

Équations de la physique mathématique



Dr. Chabane Farid

Khemis Miliana Unieversity

Matre and Computer science
Faculty

Mathematical Department

Email : *f.chabane@univ-
dbkm.dz*

5.0

10 Mars 2025

Table des matières

Objectifs	3
Introduction	4
I - Chapitre 03 : Équations aux dérivées partielles du second ordre	5
1. Classification des équations	5
2. Réduction à la forme standard	7
3. Problème de Cauchy	13
4. Exercice : Travaux dirigés (TD)	16
II - Test d'auto-évaluation de chapitre 3	18
1. Exercice : La nature des EDPs	18
2. Exercice :	18
3. Exercice :	19
4. Exercice : Problème de Cauchy (corde vibrante°	19
Solutions des exercices	20
Abréviations	22
Bibliographie	23

Objectifs

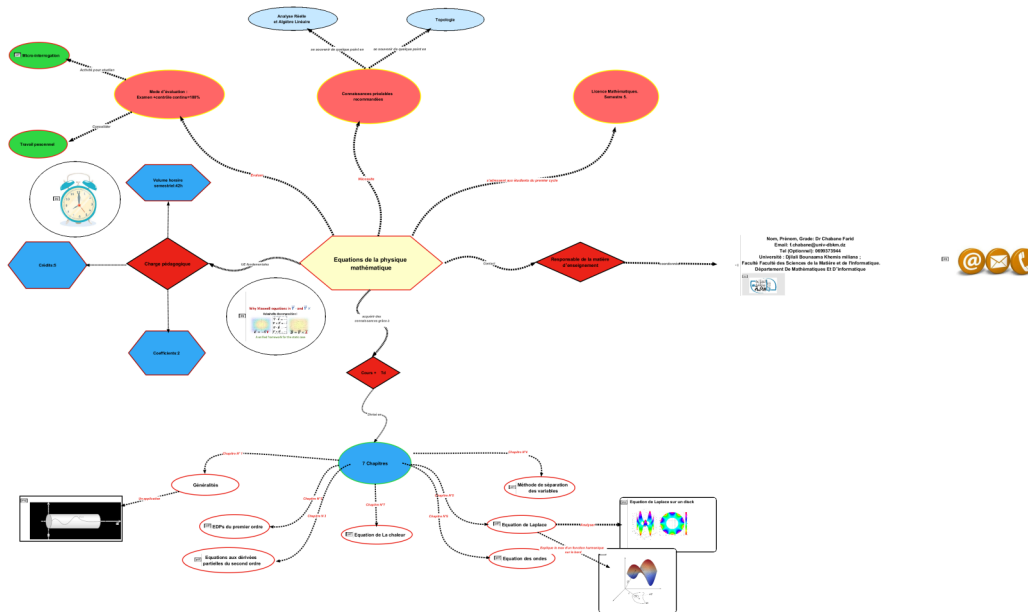
Ce chapitre a pour objectif de développer une analyse rigoureuse des équations aux dérivées partielles (EDP) du second ordre.

Il s'articule autour des axes suivants :

- La classification des EDP linéaires du second ordre selon leur nature (elliptique, parabolique, hyperbolique),
- L'identification et l'analyse des caractéristiques associées à chaque type d'équation.
- La réduction des EDP à leurs formes standards à l'aide de changements de variables adaptés.
- Et une étude approfondie du problème de Cauchy dans le cas des équations linéaires, mettant l'accent sur les conditions d'existence et d'unicité des solutions.

L'approche adoptée combine des outils théoriques fondamentaux et des techniques analytiques classiques, en vue d'une compréhension approfondie des comportements typiques des solutions selon la nature de l'équation.

Introduction



Carte Conceptuelle de Cour d'équation de la physique mathématiques

Il existe une infinité d'équations aux dérivées partielles, mais il n'existe pas une méthode universelle pour résoudre toutes celles-ci. Beaucoup de domaines sont fortement dépendants de la théorie des EDPs : l'aérodynamique, la dynamique des fluides, l'électrodynamique, la géophysique, la mécanique.

