République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifque
Université Djilali Bounâama

Équations de la physique mathématique

Chapitre 04: Méthode de séparations des variables (Méthode de Fourier)

Presented by: **Chabane Farid**

Faculté des sciences et de la technologie
Département de mathématiques et informatique.

4 août 2025

Table de matières

Section 1

Objectif

Objectif

À la fin de cette séquence, l'étudiant sera capable de :

- Identifier, formuler et résoudre une équation aux dérivées partielles linéaire par la méthode de séparation des variables, en reconnaissant les types d'EDP adaptés à cette méthode.
- Décomposant la solution en produits de fonctions d'une seule variable,appliquant les conditions aux limites pour obtenir les constantes.
- interprétant la solution obtenue dans son contexte physique ou mathématique.

Section 2

Résumé

Résumé

Orientation : Une équation aux dérivées partielles peut admettre des solutions particuliéres qui sont des produits de fonctions d'une variable. Si l'équation est linéaire, une somme de telles solutions particuliéres est encore une solution. De cette maniéere on peut résoudre un certain nombre de problémes intéressants mais la vraie portée de la méthode n'est réalisée que lorsque l'on utilise des sommes infinies des ces solutions particuliéres. Cet aspect sera exploré plus tard, notamment dans l'atude des séries de Fourier.

A titre d'exemple, on va traiter un probléme concernant l'équation de la chaleur en détail. D'autres application de la méthode seront présentées plus briévement.

Mots clés :Forme séparable ; Condition aux limites ; Condition initiale ; Séries de Fourier et coefficients de Fourier...

Section 3

L'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur

Situation du problème
On décrit maintenant la méthode de séparation des variables et examine les conditions d'applicabilité de la méthode aux problèmes qui impliquent des EDPs de second ordre de deux variables indépendantes. On considère donc le problème aux limites dont l'inconnue $u(x,t)$ posé sur un domaine de la forme $I \times J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.

$$\begin{cases} \mathcal{L}(u(x,t)) = h(x,t), \quad (x,t) \in I \times J, \\ u(x,0) = f(x), \ x \in I; \quad \textbf{Condition initiale} \\ \textbf{Condition aux limites}, \end{cases} \qquad (\varepsilon)$$

avec $\mathcal{L}(u(x,t))$ est une opérateur linéaire Défini comme la suivante

$$\mathcal{L}(u(x,t)) = a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(t)\frac{\partial u}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(t))\, u(x,t) = h(x,t),$$

où a_1 b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, $h(x,t)$, et $f(x)$ sont des fonctions données.

Condition aux limites :
On distingue différents types de conditions aux limites (**C.L**)
Conditions de Dirichlet : u est fixée sur le bord de domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$u(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbf{Fr}(\Omega)$$

où f_1 est une fonction connue définie sur la frontière $\mathbf{Fr}(\Omega)$. la condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle I s'exprime par :

$$u(a,t) = u(b,t) = 0. \tag{3.1}$$

Conditions de Neumann : La dérivée normale de u fixé sur le bord de domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par :

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = f_2(x), \quad \forall x \in \mathbf{Fr}(\Omega)$$

L'équation de la chaleur II

où f_1 est une fonction scalaire connue définie sur la limite $\mathbf{Fr}(\Omega)$ et $\overrightarrow{n}$ est le vecteur normal à la frontière $\mathbf{Fr}(\Omega)$. La dérivée normale dans le membre de gauche de l'équation, est définie par :
$\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = \overrightarrow{\text{grad}}\, u(x) \cdot \vec{n}(x)$. La condition aux limites de Neumann sur l'intervalle I s'exprime par :

$$u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0. \tag{3.2}$$

Conditions de Robin : une condition aux limites de Robin (ou de troisième type) est un type de condition aux limites portant le nom du mathématicien français Victor Gustave Robin (1855-1897), qui a travaillé dans le domaine de la thermodynamique. Elle est également appelée condition aux limites de Fourier. Imposée à une équation différentielle ordinaire ou à une équation aux dérivées partielles, il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine.
Une condition aux limites de Robin est une combinaison pondérée d'une condition aux limites de Dirichlet et d'une condition aux limites de Neumann. Ceci contraste avec la condition aux limites mêlée, constituée de conditions aux limites de types différents imposées chacune sur une partie du bord du domaine. La condition aux limites de Robin

est aussi appelée condition d'impédance, en raison de son rôle dans les problèmes d'électromagnétisme. La condition aux limites de Robin est de la forme :

$au + b\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g$ sur $\mathbf{Fr}(\Omega)$ où a, b et g sont des fonctions définies sur $\mathbf{Fr}(\Omega)$.

En dimension un, si, par exemple, sur [0, 1], la condition aux limites de Robin s'écrit :

$$\begin{cases} au(0,t) - bu_x(0,t) = g(0) \\ au(1,t) + bu_x(1,t) = g(1). \end{cases} \tag{3.3}$$

Remarquons que le signe devant le terme dérivé change selon la partie du bord considérée : la raison est que le vecteur normal à [0, 1] au point 0 pointe vers la direction négative (gauche), tandis qu'en 1 ce vecteur pointe vers les positifs.

La condition aux limites de Robin est souvent utilisée dans la résolution des problèmes de Sturm-Liouville.

$$c_1(x)u(a,t) + c_2(x)u_x(b,t) = 0.$$

L'équation de la chaleur I

Condition aux limites :

Une condition aux limites mêlée ou mixte : pour une équation aux dérivées partielles définit un problème aux limites dans lequel la solution de l'équation donnée doit satisfaire différentes conditions aux limites sur des parties disjointes de la frontière du domaine où la condition est énoncée. Précisément, dans un problème aux limites mixtes, la solution doit satisfaire une condition limite de Dirichlet ou de Neumann de manière mutuellement exclusive sur des parties disjointes de la frontière.

