Équations de la physique mathématique

Dr. Chabane Farid

Khemis Miliana Unieversity

Matre and Computer science Faculty

Mathematical Department

Email : *f.chabane@univ-dbkm.dz*

5.0

10 Mars 2025

Table des matières

Objectifs

Ce cours vise à l'étude des équations aux dérivées partielles (EDPs) pour un étudiant de licence est de lui permettre ***d'identifier*** les concepts fondamentaux, ***comprendre les méthodes analytiques et numériques*** utilisées pour leur résolution, et ***appliquer*** ces techniques à des problèmes concrets issus de la physique et des sciences de l'ingénieur.

L'étudiant doit être en mesure de formuler des problèmes sous forme d'***EDPs***, ***analyser*** l'existence et l'unicité des solutions, et ***évaluer*** l'efficacité des différentes méthodes de résolution en fonction de la nature des équations (elliptiques, paraboliques ou hyperboliques).

Ce cours l'amène également à ***synthétiser*** les connaissances acquises pour créer des modèles mathématiques adaptés à des situations réelles, renforçant ainsi ses compétences en mathématiques appliquées et en physique mathématique.

I Objectif

1. ***L'objectif principal*** de ce chapitre est ***d'analyser*** certains type des EDPs* du 1^{er} ordre et ***d'explorer*** une méthode de résolution appropriée pour ces EDPs* et étendu cette méthoude pour de résolution pour des ***problèmes aux limites***
2. ***Les objectifs spécifiques incluent :***
   - Définir les principaux concepts et termes liées à des équations aux dérivées partielles (EDPs*) du 1^{er} ordre
   - Identifier les techniques et procédures utilisées dans l'étude de certaines des équations aux dérivées partielles.
   - Construire la solution des équations dérivées partielles quasilinéaire (EDPs*) du 1^{er} ordre en utilisons la méthode caractéristique.
   - Disposer les étapes de la méthode des caractéristiques avant de commencer la résolution (calcul des courbes caractéristiques, détermination de la solutions
   - Utiliser la méthode caractéristique pour résoudre l'équation des ondes.
   - Participer activement aux discussions et aux activités en classe sur l'application des équations aux dérives partielles en physique.
   - Développer une compréhension de l'application des mathématiques et de la physique à des situations réelles.

II Chapitre 02 : EDPs du premier ordre

1. Rappel générale

Rappel : Théorème de Schwartz

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables réelles définie dans un voisinage de

A ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Si en un point de A à les dérivées successives $\partial_{xy}u$ et $\partial_{yx}u$

existent et sont continues en ce point alors ces dérivées sont égales : $\partial_{yx}u = \partial_{xy}u.$

Exemple

$z = x^2 - 5xy + y^2, \partial_{xy}z = \partial_{yx}u = -5 + 2$

Rappel : Dérivées d'une fonction composée de deux variables

Soit la fonction $F(x, y) = f(u, v)$, u et v étant des fonctions de x et y, $u(x, y)$ et

$v(x, y)$, avec $u_0 = u(x_0, y_0)$ et $v_0 = v(x_0, y_0)$.

Si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles en $(x_0;\ y_0)$ et si $f(u, v)$

admet des dérivées partielles continues au voisinage de (u_0, v_0) alors $F(x, y)$ admet

des dérivées partielles au point $(x_0, y_0$ données par:

$$\begin{cases} \partial_x F(x_0, y_0) = \partial_u f(u_0, v_0)\partial_x u(x_0, y_0) + \partial_v f(u_0, v_0)\partial_x v(x_0, y_0) \\ \partial_y F(x_0, y_0) = \partial_u f(u_0, v_0)\partial_y u(x_0, y_0) + \partial_v f(u_0, v_0)\partial_y v(x_0, y_0) \end{cases}$$

Exemple

Soit $f(u, v) = u^2 + uv + v^2$ tel que $u = 2x + y$ et $v = x - 2y$; on a

$$\begin{cases} \partial_x f(x_0, y_0) = 5u + 4v \\ \partial_y f(x_0, y_0) = -3 \end{cases}$$

Rappel : Différentielle totale

Soit une fonction de deux variables $u(x, y)$ possédant des dérivées partielles continues. La différentielle totale ou exacte $u(x, y)$ s'écrit :

$$\mathrm{d}u = \partial_x u \mathrm{d}x + \partial_y u \mathrm{d}y \qquad (2.1.1)$$

Exemple

Soit $u(x, y) = x + x^2y^3$, alors $\mathrm{d}u = (1 + 2xy^3)\mathrm{d}x + 3x^2y^2\mathrm{d}y$.