Ce cours est organisé en sept chapitres principaux. Dans le premier chapitre, on a rappelé les notions de base et apporté des définitions concernant ce type des équations. Des exemples des **EDPs** ont été formulés en utilisant des principes physiques. Le deuxième chapitre est réservé exclusivement aux équations du premier ordre dont le contenu est divisé en deux parties. Dans la première partie, on a fait un rappel important sur les systèmes différentiels, qui sert après à comprendre la manière de résoudre les **EDPs** du premier ordre. Ensuite, on a présenté des théorèmes sur la résolution implicite des équations quasi linéaires.

Dans la seconde partie, on a introduit une méthode de la résolution de certains types des **EDPs** non linéaires. Ce chapitre est conclu par une étude complète sur le problème de Cauchy relative à une équation quasi linéaire où un théorème important a été démontré. Cette étude a été illustrée par des exemples d'existence et de non-existence.

I Chapitre03 :Équations aux dérivées partielles du second ordre

Ce chapitre est organisé en quatre sections principales. Dans la première section, nous rappelons les notions de base et présentons des définitions fondamentales relatives à ce type d'équations. Des exemples d'équations aux dérivées partielles (EDPs*) sont également formulés à partir de principes physiques. La deuxième section est consacrée à la classification des équations. Dans la troisième section, nous abordons la réduction des équations à une forme standard et démontrons que le type de l'équation est préservé. Enfin, la dernière section traite de l'étude du problème de Cauchy.

Mots clés: *Classification des équations; La méthode des caractéristique; Réduction à la forme standard; Changement de variables; Problème de Cauchy...*

1. Classification des équations

🔗 Définition : *Équations aux dérivées partielles du second ordre*

La forme générale d'une EDP d'ordre 2 et de dimension 2 est:

$$F(x_1, x_2, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \partial_{x_1}^2 u, \partial_{x_2}^2 u, \partial_{x_1 x_2}^2 u, \partial_{x_2 x_1}^2 u) = 0 \quad (1)$$

Ou' $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$; la fonction $u(x, y)$ est continue dans un domaine $D \in \mathbb{R}^2$, ainsi que ses dérivées.

En transformant cette équation en identité, elle s'appelle la solution régulière ou classique de cette équation.

💡 Fondamental : *Classification des équations semi-linéaire :*

On appelle équation aux dérivées partielles semi-linéaire du second ordre, d'inconnue u sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , une équation de la forme :

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right); \quad (\varepsilon)$$

où a, b, c sont des fonctions données, et F une fonction définie dans un ouvert de \mathbb{R}^2 .

⊕ Complément

La classification des EDPs* du second ordre est issue de la classification de l'équation quadratique des sections coniques en géométrie analytique. L'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

représente l'hyperbole, la parabole ou l'ellipse selon le signe de $b^2 - 4ac$ (positif, nul ou négatif). Alors, La classification de l'équation (\mathcal{E}) dépend des coefficients $a(x, y)$, $b(x, y)$ et $c(x, y)$ en un point donné (x, y) .

🔗 Remarque

Suite aux Définition précédant avant la matrice A est définie sous cette forme: partie principal (avec u différentiable

deux fois, $\frac{\partial^2 u}{\partial xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial yx}$):

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a(x, y) & b(x, y) \\ b(x, y) & 2c(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Classification fondée sur sesV.p* (λ_i , réelles, car A est symétrique), alors le polynôme caractéristique de cette matrice :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2(a + c)\lambda + 4ac - b^2$$

donc il y a deux valeur propre λ_1 et λ_2 avec :

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = \frac{4ac - b^2}{1} \quad \text{et} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a + c$$

indépendant de système de coordonnées.

Conséquemment, on donne la définition suivante.