Par exemple, étant donné une solution u à une équation aux dérivées partielles sur un domaineΩ de frontière $\mathbf{Fr}(\Omega)$, on dit qu'elle satisfait une condition limite mixte si, constituée $\mathbf{Fr}(\Omega)$ de deux parties disjointes, Γ_1 et Γ_2, telles que $\mathbf{Fr}(\Omega) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, u vérifie les équations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = g, \quad u|_{\Gamma_2} = u_0$$

Condition aux limites dynamique : une condition aux limites dynamique correspond à une combinaison linéaire entre la dérivée temporelle et la dérivée spatiale de la solution d'une équation aux dérivées partielles aux bords du domaine d'étude, la condition aux limites dynamique s'écrit dans sa forme générale

$$a(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = h(x,t) \qquad \text{pour tout } x \in \mathbf{Fr}(\Omega) \ \text{ et } \ t > 0$$

pour tout
où le coefficient a désigne une fonction dépendant des variables x et t. Lorsque $a \geqslant 0$, on dit que la condition est dissipative.
Ce type de condition correspond à une interpolation entre la condition aux limites de Neumann (en prenant a = 0) et la condition aux limites de Dirichlet (en divisant l'équation $a\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = h$ par a et en faisant tendre a vers l'infini).
De telles conditions se rencontrent dans des problèmes modélisant une répartition de la chaleur dans un milieu dont le bord est entouré par une très fine paroi possédant une grande conductivité. Dans ce cas, si l'on note a la conductivité de la paroi, la condition modélisant le phénomène est alors une condition aux limites dynamique s'écrivant

L'équation de la chaleur I

Condition aux limites :

Conditions périodiques

$$u(a,t) = u(b,t) \text{ et } u_x(a,t) = u_x(b,t) \tag{3.4}$$

Domaine infini :Condition de décroissance, tels que :

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,t) < c_1 e^{-c_2 x^2}$$

Remark

pour un problème bien formulé, nombre de conditions pour chaque variable $(t, x, y, \cdots)$ égale au degré de dérivation le plus élevé par rapport à cette variable

les principales étapes de la méthode séparation des variables(Un système avec des conditions aux limites homogènes et sans termes source)

Voici les principales étapes :

On considère un terme source nul et des conditions aux limites (Neumann ou Dirichlet) homogènes dans notre système d’équation ε

1. On recherche les solutions séparées de ε. Ces solutions sont de la forme spéciale

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

et satisfont les condition aux limites et la condition initiale. Il se trouve que X et T doivent être des solutions des problèmes aux limites linéaires (P_1) et (P_2) relatives aux X et T, respectivement. Il apparaît de plus un paramètre réel que l’on note λ.

2-On résout les problème (P_1) et (P_2), les solutions de (P_1) nous permettent de construire une base hilbertienne $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$(fonctions propres) . On désigne par $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les solutions de (P_2)

3-On utilise le principe de superposition générale pour générer à partir de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une solution plus générale du problème, sous la forme d’une série infinie de solutions séparées.

4-Dans la dernière étape, on applique les conditions initiales pour déterminer les coefficients présents dans cette série avec l'utilisation de l'orthogonalité de X_i et étudie sa convergence.

Théorème 3.1 (Principe de superposition :)

1. *Si u_1 et u_2 satisfont une EDP linéaire homogène, alors une combinaison linéaire arbitraire $c_1u_1 + c_2u_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ satisfait également la même équation.*
2. *si $u_1, u_2, \cdots, u_p$ sont p solutions d'une EDP homogène linéaire homogène alors $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_pu_p$, $c_1, c_2, \cdots, c_p \in \mathbb{R}$ satisfait également la même équation.*
3. *si $\mathcal{L}u_1 = h_1$ et $\mathcal{L}u_2 = h_2 \Rightarrow u = u_1 + u_2$ est solution de $\mathcal{L}u = h_1 + h_2$*

L’équation de la chaleur III

Exemple 3.2

1. équation de Laplace : $L = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad Lu = 0$
2. $u_n(x, y) = \cos(nx)\sinh(ny)\, n = 1, 2, 3 \cdots$: solution
3. alors :

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \cos(nx)\sinh(ny)$$

   est aussi solution

Remark

Soit u_p solution de EDP linéaires non homogènes $\mathcal{L}u = f$ et u_h solution de EDP linéaires homogènes $\mathcal{L}u = 0$ alors $u = cu_h + u_p$ est aussi solution

Dans la suite, on va rappeler quelques notions essentielles sur les séries de Fourier qui serons utilisées dans le reste de ce chapitre.

L'équation de la chaleur I

Rappel sur les séries de Fourier

Définition 3.3

Une suite de fonctions $\varphi_n(x)$, $n \geqslant 0$ définit sur un intervalle $[a, b]$, décrit un système orthonormal par rapport à la fonction de poids q(x) si et seulement si

$$\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)q(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} 0 \,\mathrm{si}\, m \neq n, \\ 1 \,\mathrm{si}\, m = n \end{array} \right\}$$

Exemple 3.4

On va voir que les fonctions cos et sin peuvent former une base orthonormal. Pour cela, l'ensemble des fonctions $\left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(x)}{2\sqrt{\pi}} \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{2\sqrt{\pi}}, \cdots, \frac{\cos(nx)}{2\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{2\sqrt{\pi}} \right\}$ est un système orthogonale de fonctions sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ pour la fonction de poids $q \equiv 1$.

Ceci est affirmé par les calculs suivants. Si $m, n \geqslant 1$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)}{2} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = n \end{cases}$$

Si $m, n \geqslant 0$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)}{2} = \begin{cases} 0 \text{ si } m \neq n \\ \pi \text{ si } m = n \\ 2\pi \text{ si } m = n = 0 \end{cases}$$

Si $m \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((m+n)x) - \cos((m-n)x)}{2} = 0.$$

L'équation de la chaleur III

Définition 3.5

Soient f une fonction et D_f son ensemble de dénition. On dit que la fonction f est périodique s'il existe un nombre réel non nul p vériant la propriété suivante
Si $x \in D_f$ alors $x + p \in D_f$ et $f(x + p) = f(x)$.
Le nombre p est appelé la période de la fonction f.

Séries de Fourier et coefficients de Fourier

Le but de cette sus-section est d'écrire une fonction $f(x)$ continue par morceaux et $2\pi-$périodique sous la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

où a_n, b_n pour $n \geqslant 0$ sont appelés les coefficients de Fourier associés à la fonction f.

