)^2}$$

donc :

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t} \cdot \frac{8\pi t}{(1+t^2)^2} = \frac{2}{(1+t^2)^2}.$$

References I

- Baddari K, Abbassov A. *"Equations de la physique mathématique appliquées"*. **OPU** ; 2009
- Courant R, Hilbert D., *"Methods of mathematical physics"*, ; **Wiley -V C H** ,édition de 1989. .
- Eriksson K, Estep D, Hansbo P, Johnson C. Computational Differential Equations. Cambridge University Press, New York, 1990
- Reinhard H. Équations aux dérivées partielles. Dunod, paris, 2001.
- Schwartz L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, Paris, 1983.
- Walter A. Strauss. Partial Difierential Equations : An Introduction. Wiley, 1992

Many thanks for your attention.