🔍 Définition

Soit $\Delta(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y)$, on a les cas suivants

1. Si $\Delta(x, y) > 0$, l'équation est dite hyperbolique $\implies \lambda_1 \times \lambda_2 < 0$.
2. Si $\Delta(x, y) = 0$, l'équation est dite parabolique $\implies \lambda_1 = 0$ or $\lambda_2 = 0$.
3. Si $\Delta(x, y) < 0$, l'équation est dite elliptique $\implies \lambda_1 \times \lambda_2 > 0$.

🕒 Exemple

L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

est une équation hyperbolique sur le domaine $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Exemple

Pour l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x + y)$$

Si $x = 0$ ou $y = 0$, Δ s'annule. Alors sur le domaine $\{(x, y) \mid x \neq 0, y \neq 0\}$ cette EDP est parabolique et elliptique sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Pour transformer l'équation (E) en une forme canonique, on a besoin de faire un changement de variables indépendantes.

Quelques équations du second ordre de la physique mathématique

1. **Équation des ondes** : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$, où $u(x, y, z, t)$ est utilisé pour modéliser de petites oscillations, elle joue un grand rôle dans la dynamique des fluides et dans l'électromagnétisme.
2. Équation de la chaleur $\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u$, où $u(x, y, z, t)$ est utilisée dans l'étude de la conduction thermique.
3. Équation de Laplace ou du potentiel $\Delta u = 0$, où $u(x, y, z, t)$, apparaît notamment dans: astronomie, électrostatique, mécanique des fluides et la mécanique quantique.

2. Réduction à la forme standard

Fondamental : Changement de variables

On considère le changement de variables $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ supposé deux fois continûment différentiable et tel que le Jacobien J ne s'annule pas, alors il existe des fonctions a' , b' , c' et F' telles que

$$a'(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + b'(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c'(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F' \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \quad (\mathcal{E}')$$

où

$$\begin{aligned} a' &= a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + b \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ b' &= 2a \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + b \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \right] + 2c \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right), \\ c' &= a \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + c \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \end{aligned}$$

La première finalité de cette transformation (\mathcal{E}') est souvent de préserver la nature de l'équation (elliptique, hyperbolique, parabolique). De plus, on a

$$\Delta'(\xi, \eta) = b'^2(\xi, \eta) - 4a'(\xi, \eta)c'(\xi, \eta) = J^2 \Delta(x, y).$$

Complément

L'équation exprimée dans le nouveau système de coordonnées (ξ, η) poursuit deux objectifs fondamentaux :

1. **Préserver la nature de l'équation initiale** (elliptique, hyperbolique ou parabolique), grâce à la relation :

$$\Delta'(\xi, \eta) = b'^2(\xi, \eta) - 4a'(\xi, \eta)c'(\xi, \eta) = J^2 \Delta(x, y),$$
 où $\Delta(x, y) = b^2 - 4aC$ est le discriminant de l'équation initiale, et $\Delta'(\xi, \eta)$ celui de l'équation transformée. Comme $J^2 > 0$, le signe du discriminant est conservé, ce qui garantit l'invariance du type de l'équation.

2. **Faciliter la réduction de l'équation à une forme canonique**, propre à chaque type d'EDP, afin de permettre l'utilisation de méthodes analytiques classiques telles que :

- séparation des variables,
- les séries de Fourier,
- les transformées de Fourier ou de Laplace.

Cette simplification rend l'analyse qualitative et la résolution de l'équation plus accessibles comme le montre dans le tableau suivante :

Situation	Nom d'équation
Changement de variables appliqué, sans simplification supplémentaire	Équation transformée
Changement de variables suivi d'une simplification partielle (par exemple, élimination du terme mixte)	Équation réduite ou forme simplifiée
Changement de variables suivi d'une simplification complète adaptée au type de l'EDP (elliptique, hyperbolique, parabolique)	Forme canonique (ou forme standard, ou forme normale)

Tableau : Nomenclature de l'équation après changement de variables

Forme standard ou canonique :

L'écriture d'une EDP du second ordre sous la forme canonique permet de la mettre sous une forme plus simple. Elle consiste d'éliminer certaines dérivées secondes. Cette procédure va aider à chercher des solutions comme l'équation des ondes (voir chapitre 6). La forme canonique d'une EDP du second ordre dépend du type de l'équation. Pour cela on a besoin d'introduire la notion d'une courbe caractéristique associée à l'équation \mathcal{E} .