L'équation de la chaleur IV

Définition 3.6

Les coeffcients de Fourier associé à la fonction f sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \text{ si } n \geq 1.$$

L'équation de la chaleur V

Exemple 3.7

Soit $f(x) = x + x^2$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Si $n \geqslant 1$, alors

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos(nx)dx = \frac{1}{n\pi}\left((x+x^2)\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2x)\sin(nx)dx$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}\left(-(1+2x)\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\left(2\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

L'équation de la chaleur VI

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x + x^2\right)\sin(nx)dx = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}$$

Donc la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{4\,(-1)^n}{n^2}\right)\cos(nx) + \left(\frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\right)\sin(nx)\right)$$

Une remarque importante pour faciliter les calculs

L'équation de la chaleur VII

Remark

1. Si f est une fonction paire, alors sa série de Fourier est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \text{ avec } a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

2. Si f(x) est une fonction impaire, alors sa série de Fourier est

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \text{ avec } b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables I

Problème de diffusion

Commençaons par l'équation de la chaleur. Considérons un fil (ou une fine tige métallique) de longueur L qui est isolé sauf au point de terminaison. Soit x la position le long du fil et soit t le temps. Regardons la Figure**??**

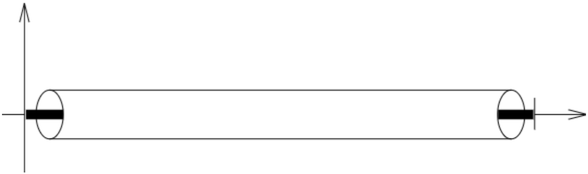

FIGURE 1 – Chaleur sur un fil isolé

Premier applications de la méthode de séparation des variables II

soit $u(x,t)$ la température au point x et au temps t.L'équation régissant cette configuration se nomme l'équation de la chaleur à une dimension :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0 \tag{3.5}$$

où $k > 0$ est la constante (de conductivité thermale du matériel). Ainsi, le changement de chaleur en un point spécifique est proportionnel à la seconde dérivée de la chaleur le long du fil. C'est logique puisque, en effet, si, à un t fixe, le graphe de la répartition de la chaleur a un maximum (le graphe est concave vers le bas), alors la chaleur s'échappe du maximum (et vice versa). On utilise généralement une notation plus pratique pour les dérivées partielles. On écrit u_t au lieu de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et l'on écrit u_{xx} plutôt que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Avec cette notation, l'équation de la chaleur devient

$$u_t - ku_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0 \tag{3.6}$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables III

Pour l'équation de la chaleur, il faut aussi avoir quelques conditions aux limites. On suppose soit que les extrémités du fil sont exposées et touchent à un corps ayant une chaleur constante, soit que les extrémités sont isolées. Si les extrémités du fil sont maintenues à la température 0, alors les conditions sont

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t \geq 0,\ (\mathbf{CL})\text{- conditions aux limites de type Dirichlet)} \tag{3.7}$$

Si les extrémités sont également isolées, alors les conditions sont

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \geq 0,\ (\mathbf{CL})\text{- conditions aux limites de type Nueman)} \tag{3.8}$$

Voyons pourquoi c'est ainsi. Si u_x est positive à un certain moment, alors, à un certain moment, est plus petite à gauche de et plus grande à droite de . La chaleur passe d'une température élevée à une température basse, c'est-à-dire vers la gauche. Par contre, si u_x est négative, la chaleur circule de nouveau du feu vif au feu doux, c'est-à-dire à droite. Donc, quand est nulle, c'est un point où la chaleur n'est pas conduite. En d'autres termes, $u_x(0,t) = 0$ signifie qu'aucune chaleur ne circule dans le fil ou hors du fil au

Premier applications de la méthode de séparation des variables IV

point . On a deux conditions le long de l'axe x , car il y a deux dérivées dans la direction x . On dit que ces conditions secondaires sont homogènes (c'est-à-dire que ou sa dérivée est nulle). On a également besoin d'une condition initiale(**CI**) : la distribution de la température au temps $t = 0$, c'est-à-dire

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \tag{3.9}$$

pour une certaine fonction connue $f(x)$. Cette condition initiale n'est pas une condition homogène. Les conditions aux limites (3.7) impliquent que

$$f(0) = u(0, 0) = u(L, t) = 0$$

et

$$f(L) = u(L, 0) = u(L, 0) = 0.$$

Ces deux conditions s'appellent les conditions de compatibilité.

Premier applications de la méthode de séparation des variables V

- **Equation de la chaleur homogènes avec conditions** (3.5) **avec CI et CL homogènes type Dirichlet**

Etape1 :

1-Formulation de l'EDP et des conditions aux limites :

Considérons une équation de diffusion (3.6) avec des **CL** et **CI** (3.7) et (3.9) respectivement.

2- Hypothèse de séparation des variables :

On commence à chercher des solutions de (3.6) sous la forme

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{3.10}$$

qui satisfont les conditions (3.7) où X et T sont des fonctions de x et t, respectivement. Dans cette étape, on ne prend pas en compte la condition initiale (3.9) et on n'est pas intéressé par la solution zéro $u(x,t) = 0$. On cherche donc des fonctions X et T qui ne s'annulent pas identiquement. Par différentiation de (3.15) par rapport à t et deux fois par rapport à x et par substitution dans (3.6), on obtient

Premier applications de la méthode de séparation des variables VI

$$XT'(t) = kX''(x)\,T(t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

On peut réécrire

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)}, \; 0 < x < L, \; t > 0. \tag{3.11}$$

Puisque x et t sont des variables indépendantes, cette relation implique qu'il existe une constante λ (appelée constante de séparation) telle que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \; 0 < x < L, \; t > 0. \tag{3.12}$$

Comme on cherche des solutions ne s'annulent pas identiquement, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T(t) \neq 0$. Conséquemment, on obtient

$$\begin{cases} u(0, t_0) = X(0)\,T(t_0) = 0 \\ u(L, t_0) = X(L)\,T(t_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow X(0) = X(L) = 0$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables VII

L'équation (3.12) conduit au système d'EDOs suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx} + \lambda X = 0,\ 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\frac{dT}{dt} + k\lambda T = 0, \quad t > 0, \tag{3.14}$$

où λ est une constante.