2. Intégrales premières d'un système différentiel et EDPs quasi linéaire du premier ordre

L'étude d'un systèmes diférentiels du premier ordre de n équations

Le système s'écrit sous la forme canonique

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \qquad (2.2.1)$$

où $x_1, x_2, \cdots x_n$ désignent n fonctions inconnues de la variable t. On dérive la première fonction

$(n-1)$ fois, et on remplace chaque fois $\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$ par leurs expressions issues du système \eqref{syst},

on obtient un nouveau système :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} = \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}^nx_1}{\mathrm{d}t^n} = \varphi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases} \qquad (2.22)$$

On élimine maintenant $x_1, x_2, \cdots x_n$ entre les équations de \eqref{syst}. Alors $x_1(t)$ doit vérifie l'équation

différentielle d'ordre n suivante

$$W\left(t, x_1, \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^nx_1}{\mathrm{d}t^n}\right) = 0 \qquad (2.2.3)$$

Complément

La solution ou l'intégrale générale de l'équation \eqref{eli} s'écrit

$x_1(t) = H_1(t, C_1, C_2, \cdots, C_n)$.

Où $C_1, C_2, \cdots, C_n$ sont des constantes. L'intégrale générale du système \eqref{syst} s'obtient en portant

dans les $n-1$ premières équations de \eqref{syst1} les valeurs de $x_1; \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x_1}{\mathrm{d}t^{n-1}}$ et en résolvant ces

équations en $x_2, \cdots, x_n$, sans d'effectuer aucune nouvelle intégration. On obtient alors

$$\begin{cases} x_1(t) = H_1(t, C_1, C_2, \cdots, C_n), \\ \vdots \\ x_n(t) = H_n(t, C_1, C_2, \cdots, C_n). \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

Le système \eqref{syst2} est appelé l'intégrale générale du système \eqref{syst}.

Exemple

Déterminer les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ solution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x - y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -4x + y, \end{cases} \qquad (2.2.5)$$

où t, une variable indépendante. On obtient alors

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x - y, \\ \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 5x - 2y. \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

Puis en éliminant la variable y de la deuxième équation, on se conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 3x = 0. \qquad (2.2.7)$$

D'où l'équation caractéristique : $r^2 - 2r - 3 = 0$; qui a pour racine $r = -1$ et $r = 3$.

L'intégrale générale est : $x(t) = Ae^{-t} + Be^{3t}$,

où A et B sont des constantes réelles. En portant ce résultat dans la première équation

du système \eqref{systex}, on obtient sans intégration

$y(t) = x(t) + Ae^{-t} - 3Be^{3t} = 2Ae^{-t} - 2Be^{3t}$.

Remarquons que $x(t)$ et $y(t)$ dépendent de deux constantes arbitraires, i.e

$$\begin{cases} x(t) = H_1(t, A, B), \\ y(t) = H_2(t, A, B). \end{cases} \qquad (2.2.8)$$

Fondamental : Intégrales premières d'un système différentiel

Intégrales premières d'un système différentiel

Dans cette section, on va caractériser les solutions du système différentiel en utilisant la notion de l'intégrale première. D'abord, on associe au système \eqref{syst} des conditions initiales : $x_i(t_0) = x_i^0$, pour $i = 1, \cdots, n$. La résolution du système \eqref{syst2} par rapport aux constantes C_i permet d'exprimer l'intégrale

générale sous la forme

$$\begin{cases}\Phi_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_1, \\ \vdots \\ \Phi_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) = C_n.\end{cases} \qquad (2.2.9)$$

Les fonctions Φ_i qui sont des constantes, dites intégrales premières du système \eqref{syst}.