🔗 Définition : Les caractéristique de l'équation de second ordre :

Une caractéristique de l'équation (\mathcal{E}) est la courbe satisfaisant à l'équation différentielle

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - b \frac{dy}{dx} + c = 0 \quad (1)$$

💡 Fondamental

Dans ce qui suit, on traite chaque cas indépendamment en donnant la forme correspondante.

- **1^{er} Cas hyperbolique:**

Soit (\mathcal{E}_h) une équation de type hyperbolique. On sait que dans ce cas $b^2 - 4ac > 0$ et par conséquent l'équation (1) admet deux solutions séparées. Donc, il existe deux courbes caractéristiques réelles des équations $\psi_1(x, y) = c_1$ et $\psi_2(x, y) = c_2$ pour l'équation (1).

⊕ Complément : Théorème 1 (cas hyperbolique) :

Les équations des courbes caractéristiques sont données par

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En posant $\xi = \psi_1(x, y)$ et $\eta = \psi_2(x, y)$ où $\psi_i, i = 1, 2$, la forme canonique de (\mathcal{E}_H) s'écrit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = G\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

Pour la preuve de cette **théorème**, on cherche des coordonnées (ξ, η) tels que $a' = 0$ ou $c' = 0$. Les expressions de a' et c' sont de la même forme

$$a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

Par factorisation, on obtient

$$\frac{1}{a} \left[a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \right] \left[a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \right] = 0. \text{ sous hypothèse que } a \neq 0, \text{ sinon } c \neq 0.$$

🕒 Exemple

Considérons l'équation suivante :

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

$\Delta(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y) = 4x^2y^2$. Donc si $x = 0$ ou $y = 0$, cette EDP est parabolique au point (x, y) , sinon elle est hyperbolique au point (x, y) . Considérons un domaine D pour lequel l'EDP est hyperbolique à tous ses points. A ces points, les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{4x^2y^2}}{2y^2} = \pm \frac{x}{y}$$

En utilisant la méthode de séparation de variables, on obtient: $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C_1$ et $\frac{1}{2}(x^2 - y^2) = C_2$. C_1 et C_2 sont des constantes. Les courbes caractéristiques sont

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = x^2 + y^2, \\ \varphi_2(x, y) = x^2 - y^2. \end{cases}$$

On pose

$$\begin{cases} \xi = x^2 + y^2, \\ \eta = x^2 - y^2. \end{cases}$$

et $u(x, y) = v(\xi, \eta)$. En utilisant ce changement de coordonnées, on obtient

$$\begin{cases} x^2 = \eta - \xi, \\ y^2 = \xi + \eta \end{cases}$$

⊕ Complément

ce qui implique après simplification

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

C'est la forme canonique de l'EDP aux points pour lesquels celle-ci est hyperbolique.

- 2^{ème} Cas parabolique

Soit (\mathcal{E}_p) une équation parabolique. On sait que dans ce cas $b^2 - 4ac = 0$ et par conséquent l'équation (1) admet deux solutions confondues. Donc, il existe une seule courbe caractéristique réelle d'équation $\psi_1(x, y) = c_1$ pour l'équation 1.