Etape 2 :

Résolution des équations différentielles ordinaires par application des conditions aux limites :

On commence d'abord à résoudre le système (3.13). Une solution non triviale de (3.13) est appelée fonction propre avec la valeur propre λ. On distingue 3 cas :

Cas 1 : $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors

$$X(x) = \alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables VIII

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha e^{-\mu L} + \beta e^{\mu L} = 0. \end{cases}$$

De la première équation, on a $\alpha = -\beta$. La seconde équation implique donc $\alpha e^{-\mu L} = \alpha e^{\mu L}$, alors si $\alpha \neq 0$ on obtient $e^{2\mu L} = 1$. Ceci n'est pas possible car μ et L sont différents de 0 et par conséquent $\alpha = \beta = 0$. Alors, dans ce cas $X \equiv 0$ et $u(x, t) = 0$ pour tout $0 \leqslant x \leqslant L$ et $t \geqslant 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda < 0$.
Cas 2 : Si $\lambda = 0$, on obtient

$$X(x) = \alpha + \beta x,$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites impliquent

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha + \beta L = 0. \end{cases}$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables IX

Comme $L \neq 0$, il est claire que $\alpha = \beta = 0$. Alors, dans ce cas $X \equiv 0$ et $u(x,t) = 0$ pour tout $0 \leqslant x \leqslant L$ et $t \geqslant 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda = 0$.
Cas 3 : $\lambda = \mu^2 > 0$, on obtient

$$X(x) = \alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x)$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites impliquent que

$$\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta \sin(\mu L) = 0 \end{cases}$$

pour éviter la solution triviale $X \equiv 0$, on suppose que $\beta \neq 0$. Ceci implique que $\sin(\mu L) = 0$. Conséquemment

$$\mu L = n\pi, \ \lambda = (n\pi/L)^2, \ n \in \mathbb{Z}$$

Il en résulte que

Premier applications de la méthode de séparation des variables X

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2$$

sont les valeurs propres de et les fonctions

$$X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x/L)$$

sont les fonctions caractéristiques du problème (3.13). Comme $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il sut donc de considérer

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, \; X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x/L), \; n \in \mathbb{N}^*.$$

Il reste maintenant à résoudre le problème (3.14), sa solution est donnée par

$$T(t) = \gamma_n e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

A la fin de cette étape, on peut considérer qu'on a bien construit une base hilbertienne $(X_i)_{\mathbb{N}^*}$.

Etape 3 :

Premier applications de la méthode de séparation des variables XI

1-Solution générale : On utilise le principe de superposition générale pour générer à partir de $(X_i)_{\mathbb{N}^*}$ et $(T_i)_{\mathbb{N}^*}$ une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solutions séparées. On a ainsi obtenu la suite suivante de solutions séparées

$$u_n(x,t) = \delta_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2},,, n \in \mathbb{N}^*.$$

Par le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

de solutions séparées est également une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait les conditions aux limites de Dirichlet.

2-Application de la condition initiale :

Considérons maintenant la condition initiale. Supposons qu'il ait la forme

Premier applications de la méthode de séparation des variables XII

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \sin(n\pi x/L)$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'une combinaison linéaire des fonctions propres. Ensuite, une solution au problème de chaleur (3.6)-(3.7) est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

L'idée brillante de Fourier était qu'il était possible de représenter une fonction arbitraire f satisfaisant les conditions aux limites (3.7) comme une combinaison linéaire infinie unique des fonctions propres $\sin(n\pi x/L)$. En d'autres termes, il est possible de trouver des constantes δ_n telles que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L)$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables XIII

Une telle série est appelée une série (ou extension) de Fourier (généralisée) de la fonction f par rapport aux fonctions propres du problème, et $\delta_n, n = 1, 2\cdots$ sont appelés les coefficients de Fourier (généralisés) de la série. Dans ce cas, le principe de superposition généralisée implique que l'expression formelle

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

est un candidat naturel pour une solution généralisée du problème (3.6)-(3.7). On explique maintenant comment représenter une fonction arbitraire f sous la forme d'une série de Fourier. En d'autres termes, comment calculer les coefficientsδ_n. Remarquons

$$\int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \sin(m\pi x/L)\sin(n\pi x/L)\, dx = \begin{cases} 0\,; m \neq n \\ L/2, m = n. \end{cases}$$

Par conséquent, les coefficients de Fourier sont donnés par

Premier applications de la méthode de séparation des variables XIV

$$\delta_n = \frac{\int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx}{\int_0^L \sin^2(m\pi x/L)\, ds} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(n\pi x/L) f(x) dx.$$

On obtient la formule explicite de la solution formelle, qui est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

où

$$\delta_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx.$$

Conclusion : La méthode de séparation des variables permet de résoudre le probléme (3.6), (3.9) et (3.7) pour des fonctions $f \in ev\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ o'u X_n est une fonction propre du problème aux limites (3.13).

Premier applications de la méthode de séparation des variables I

- **Equation de la chaleur homogènes avec conditions avec CI et CL homogènes type de Neumann Etape1 :**

1-Formulation de l'EDP et des conditions aux limites : Supposons maintenant que les extrémités du fil sont isolées. Dans ce cas, on résout l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \tag{2.6}$$

avec

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \geq 0, \quad \textbf{CLN} \tag{2.8}$$

$$u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq L \quad \textbf{CL}, \tag{2.9}$$

où f est une condition initiale donnée et k est une constante positive. Afin de rendre (3.8) consistant avec (3.9), on suppose la condition de compatibilité : $f_x(0) = f_x(L) = 0$.

