

Test d'auto-évaluation

Chapitre 4 : Méthode de séparation des variables

Objectif

Ce test vise à vérifier la maîtrise du principe, de l'application et de l'interprétation de la méthode de séparation des variables appliquée aux EDP classiques.

Exercice 1 : Identification du type d'EDP séparable

Laquelle des équations suivantes peut être résolue par la méthode de séparation des variables ? Justifiez.

(A) $u_{xx} + u_{yy} = 0$

(B) $u_t = u_{xx} + u \cdot u_x$

(C) $u_t = u_{xx}$

(D) $u_{xy} = u$

Exercice 2 : Séparation directe

Résoudre l'équation suivante par la méthode de séparation des variables :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0$$
$$u(x, 0) = \sin(3x)$$

Exercice 3 : Justification de la démarche

On suppose que $u(x, t) = X(x)T(t)$. Montrer que si u est solution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

alors on peut ramener le problème à deux EDO.

Précisez les équations obtenues et leur lien avec une constante de séparation.

Exercice 4 : Formule générale

On considère le problème de la corde vibrante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{aligned}$$

- (a) Donner la forme générale de la solution obtenue par séparation des variables.
- (b) Comment la condition initiale sur $\frac{\partial u}{\partial t}$ influence-t-elle le choix des coefficients ?

Exercice 4: Solution Formelle

1. En utilisant la méthode de séparation des variables, trouvez une solution (formelle) au problème de chaleur périodique suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, & 0 < x < 2\pi, t > 0, \\ u(0, t) = u(2\pi, t), u_x(0, t) = u_x(2\pi, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

où f est une fonction périodique. Ce système décrit l'évolution de la chaleur sur une fil isolé circulaire de longueur 2π .

2. Trouver $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ pour tout $0 < x < 2\pi$, et explique l'interprétation physique de ce résultat.