🔗 Fondamental : Théorème 02(cas parabolique)

L'équation de la courbe caractéristique est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}$$

En posant

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y), \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

où φ_2 satisfait $J(\xi, \eta) \neq 0$, la forme canonique de (\mathcal{E}_p) s'écrit

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = G\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

🗨 Conseil

Dans ce cas, il faut trouver deux fonctions $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x, y)$ telles que $b'(\xi, \eta) = c'(\xi, \eta) = 0$ pour tout $(x, y) \in D$. Il suffit de rendre $c' = 0$, ceci implique que

$$a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + b\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{a}\left[a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\right]^2 = 0$$

Il en résulte que η est une solution de l'équation linéaire du premier ordre

$$a\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{b}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = 0$$

Par conséquent, la solution η est constante sur chaque caractéristique, c'est-à-dire sur une courbe qui est une solution de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}$$

En trouvant la solution de cette équation, on a la première courbe caractéristique $\varphi_2(x, y) = C^{cte}$. Pour choisir φ_1 , il suffit seulement de prendre en considération la contrainte sur la seconde variable indépendante, est que le $J(\xi, \eta) \neq 0$ en D .

🔗 Exemple : sur une équation parabolique

L'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

est parabolique sur \mathbb{R}^2 .

⊕ Complément : Solution

L'équation des caractéristiques est donnée par

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

dont la solution est $3x - y = C$. La première courbe caractéristique est $\varphi_1(x, y) = 3x - y$. On pose donc $\xi = 3x - y$. Pour obtenir une seconde coordonnée caractéristique η , on a beaucoup de choix. Pour cet exemple, on prendra $\eta(x, y) = x$. Cette fonction a bien des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues et

$$J = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

pour tout point de \mathbb{R}^2 . En utilisant ce changement de coordonnées

$$\begin{cases} \xi = 3x - y, \\ \eta = x \end{cases}$$

et on pose $u(x, y) = v(\xi, \eta)$, on obtient

$$\begin{cases} x = \eta, \\ y = 3\eta - \xi. \end{cases}$$

En utilisant la règle de chaîne, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 9 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = -3 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

et finalement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 5 \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}.$$

3^{ème} cas Équation elliptique:

Soit (\mathcal{E}_e) une équation elliptique. On sait que dans ce cas $b^2 - 4ac < 0$ et par conséquent l'équation (1) admet deux solutions complexes. Donc, les courbes caractéristiques sont définies à partir des parties réelle et imaginaire des solutions.

⊕ Complément : Théorème 03 :

Soit φ une solution de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La forme canonique de (\mathcal{E}_e) s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = G\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

où (ξ, η) sont données par

$$\begin{cases} \xi = \operatorname{Re} \varphi \\ \eta = \operatorname{Im} \varphi. \end{cases}$$

Exemple

Considérons l'équation de Tricomi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, x > 0.$$

Complément

Soit $a(x, y) = -4x$, $b(x, y) = 4x^2$, $c(x, y) = 4x$. Comme $x > 0$, cette EDP est elliptique sur le domaine D . A ces points, les équations caractéristiques sont

\$\$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{x}$$

\$\$

En utilisant la méthode de séparation de variables, on obtient $\frac{3}{2}y \pm ix\sqrt{2} = C$ où C est une constante complexe. On pose

$$\begin{cases} \xi = \frac{3}{2}y, \\ \eta = -x\sqrt{2}. \end{cases}$$

et $u(x, y) = v(\xi, \eta)$. En utilisant la règle de chaîne, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{3}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) = \frac{9}{4} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{9}{4}x \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{3}{4}x \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{9}{4}x \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \\ &= \frac{9}{4} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned}$$

La forme canonique de l'équation de Tricomi est

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{3\eta} \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

Fondamental

La vidéo suivante explique et donne des exercices autour des équations aux dérivées partielles les plus célèbres et comment l'extraire.

[cf. Formes standard]

3. Problème de Cauchy

Rappel

Soit f une fonction d'une seule variable et (γ) la courbe définie par l'équation $y = f(x)$. Posons $F(x, y) = f(x) - y$. Alors, le vecteur $\vec{n} = \nabla F(x_0, f(x_0)) = (f'(x_0), -1)$ est perpendiculaire à (γ) en $(x_0, f(x_0))$.