2- Hypothèse de séparation des variables :

Encore une fois, on essaie une solution de(3.6)sous la forme

Premier applications de la méthode de séparation des variables II

$$u(x,t) = X(x)\,T(t) \tag{3.15}$$

qui satisfont les conditions (3.8) où X et T sont des fonctions de x et t, respectivement. Dans cette étape, on ne prend pas en compte la condition initiale (3.9) et on n'est pas intéressé par la solution zéro $u(x,t) = 0$. On cherche donc des fonctions X et T qui ne s'annulent pas identiquement. Par différentiation de (3.15) par rapport à t et deux fois par rapport à x et par substitution dans (3.6), on obtient

$$XT'(t) = kX''(x)\,T(t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

On peut réécrire

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)},\ 0 < x < L,\ t > 0. \tag{3.16}$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables III

Puisque x et t sont des variables indépendantes, cette relation implique qu'il existe une constante λ (appelée constante de séparation) telle que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,\ 0 < x < L,\ t > 0. \tag{3.17}$$

Puisque x et t sont des variables indépendantes, cette relation implique qu'il existe une constante λ (appelée constante de séparation) telle que

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,\ 0 < x < L,\ t > 0. \tag{3.18}$$

Comme on cherche des solutions ne s'annulent pas identiquement, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T(t) \neq 0$. Conséquemment, on obtient

$$\begin{cases} u(0, t_0) = X'(0)\,T(t_0) = 0 \\ u(L, t_0) = X'(L)\,T(t_0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow X'(0) = X'(L) = 0$$

L'équation (3.12) conduit au système d'EDOs suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx} + \lambda X = 0, \ 0 < x < L, \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

$$\frac{dT}{dt} + k\lambda T = 0, \quad t > 0, \tag{3.20}$$

où λ est une constante.

Etape 2 :

Résolution des équations différentielles ordinaires par application des conditions aux limites :

On commence d'abord à résoudre le système (3.19). Une solution non triviale de (3.13) est appelée fonction propre avec la valeur propre λ. On distingue 3 cas :

Cas 1 : $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors

$$X(x) = \alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables V

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} \mu(-\alpha + \beta) = 0, \\ \mu(-\alpha e^{-\mu L} + \beta e^{\mu L}) = 0. \end{cases}$$

De la première équation, on a $\alpha = -\beta$. La seconde équation implique donc $\alpha e^{-\mu L} = \alpha e^{\mu L}$, alors si $\alpha \neq 0$ on obtient $e^{2\mu L} = 1$. Ceci n'est pas possible car μ et L sont différents de 0 et par conséquent $\alpha = \beta = 0$. Alors, dans ce cas $X \equiv 0$ et $u(x, t) = 0$ pour tout $0 \leqslant x \leqslant L$ et $t \geqslant 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda < 0$.

Cas 2 : Si $\lambda = 0$, on obtient

$X(x) = \alpha + \beta x$, et $X'(x) = \beta$,

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites impliquent

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \beta = 0$$

Donc $\lambda = 0$ est une valeur propre avec la fonction propre $X(x) = \alpha$ (constante).

Cas 3 : $\lambda = \mu^2 > 0$, on obtient

Premier applications de la méthode de séparation des variables VI

$$\begin{cases} X(x) & = \alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x) \\ X'(x) & = \mu(-\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x)) \end{cases}$$

où α, β sont des réels arbitraires. Les conditions aux limites impliquent que

$$\begin{cases} X'(0) = 0 \\ X'(L) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta\cos(0) = 0 \\ -\alpha\sin(\mu x) + \beta\cos(\mu x) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ -\alpha\sin(\mu L) + \beta\cos(\mu L) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \beta = 0 \text{ et } \alpha\sin(\mu L) = 0$$

Comme $\alpha\sin(\mu L) = 0$, alors $\sin(\mu L) = 0$. Conséquemment $\mu L = n\pi$ et $\lambda = (\frac{n\pi}{L})^2$ avec $n \in \mathbb{Z}^\star$. On obtient

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \text{ et } X_n(x) = \alpha_n\cos(n\pi x/L)$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables VII

Parce que $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on prend en considération la valeur $\lambda = 0$, les valeurs et les fonctions propres sont dénies par :

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2 \text{ et } X_n(x) = \alpha_n \cos(n\pi x/L), \; n \in \mathbb{N}.$$

On passe maintenant à l'équation (3.20) dont la solution générale est donnée par

$$T(t) = \gamma_n e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Etape 3 :

1-Solution générale : On a ainsi obtenu la suite suivante de solutions séparées

$$u_n(x,t) = \delta_n \cos(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \cos(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \; n \in \mathbb{N}$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables VIII

2-Application de la condition initiale :
Supposons que l'on a

$$f(x) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos\left(n\pi x/L\right)$$

Dans ce cas, le principe de superposition généralisée implique la solution formelle

$$u\left(x,t\right) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos\left(n\pi x/L\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

On sait que si $m, n \geqslant 0$, on a

$$\int_0^L \cos(mx)\cos(nx)dx = \int_0^L \frac{\cos((m-n),x) + \cos((m+n),x)}{2} = \begin{cases} 0, \text{ si } m \neq n \\ \frac{L}{2}, \text{ si } m = n \\ L, \text{ si } m = n = 0 \end{cases}$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables IX

On passe maintenant à expliquer comment calculer les coefficients $\delta_m, m = 0, 1, 2, \cdots$
Pour $m = 0$, multiplions f par $\cos(0\pi x/L)$ et on intègre sur $(0, L)$,on obtient

$$\int_0^L \cos(0\pi x/L) f(x) dx = \frac{\delta_0}{2}\int_0^L \cos(0\pi x/L)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \cos(0\pi x/L)\cos(n\pi x/L)\, dx$$

$$= \frac{\delta_0 L}{2} + 0$$

Car $\int_0^L \cos(0\pi x/L)\cos(n\pi x/L) dx = 0$ puisque $n \neq m$ $(m = 0)$. alors

$$\delta_0 = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(0\pi x/L) f(x) dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) dx$$

Pour $m \neq 0$, multiplions f par $\cos(m\pi x/L)$, $m \neq 0$ et on intègre sur $(0, L)$, on obtient

Premier applications de la méthode de séparation des variables X

$$\int_0^L \cos(m\pi x/L) f(x)dx = \frac{\delta_0}{2}\int_0^L \cos(m\pi x/L)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \cos(m\pi x/L)\cos(n\pi x/L)\, dx$$

$$= \frac{\delta_0 L}{2m\pi}[\sin(0) - \sin(m\pi)] + \delta_m \int_0^L \cos(m\pi x/L)\cos(m\pi x/L)\, dx$$

$$= \delta_m \frac{L}{2}$$

ce qui donne

$$\delta_m = \frac{2}{L}\int_0^L \cos(m\pi x/L) f(x)dx$$

et

Premier applications de la méthode de séparation des variables XI

$$f(x) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi x/L\right) \int_0^L \cos\left(n\pi x/L\right) f(x)dx$$

