

Test d'auto-évaluation – Chapitre 03

EDP linéaires du second ordre, caractéristiques, classification, formes standards

Exercice 1

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1. Déterminer le domaine D où cette équation est parabolique.
2. Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation sur D .
3. Effectuer le changement de coordonnées en basant sur (2) pour obtenir la forme canonique correspondante.
4. Trouver la solution générale de cette équation dans le domaine D .

Exercice 2

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

1. Vérifier que cette équation est parabolique sur \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation.
3. Effectuer le changement de coordonnées correspondant afin d'obtenir la forme canonique.
4. Trouver la solution générale dans \mathbb{R}^2 avec conditions : $u(0, y) = f(y)$; $u_x(0, y) = g(y)$, où f et g sont des fonctions données.

Exercice 3

Considérons l'EDP linéaire suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + [1 - a(y)] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

où

$$a(y) = \begin{cases} -1, & y < -1 \\ 0, & |y| \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

1. Trouver le domaine où cette EDP est hyperbolique, parabolique et elliptique.
2. Pour chaque domaine, trouver la forme canonique correspondante.

Exercice 4

Pour l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1. Trouver le domaine où cette EDP est hyperbolique et elliptique.
2. Pour chaque domaine, trouver la forme canonique correspondante.

Exercice 5

Donner la forme d'une corde vibrante au moment $t = \frac{\pi}{2a}$ si son mouvement est défini par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ U(x, 0) = \sin x, \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, 0) = 1 \end{cases}$$