Définition

On appelle ***intégrale première d'un système différentiel***, une fonction Φ de

classe C^1 des variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ non constante telle que pour toute solution $t \to (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ du système différentiel, la fonction $\Phi \to f(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) = C^{te}$.

Méthode

Trouver des ***intégrales premières*** pour un système différentiel n'est pas toujours facile. Cela est parfois possible grâce à la relation suivante:

Soient $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ et λ des réels vérifiant la relation suivante

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$$

Alors, pour tout couple de réels (a, b) vérifiant $a\beta + b\gamma \neq 0$

$$\frac{a\alpha + b\gamma}{a\beta + b\delta} = \frac{a\lambda\beta + b\lambda\gamma}{a\beta + b\delta} = \lambda \qquad (2.2.10)$$

Exemple

Déterminer les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ solution du système

$$\begin{cases} t\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x + 2y = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 3x - 4y = 0, \end{cases} \qquad (2.2.11)$$

puis donner les fonctions$x(t)$ et $y(t)$ solutions de ce système.

On peut réécrire le système \eqref{systex2} sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{\mathrm{d}x}{x + 2y} = \frac{\mathrm{d}y}{3x + 4y} \qquad (2.2.12)$$

On va maintenant chercher 2 intégrales premières pour le système \eqref{systex2}. La relation

\eqref{relation} permet d'écrire

où t, une variable indépendante. On obtient alors

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{(-3)\mathrm{d}x}{(-3(x + 2y)} = \frac{-2\mathrm{d}y}{(-2)(3x + 4y)} = \frac{3\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y}{(3x + 2y)} \qquad (2.2.13)$$

Complément

On tire de cette relation que

$$\mathrm{d}\left(\log(t)\right) = \mathrm{d}\left(\log(3x+2y)\right)$$

ce qui donne $\Phi_1 = \dfrac{3x+2y}{t} = C_1$.

D'où la première intégrale première du système \eqref{systex2} est obtenue. D'autre part, le

système \eqref{systca} donne

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{\mathrm{d}x}{(x+2y)} = \frac{\mathrm{d}y}{(3x+4y)} = \frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{(2x+2y)}. \qquad (2.2.14)$$

Remarquons que les fonctions $log(x(t)+2y(t))$ et $v(t) = log(t)$ ont des différentielles

proportionnelles, on a donc

$$\Phi_2 = \frac{x+y}{t^2} = C_2$$

Maintenant, si on veut chercher explicitement les expressions de $x(t)$ et $y(t)$; il suffit de considérer le système suivant

$$\begin{cases} 3x(t)+2y(t) & = C_1 t \\ x+y & = C_2 t^2. \end{cases}$$

2.1. EDPs quasi linéaire du premier ordre

Dans cette section, on s'intéresse à la résolution des EDPs du premier ordre. On va voir que

la résolution de ses équations se ramène à la résolution de son système caractéristique. Le

système caractéristique est un système différentiel dont lequel la solution s'exprime en utilisant

les intégrales premières. On s'intéresse à l'étude des équations linéaires en $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ il s'agit

des EDPs quasi linéaires du \$1^{er}\$ ordre. Au début, on s'intéresse aux EDPs quasi linéaires du

1^{er} ordre en dimension 2.

Définition

On appelle équation aux dérivées partielles quasi-linéaire du premier ordre, d'inconnue u, une équation de la forme

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \boldsymbol{a}_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \boldsymbol{a}_3(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_3} + \cdots \\ &\qquad +\boldsymbol{a}_n(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = \boldsymbol{f}(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,u). \quad (2.3.1) \end{aligned}$$

pour $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}^n$: Les coefficients $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ et le seconde membre $\boldsymbol{f}$ sont

des fonctions données.