Par conséquent, la solution formelle est maintenant donnée par

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx + \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi x/L\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t} \int_0^L \cos\left(n\pi x/L\right) f(x)dx$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables XII

Exemple 3.8

Soit $f(x) = x + x^2$ sur l'intervalle $[0, \pi]$, alors $L = \pi$ et

$$\delta_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x + x^2\right)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} dx = \left[\pi + \frac{2}{3}\pi^2\right].$$

Si $n \geqslant 1$, alors

$$\delta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^2)\cos(nx)dx = \frac{1}{n\pi}\left((x + x^2)\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int 0^{\pi}\,(1 + 2x)\sin(nx)dx$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}\left\{(-(1 + 2x)\cos(nx)]\,0^{\pi} + \frac{1}{n}\,(2\sin(nx)]\,0^{\pi}\right\} = -\frac{1}{n^2\pi}\{-(1 + 2\pi)\cos(n\pi) + 1\}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\{(1 + 2\pi)(-1)^n - 1\}$$

Premier applications de la méthode de séparation des variables XIII

Donc

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\pi + \frac{2}{3}\pi^2\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\left((1+2\pi)(-1)^n - 1\right)\right]\cos(n\pi x/L)$$

Dans ce cas, le principe de superposition généralisée implique la solution formelle

$$u(x,t) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi}\left((1+2\pi)(-1)^n - 1\right)\right]\cos(n\pi x/L)\, e^{-k(n\pi/L)^2 t}.$$

Section 4

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire I

L'équation de Laplace
La méthode de séparation des variables permet de résoudre l'équation de Laplace dans une région rectangulaire lorsque l'on impose une condition sur la solution sur chaque coté du rectangle.

Exemple 4.1

Trouver u telle que

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K \tag{4.21}$$

$$u(0,y) = u(L,y) = 0 \text{ pour } 0 < y < K \tag{4.22}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ et } u(x,K) = \psi(x) \text{ pour } 0 < x < L \tag{4.23}$$

où $\varphi, \psi : [0, L] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions données. Dans ce cas les conditions de compatibilités sont

$$\varphi(0) = \varphi(L) = \psi(0) = \psi(L) = 0 \tag{4.24}$$

(1) Séparation des variables : Cherchons des solutions de (4.21) et (4.22) de la forme

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire II

$$u(x, y) = f(x)g(y)$$

L'équation (14) devient

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K$$

et donc ily a une constante λ telle que

$$f''(x) - \lambda f(x) = g''(y) + \lambda g(y) = 0$$

La condition (4.23) devient $f(0) = f(L) = 0$, sinon $g(y) = 0$ pour tout $0 < y < K$.
Cherchons les valeurs propres et les fonctions propres du problème aux limites

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \text{ pour } 0 < x < L$$
$$f(0) = f(L) = 0$$

On trouve que le spectre est

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire III

$$\sigma = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\} \text{ ou' } \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

et une fonction propre associée à λ_n est

$$f_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Pour $\lambda = \lambda_n$, la solutionn générale de $g''(y) + \lambda g(y) = 0$ est

$$g(y) = Pe^{\frac{n\pi}{L} y} + Qe^{-\frac{n\pi}{L} y}$$

où P et Q sont des constantes arbitraires. Les solutions de (4.21) et (4.23) ayant la forme (4.24) sont

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\left\{Pe^{\frac{n\pi}{L} y} + Qe^{-\frac{n\pi}{L} y}\right\}$$

(2) Superposition : On voit que

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire IV

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{m} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left\{P_n e^{\frac{n\pi}{L}y} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L}y}\right\}$$

est une solution de (4.21) et (4.23), quelque soit $m \in \mathbb{N}$ et les coefficients P_n et Q_n. On essaie de choisir m, P_n et Q_n âfin de satisfaire (16) qui devient

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{m} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\{P_n + Q_n\} \text{ et}$$

$$\psi(x) = u(x,K) = \sum_{n=1}^{m} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\left\{P_n e^{\frac{n\pi}{L}K} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L}K}\right\}$$

Ceci montre que forcément $\psi, \varphi \in \text{ev}\,\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dans ce cas on peut déterminer m, P_n et Q_n de la manière suivante. Si $\varphi, \psi \in \text{ev}\,\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ on peut écrire

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{n\pi}{L}x \text{ et } \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire V

où tous, sauf un nombre fini, des coefficients α_n et β_n sont nuls. On les calcule en multipliant par $\sin \frac{k\pi}{L}x$ et intégrant de 0 à L :

$$\begin{aligned}
\int_0^L \varphi(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} x dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \int_0^L \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} x dx \\
&= \alpha_k \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}
\int_0^L \psi(x) \sin \frac{k\pi}{L} x dx &= \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{k\pi}{L} x dx \\
&= \beta_k \frac{L}{2}
\end{aligned}$$

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire VI

Donc il suffit de choisir P_n et Q_n telles que

$$\begin{cases} P_n + Q_n & = \alpha_n \text{ où } \alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx, \\ \left\{P_n e^{\frac{n\pi}{L}K} + Q_n e^{-\frac{n\pi}{L}K}\right\} & = \beta_n \text{ où } \beta_n = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)\sin\frac{n\pi}{L}x dx. \end{cases} \tag{4.25}$$

La solution de ce système est

$$P_n = \frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{n\pi}{L}K}}{2\sinh e^{\frac{n\pi}{L}K}} \text{ et } Q_n = \frac{\alpha_n e^{\frac{n\pi}{L}K} - \beta_n}{2\sinh e^{\frac{n\pi}{L}K}}.$$

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire I

Conclusion : La méthode de séparation des variables permet de résoudre le problème (4.21)-(4.23) pour des fonctions $\psi, \varphi \in \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. En ce cas, la solution est