Définition

Le problème de Cauchy relatif à une courbe (γ) régulière consiste à chercher (si elle existe) la solution de l'équation

$$a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

qui vérifie

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ sur } (\gamma)$$

et

$$\frac{du}{dn}(x, y) = h(x, y) \text{ sur } (\gamma).$$

où $\frac{du}{dn}$ désigne la dérivée normal et f et g sont des fonctions de classe C^1 et C^2 sur γ , respectivement.

Rappel

1- Soit $\gamma : t \mapsto (x = \varphi(t), y = \psi(t))$ une courbe de \mathbb{R}^2 dont tout point est régulier c'est à dire tel que $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 > 0$. On cherche une solution de Pb* de cauchy qui vérifie des conditions supplémentaires sur la

courbe γ : On suppose connue la valeur de u sur γ ainsi que celle de ses dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

a) Soient $x(t), y(t)$ les coordonnées du point $M(t)$ parcourant la courbe $\gamma(t)$. On appelle abscisse curviligne une primitive de $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$; c'est une fonction s telle que $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$.

b) Soit

$$\vec{T} = \frac{dx}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dy}{ds} \vec{e}_2 = \frac{dt}{ds} \left[\frac{dx}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dy}{dt} \vec{e}_2 \right]$$

avec $\|\vec{T}\| = 1$. Le vecteur \vec{T} est tangent à la courbe γ , de plus le vecteur normal $\vec{N} = -\frac{dy}{ds} \vec{e}_1 + \frac{dx}{ds} \vec{e}_2$. N s'obtient à partir du vecteur tangent \vec{T} par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

c) On appelle dérivée normale la grandeur $\frac{du}{dn} = \langle \text{grad}(u), \vec{N} \rangle$

2. φ une fonction de classe

$$C^1, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\varphi(\mathbf{M} + h\vec{N}) - \varphi(\mathbf{M})] = \frac{d}{dn}(\varphi(\mathbf{M}))$$

On pose maintenant

$$H(t) = u[\varphi(t), \psi(t)]$$

$$U(t) = \frac{\partial u}{\partial x}[\varphi(t), \psi(t)]$$

$$V(t) = \frac{\partial u}{\partial y}[\varphi(t), \psi(t)]$$

$$W(t) = \frac{du}{dn}[\varphi(t), \psi(t)]$$

nous avons alors:

$$\frac{du}{dn}(\varphi(t), \psi(t)) = -\frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t), \psi(t)) \frac{d\psi}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}(\varphi(t), \psi(t)) \frac{d\varphi}{ds} = \langle \text{grad } u, \vec{N} \rangle$$

Done

$$W(t) = -U(t) \frac{d\psi}{ds} + V(t) \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\frac{dH}{dt} = U(t) \frac{d\varphi}{ds} + V(t) \frac{d\psi}{ds}$$

Remarque : L'idée de l'étude

1. Si on connaît U, V et H on connaît W et H , réciproquement si on connaît W et H on connaît U et V car tout point de γ est régulier $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 > 0$).
2. Si on suppose H, U, V connues, c'est à dire $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ sur γ . Si u est complètement déterminée, ses dérivées secondes doivent être déterminés sur γ .

Méthode

En dérivant le système précédent on a :

$$\begin{cases} U'(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \\ V'(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) \\ F(\varphi(t), \psi(t), H(t), U(t), V(t)) = a(\varphi(t), \psi(t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\varphi(t), \psi(t)) + \\ b(\varphi(t), \psi(t)) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(\varphi(t), \psi(t)) + c(\varphi(t), \psi(t)) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\varphi(t), \psi(t)). \end{cases}$$

Le déterminant Δ est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) & 0 \\ 0 & \varphi(t) & \psi(t) \\ a(\varphi(t), \psi(t)) & b(\varphi(t), \psi(t)) & c(\varphi(t), \psi(t)) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \mathbf{c}[\varphi'(t)]^2 - \mathbf{b}\varphi'(t)\psi'(t) + \mathbf{a}[\psi'(t)]^2$$

En résumé si $\Delta \neq 0$ les dérivées secondes sur γ sont déterminées de façon unique. Si $\Delta = 0$ le système précédent a soit aucune, soit une infinité de solutions.