Exemple

L'equation

$$x(y-u)\frac{\partial u}{\partial x}+y(u-x)\frac{\partial u}{\partial y}=(x-y)u$$

est quasi-linéaire du premier ordre et de dimension 2.

2.2. Construction de solutions

Définition

En dimension 2, l'équation (2.3.1) prend la forme

$$P(x,y,u)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=R(x,y,u). \qquad (\varepsilon)$$

Méthode

En géométrie, une surface $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$, a pour équation $\varphi(x,y,z)$ =Constante. Lorsqu'il existe un voisinage ou' $\varphi(x,y,z)=0$ peut être résolue en z, on est ramené, à l'équation cartésienne $z=f(x,y)$:

On interprète la solution u de \eqref{equqsi d02} comme une surface de $\mathbb{R}^3$. Analytiquement, on

cherche les solutions de \eqref{equqsi d02} sous forme implicite, il s'agit de chercher une fonction φ de classe

C^1 définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\left((x,y,z)\in\mathcal{U} \text{ et } \varphi(x,y,z)=C^{te}\right)\Leftrightarrow((x,y)\in\Omega \text{ et } z=u(x,y)) \qquad (2.3.1)$$

En appliquant le théorème des fonctions implicites, on trouve :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} \text{ et } \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}, \text{ en tout point avec } \frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0.$$

On constate alors que si u est solution de \eqref{equqsi d02}, alors φ est solution de

l'équation suivante:

$$P(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}+R(x,y,u(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \qquad (2.3.2)$$

Complément

D'un autre coté, on a

$$\boldsymbol{d}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z=0, \qquad (2.3.3)$$

Par identification de\eqref{Car1} et \eqref{Car2}, on obtient le système suivant

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)} \qquad (\mathrm{S})$$

la fonction φ est donc une intégrale première du système \eqref{SCAR}. Ce

système est appelé "système caractéristique" de l'équation aux dérivées partielles \eqref{equqsi d02}.

✎ Remarque

On convient d'écrire toujours la relation \eqref{SCAR} mémé si l'un des dénominateur est nul, dans ce cas le numérateur correspondant l'est aussi.

Définition : Fonctions indépendantes

On dit que deux fonctions u et v de classe C^1 dans un ouvert $\mathcal{G}$ de

- $\mathbb{R}$ sont fonctionnellement indépendantes si les seules fonctions différentiables $\boldsymbol{H}$ des deux variables u et v qui vérifient : $\boldsymbol{H}\,(u(x,y,z), v(x,y,z))$ est constante dans $\mathcal{G}$ sont les constantes.
- De façon analogue u, v et W de classe C^1 dans un ouvert $\mathcal{G}$ de $\mathbb{R}^3$ sont fonctionnellement indépendantes si les seules fonctions différentiables $\boldsymbol{F}$ des deux variables u et v qui vérifient : $\boldsymbol{F}\,(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ est constante dans $\mathcal{G}$ sont les constantes.

Fondamental : Théorème 1 :

- On dit que deux fonctions u et v de classe C^1 dans un ouvert $\mathcal{G}$ de$\mathbb{R}$ sont fonctionnellement indépendantes si et seulement si : Le rang du tableau

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{2.3.4}$$

est deux dans $\mathcal{G}$.

- Trois fonctions u, v et W sont fonctionnellement indépendantes dans $\mathcal{G}$ si et seulement si le rang du Jacobien

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{2.3.5}$$

est trois dans $\mathcal{G}$.

Fondamental : Théorème 02

- Soient u et v deux intégrales premières indépendantes de \eqref{SCAR}, Alors toute Intégrale première w de ce système s'exprime alors en fonction de u et v, c'est-à-dire qu'il existe F de classe C^1 telle que $w = F(u,v)$.
- \ Soit u une intégrale première de $\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q}$, toute intégrale première v de ce système s'exprime en fonction de u il existe H tel que $v = H(u)$.