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\left\{P_n e^{\frac{\alpha\pi}{L}y} + Q_n e^{-\frac{\beta\pi}{L}y}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{L}x\left\{\frac{\beta_n - \alpha_n e^{-\frac{n\pi}{L}K}}{2\sinh e^{\frac{n\pi}{L}K}} e^{\frac{n\pi}{L}y} + \frac{\alpha_n e^{\frac{n\pi}{L}K} - \beta_n}{2\sinh e^{\frac{n\pi}{L}K} e^{-\frac{n\pi}{L}y}}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{L}x}{2\sinh e^{\frac{n\pi K}{L}}\left\{\beta_n \sinh\frac{n\pi}{L}y - \alpha_n \sinh\frac{n\pi}{L}(y-K)\right\}}
\end{aligned}$$

où

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{n\pi}{L}x \text{ et } \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire II

L'hypothèse que $\varphi, \psi \in ev\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ assure que seulement un nombre fini des constantes α_n et β_n sont non nulles et donc il s'agit des sommes finies. Notons que la solution vérifie les conditions de compatibilité (4.24) et elle est infiniement dérivable.
Comme pour l'exemple 1 , le généralité de l'approche serait augmentée d'une manière importante dès que l'on puisse traiter des sommes infinies.

Quand peut-on utiliser la méthode ?

A travers les exemples ci-dessus, on peut comprendre le cadre dans lequel cette approche est utile.

1. L'équation aux dérivées partielles doit être linéaire et homogène. C'est une somme d'opérateurs différentiels portant sur les variables séparément.
2. Le domaine dans lequel on cherche la solution de l'équation aux dérivées partielles doit être un produit d'intervalles.
3. Sauf pour une des variables, les conditions imposées sur le bord du domaine doivent ètre linéaires et homogène. Parfois on peut se ramèner à cette situation par un travail préparatoire.

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire III

Exemple 4.2

Considérons le problème,

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= c\partial_x^2 u(x,t) \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } t > 0 \\ u(0,t) &= a \ \text{ et } \ \partial_x u(L,t) = b \text{ pour } t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x) \text{ pour } 0 < x < L \end{aligned}$$

ou' $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}$ sont donnés. Ce problème n'a pas la propriété(3). Or, il suffit de chercher u sous la forme $u = v + w$ ou' $v(x) = a + bx$ pour $0 \leqslant x \leqslant L$ et w est une solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_t w(x,t) &= c\partial_x^2 w(x,t) \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } t > 0 \\ w(0,t) &= 0 \ \text{ et } \ \partial_x w(L,t) = 0 \text{ pour } t > 0 \\ u(x,0) &= \varphi(x) - v(x) \text{ pour } 0 < x < L \end{aligned}$$

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire IV

Exemple 4.3

Considérons le problème,

$$\Delta u(x,y) = 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K \tag{4.26}$$

$$u(0,y) = \varepsilon(y) \;\text{ et }\; u(L,y) = \eta(y) \text{ pour } 0 < y < K \tag{4.27}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \text{ et } u(x,K) = \psi(x) \text{ pour } 0 < x < L \tag{4.28}$$

ou' les fonctions $\varphi, \psi : [0, L] \to \mathbb{R}$ et $\varepsilon, \eta : [0, K] \to \mathbb{R}$ sont données. e

Encore une fois ce problème n'a pas la propriété(3), mais il suffit de chercher u sous la forme $u = v + w$ ou' v est une solution du problème

$$\Delta v(x,y) = 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K \tag{4.29}$$

$$v(0,y) = v(L,y) = 0 \text{ pour } 0 < y < K \tag{4.30}$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \text{ et } v(x,K) = \psi(x) \text{ pour } 0 < x < L \tag{4.31}$$

Équation de Laplace homogènes dans une région rectangulaire V

et w est une solution du problème

$$\Delta w(x,y) = 0 \text{ pour } 0 < x < L \text{ et } 0 < y < K \tag{4.32}$$

$$w(0,y) = \varepsilon(y) \;\text{ et }\; w(L,y) = \eta(y) \text{ pour } 0 < y < K \tag{4.33}$$

$$u(x,0) = 0 \;\text{ et }\; u(x,K) = 0 \text{ pour } 0 < x < L \tag{4.34}$$

Les problémes pour v et w ont les propriétés (1) à (3) et peuvent être traiter comme l'exemple 2. Parfois la propriété (2) peut être récupérée par un changement de variabl

Section 5

Conclusion

Conclusion

La méthode de séparation des variables constitue un outil fondamental pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires, notamment dans des contextes physiques classiques tels que la chaleur, les ondes ou l'électrostatique.

Ce test a permis de :

1. Identifier les types d'équations pouvant être résolues par séparation,
2. Appliquer la méthode à des cas concrets en respectant les conditions aux limites,
3. Justifier les étapes de séparation en ramenant une EDP à deux EDO, et analyser les formes générales de solutions obtenues.
4. Une bonne maîtrise de cette méthode prépare l'étudiant à aborder les séries de Fourier, les problèmes spectraux, ainsi que les modèles physiques décrits par des EDP avec des conditions variées.

Section 6

Exercices

Exercices I

Exercice 1 :

Résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 17\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi, t > 0,$$

avec les conditions aux limites

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \ t \geq 0,$$

et les conditions initiales

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, ; 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, ; \frac{\pi}{2} < x < \pi, t > 0. \end{cases}$$

Exercice 02 :

1. En utilisant la méthode de séparation des variables, trouvez une solution (formelle) au problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < L, t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \qquad t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

décrivant le dégagement de chaleur d'un tige unidimensionnel isolé (problème de Neumann).

2. Résoudre l'équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = 12\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi, t > 0$, sous réserve du conditions limites et initiales

$$\begin{aligned} &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \ t \geq 0, \\ &u(x,0) = 1 + \sin^3(x) \end{aligned}$$

3. Trouve $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ pour tout $0 < x < \pi$, et explique l'interprétation physique de ce résultat.

Exercices III

Exercice 03 :

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + hu, \ 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, , , t \geq 0, \\ u(x,0) = x\left(\pi - x\right), \ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

où h est une constante réelle.