🔍 Définition : Résolution des EDP simples

1. Les courbes caractéristiques sont les courbes γ qui annulent $\Delta(t)$:

$$\Delta(t) = c(\varphi(t), \psi(t)) [\psi'(t)]^2 - 2b(\varphi(t), \psi(t)) [\varphi'(t)\psi'(t)] + a(\varphi(t), \psi(t)) [\psi'(t)]^2.$$

2. On dit que γ n'est caractéristique en aucun point si $\forall t \Delta(t) \neq 0$.

💡 Fondamental : Théorème

Si la courbe (γ) n'est pas caractéristique, le problème de Cauchy admet une solution unique.

4. Exercice : Travaux dirigés (TD)

[solution n°1 p.20]

Exercice : 01

Classer l'équation suivante :

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

- Équation elliptique
- Équation parabolique
- Équation hyperbolique

Exercice : 02

Classer l'équation suivante :

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

- Équation elliptique
- Équation hyperbolique dans tout \mathbf{R}^2
- Type dépend du point (x, y)

Exercice : 03

En général, la réduction d'une EDPs* linéaire du second ordre à une forme canonique est :

- Toujours globale
- valable dans une région ou un domaine spécifique des variables indépendantes
- Impossible sans conditions supplémentaires

Exercice : 04

La réduction canonique d'une EDP elliptique à la forme $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = f$ est valide :

- Sur tout le domaine Ω
- Pour toute équation elliptique
- Localement autour d'un point régulier

Exercice : 05

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

- Vérifier que cette équation est parabolique sur \mathbf{R}^2 .
- Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation.

- Effectuer le changement de coordonnées correspondant afin d'obtenir la forme canonique correspondante.
- Trouver la solution générale de cette équation dans le domaine \mathbb{R}^2 : $u(0; y) = f(y)$; $u_x(0, y) = g(y)$;

où f et g sont des fonctions données.

Exercice : 06

Quelle condition permettrait une réduction globale ?

- Coefficients constants
- Discriminant constant
- Équation parabolique uniquement

Exercice : 07

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

La nature (hyperbolique, elliptique...) d'une EDP est conservée sous un changement de variables régulier.

Le discriminant $\Delta' = J^2 \Delta$ permet de conclure sur la conservation du type.

toute EDP peut être globalement réduite à une forme canonique.

La réduction locale est inutile si l'équation est linéaire.

* *

*

- Dans ce chapitre, nous avons appris à reconnaître les types d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 linéaire (Elliptique, parabolique, hyperbolique), ce qui est essentiel pour choisir les méthodes de résolution adaptées.
- Les équations de la physique (chaleur, ondes, Laplace) en sont des exemples importants, décrivant des phénomènes réels. Parmi les méthodes, les approches directes comme le changement de variables et les courbes caractéristiques simplifient ces équations tout en gardant leur lien avec la réalité physique.
- Le chapitre suivant présentera la méthode de séparation des variables pour donner une solution analytique sous certaines conditions imposées.

II Test d'auto-évaluation de chapitre 3

1. Exercice : La nature des EDPs

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Question 1

Déterminer le domaine D où cette équation est parabolique.

Question 2

Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation sur D .

Question 3

Effectuer le changement de coordonnées en basant sur (2) pour obtenir la forme canonique correspondante.

Question 4

Trouver la solution générale de cette équation dans le domaine D

2. Exercice :

Réduction des équations aux dérivées partielles

Considérons l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + [1 - a(y)] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

où

$$a(y) = \begin{cases} -1, & y < -1 \\ 0, & |y| \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$$

1. Trouver le domaine où cette EDP est hyperbolique, parabolique et elliptique.
2. Pour chaque domaine, trouver la forme canonique correspondante.