1. Résoudre le problème en utilisant la méthode de séparations des variables.
2. $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ existe-t-elle pour tout $0 < x < \pi$? Distinguer les cas suivants :

$$\text{(i)} h < 1, \text{(ii)} h = 1, \text{(iii)} \ h > 1.$$

Exercices IV

Exercice 04 :

1. Résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < L, t > 0, \\ u(0,t) = u_x(L,t) = 0, \; t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

2. Chercher la solution de problème dans les cas suivants :
$f(x) = \sin^3\left(\frac{5\pi}{2L}x\right)$; $f(x) = 1 - \cos\left(\frac{5\pi}{2L}x\right)$.

Exercice 5 :

Résoudre le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, \quad 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, \; t \geq 0, \\ u(x,0) = x\,(2-x)\,, \; 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Exercice 6 :

1. En utilisant la méthode de séparation des variables, trouvez une solution (formelle) au problème de chaleur périodique suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u, , , 0 < x < 2\pi, t > 0, \\ u(0,t) = u(2\pi,t), u_x(0,t) = u_x(2\pi,t), \ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \ 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

   où f est une fonction périodique. Ce système décrit l'évolution de la chaleur sur une fil isolé circulaire de longueur 2π.

2. Trouver $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ pour tout $0 < x < 2\pi$, et explique l'interprétation physique de ce résultat.

Solutions des exercices(Chapitre 4) :Exercice 01

1. D'aprés le résultat du cours dans le cas des conditions aux limites du type Dérichlet avec $k = 17$ et $L = \pi$, la solution est donnée par la formule suivante

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{-17n^2 t}$$

où

$$\delta_n = \frac{4}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{4}{\pi n}[-\cos nx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{4}{\pi n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)$$
$$= \frac{4}{\pi n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)$$

d'où

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right) \sin(nx) e^{-17n^2 t}$$

Solution d'exercice 2

1. D'aprés le résultat du cours dans le cas des conditions aux limites du type Neumann avec $k = 17$ et $L = \pi$, la solution est donnée par la formule suivante

$$u(x,t) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

où

$$\delta_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx, n \geq 1$$

et

$$\frac{\delta_0}{2} = \frac{\int_0^L f(x) dx}{L}$$

Exercices VIII

2

$$\delta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1+\sin^3 x\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\sin 3x + 3\sin x)\cos(nx)dx$$

Pour calculer cette intégrale, voir la section (Rappel sur les séries de Fourier).

3 Si f est continue, la fonction u est une solution classique de l'équation pour tout $t > 0$. La décroissance exponentielle implique que pour chaque $\varepsilon > 0$ la série et toutes ses dérivées convergent uniformément pour tout $t > \varepsilon > 0$. Pour la même raison, la série (sans $\frac{\delta_0}{a}$) converge uniformément vers zéro (en fonction de x). Donc

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{\delta_0}{2}.$$

solution d'exercice 3 :

1-On pose

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

où X et T sont des fonctions des variables x et t, respectivement. Par Differrenciations, on obtient

$$XT_t = kX_{xx}T + hX(x)T(t)$$

On peut la réécrire sous la forme

$$\frac{T_t}{T} - h = k\frac{X_{xx}}{X}$$

Ceci implique que

$$\frac{1}{k}\left(\frac{T_t}{T} - h\right) = k\frac{X_{xx}}{X} = -\lambda$$

Cette dernière équation conduit au système d'EDOs suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx} + \lambda X = 0, 0 < x < L, X(0) = X(L) = 0 \\ \frac{dT}{T} = -k\lambda + h \end{cases}$$

D'après les résultats du cours, on obtient

$$X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x/L), \lambda_n = (n\pi/L)^2$$

La solution générale du seconde équation est donnée par

$$T(t) = \gamma_n e^{\left[-k(n\pi/L)^2+h\right]t}, n \in \mathbb{N}^*$$

On a ainsi obtenu la suite suivante des solutions séparées

$$u_n(x,t) = \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{\left(-k(n\pi/L)^2+h\right)t}, n \in \mathbb{N}^*$$

Le principe de superposition généralisée dans le cas $k = 1$ et $L = \pi$ implique que la solution est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(nx) e^{\left(-n^2+h\right)t}$$

où

$$\delta_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)dx = \frac{4\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^3}, n \geq 1$$

2. La limite $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ existe si et seulement si $h \leq 1$. Lorsque $h < 1$ la série converge uniformément vers 0 . Si $h = 1$, la série converge vers $\delta_1 \sin x$.

solution d'exercice 5 :

On raisonne comme dans l'exercice précedent, mais cette fois-ci avec des conditions aux limites mixtes. La solution s'écrit

$$u(x,t) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos(n\pi x/L) e^{\left[-(n\pi)^2+1\right]t}$$

où pour $n \geq 1$

Exercices XII

$$\begin{aligned}\delta_n &= 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)dx = 2\int_0^1 x(2-x)\cos(n\pi x)dx\\ &= 2\left[\frac{x(2-x)}{n\pi}\sin(n\pi x)\right]_0^1 - \frac{4}{n\pi}\int_0^1 (1-x)\sin(n\pi x)dx\\ &= -\frac{4}{n\pi}\left[-\frac{(1-x)}{n\pi}\cos(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{4}{(n\pi)^2}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx\\ &= -\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2} + \frac{4}{(n\pi)^3}[\sin(n\pi x)]_0^1 = -\frac{4(-1)^n}{(n\pi)^2}\end{aligned}$$

et

$$\delta_0 = 2\int_0^1 f(x)dx = 2\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Alors

$$u(x,t) = \frac{2}{3} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x/L)e^{[-(n\pi)^2+1]t}$$

References I

- BADDARI K, ABBASSOV A. *"Equations de la physique mathématique appliquées"*. **OPU** ; 2009
- COURANT R, HILBERT D., *"Methods of mathematical physics",* ; **Wiley -V C H** ,édition de 1989. .
- Eriksson K, Estep D, Hansbo P, Johnson C. Computational Differential Equations. Cambridge University Press, New York, 1990
- Reinhard H. Équations aux dérivées partielles. Dunod, paris, 2001.
- Schwartz L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, Paris, 1983.
- Walter A. Strauss. Partial Difierential Equations : An Introduction. Wiley, 1992

Many thanks for your attention.