3. Exercice :

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

1. Trouver le domaine où cette EDP est hyperbolique et elliptique.
2. Pour chaque domaine, trouver la forme canonique correspondante.

4. Exercice : Problème de Cauchy (corde vibrante °

Donner la forme d'une corde vibrante au moment $t = \frac{\pi}{2a}$ si son mouvement est défini par l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \text{ et par les conditions initiales :}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} & = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x, t)|_{t=0} & = \sin x \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, t)|_{t=0} & = 1 \end{cases}$$

Solutions des exercices

> Solution n° 1

Exercice p. 16

Exercice : 01

Classer l'équation suivante :

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

- Équation elliptique
- Équation parabolique
- Équation hyperbolique

La valeur du discriminant est

$$\Delta = 2 \times 2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0, \text{ donc l'équation est parabolique.}$$

Exercice : 02

Classer l'équation suivante :

$$x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

- Équation elliptique
- Équation hyperbolique dans tout \mathbf{R}^2
- Type dépend du point (x, y)

Discriminant

$$\Delta = 0^2 - 4x^2(-y^2) = 4x^2y^2 > 0, \text{ si } x, y \neq 0$$

, donc type variable selon les points.

Exercice : 03

En général, la réduction d'une EDPs* linéaire du second ordre à une forme canonique est :

- Toujours globale
- valable dans une région ou un domaine spécifique des variables indépendantes
- Impossible sans conditions supplémentaires

Des techniques telles que la méthode des caractéristiques, la séparation des variables et l'analyse de symétrie de Lie peuvent être utilisées, et leur efficacité dépend souvent de la forme spécifique de l'EDP et de la région choisie.

Exercice : 04

La réduction canonique d'une EDP elliptique à la forme $u_{\xi\xi} + u\eta\eta = f$ est valide :

- Sur tout le domaine Ω
- Pour toute équation elliptique
- Localement autour d'un point régulier

Exercice : 05

Pour l'EDP linéaire d'ordre 2 suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

- Vérifier que cette équation est parabolique sur \mathbb{R}^2 .
- Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation.
- Effectuer le changement de coordonnées correspondant afin d'obtenir la forme canonique correspondante.
- Trouver la solution générale de cette équation dans le domaine $\mathbb{R}^2: u(0; y) = f(y); u_x(0, y) = g(y)$;

où f et g sont des fonctions données.

Exercice : 06

Quelle condition permettrait une réduction globale ?

- Coefficients constants
- Discriminant constant
- Équation parabolique uniquement

Exercice : 07

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

- La nature (hyperbolique, elliptique...) d'une EDP est conservée sous un changement de variables régulier.
- Le discriminant $\Delta' = J^2 \Delta$ permet de conclure sur la conservation du type.
- toute EDP peut être globalement réduite à une forme canonique.
- La réduction locale est inutile si l'équation est linéaire.

Seules les deux premières affirmations sont correctes. La nature de l'équation est préservée localement par un changement de variables régulier (jacobien non nul). Mais la réduction globale n'est pas toujours possible.

Abréviations

EDO : Équation différentielle ordinaire

EDPs : Équations aux dérivées partielles

Pb : Problème

V.p : Valeurs propre

Bibliographie

Baddari K, Abbassov A. Equations de la physique mathématique appliquées. OPU ; 2009.

Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics. Wiley-V C H , édition de 1989.

Eriksson K, Estep D, Hansbo P, Johnson C. Computational Differential Equations. Cambridge University Press, New York, 1990.

Nikolenko V. Équations de la physique mathématique. UM, Moscou, 1981

Pinchover, Rubenstein J. An Introduction to Partial Differential Equations. Cambridge University Press, 2005.

Reinhard H. Équations aux dérivées partielles. Dunod, paris, 2001

Schwartz L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, Paris, 1983.

Walter A. Strauss. Partial Differential Equations: An Introduction. Wiley, 1992