Méthode : Méthode pratique

1. Pour trouver une intégrale première u de $\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q}$.

   On utilise l'égalité $\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y)}$ pour trouver A et B telles que

   - il existe u vérifiant $\mathrm{d}u = A(x,y)\mathrm{d}x + B(x,y)\mathrm{d}y$,

- $A(x,y)P(x,y) + B(x,y)Q(x,y) = 0.$

2. On procédé de façon analogue pour résoudre $\dfrac{\mathrm{d}x}{P(x,y)} = \dfrac{\mathrm{d}y}{Q(x,y)} = \dfrac{\mathrm{d}z}{R(x,y)}$ on cherche u et v indépendante telles que :
   - Il existe u vérifiant $\mathrm{d}u = A(x,y,z)\mathrm{d}x + B(x,y,z)\mathrm{d}y + C(x,y,z)\mathrm{d}z,$
   - $A(x,y,z)P(x,y,z) + B(x,y,z)Q(x,y,z) + R(x,y,z)C(x,y,z) = 0.$

Exemple

Résoudre

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} \ldots\ldots \quad S$$

On a $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{x\mathrm{d}x}{xy} = \dfrac{y\mathrm{d}y}{xy} = \dfrac{x\mathrm{d}x - y\mathrm{d}y}{0}.$

donc $x^2 - y^2$ est une intégrale première. Les solutions de (S) sont donc les courbes

$x^2 - y^2 = a$ ou' $a \in \mathbb{R}$.

Fondamental : Théorème 03

L'ensemble des solutions de l'équation \eqref{equqsi d02} est constitué des intégrales premières du système \eqref {SCAR}. En plus, si Φ_1 et Φ_2 sont une paire des intégrales premières indépendantes,

alors la solution générale de \eqref{equqsi d02} peut être écrite explicitement comme

$F\left(\Phi_1(x,y,u(x,y)), \Phi_2(x,y,u(x,y)\right) = Constante,$ où F désigne une fonction arbitraire régulière de deux variables.

Exemple

Considérons l'équation

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - (y+2u)\frac{\partial u}{\partial y} = 3y + 4u.$$

Le système caractéristique est $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = -\dfrac{\mathrm{d}y}{y+2z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{3y+4z}.$

Donc les intégrales premières sont données par

$$\Phi_1 = \frac{3y+2z}{x}, \quad \Phi_2 = \frac{y+z}{x}.$$

Les fonctions de la forme

$$(x,y,z) \to \Psi(x,y,z) = F(\Phi_1(x,y,z), \Phi_2(x,y,z)),$$

décrivent l'ensemble des intégrales premières. On peut donc donner les solutions u sous forme implicite

$$(x,y,u) \mapsto F\left(\frac{3y+2u}{x}, \frac{y+u}{x}\right) = c^{te}.$$

Définition

On appelle courbes caractéristiques ($\mathcal{C}$) de l'équation aux dérivées partielles du premier

ordre \eqref{equqsi d02} les solutions de son système caractéristique \eqref{SCAR}.

Complément : Généralisation au cas de n dimensions

On associe le système différentiel (S) de L'EDPs \eqref{equqsi} comme suivante:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{a_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{a_n} = \frac{\mathrm{d}z}{f} \quad S\,,$$

ou' les fonctions $a_1, a_2, \cdots, a_n$ et le second member f sont donnée.

La résolution de \eqref{equqsi d02} revient donc à chercher n intégrales premières indépendantes $\Phi_1, \Phi_2, \cdots \Phi_n$ du système (S). L'ensemble des solutions de l'équation \eqref{equqsi} est représentée par une

fonction de n intégrales premières du système (S)

$F\left(\Phi_1\left(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right), \cdots, \Phi_n\left(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right)\right) = Constante.$

3. Conditions aux limites

Conditions aux limites:

Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs prises par les solutions d'une EDP.

La donnée d'une condition aux limites permet de déterminer une solution répondant à certaines

conditions physiques

oient Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$, Γ sa frontière et G une fonction donnée:

- \item Lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières, dans ce cas on donne une condition de type frontière
  $u(x, y) = G(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Gamma = \boldsymbol{Fr}(D).$
- \item Si l'une des variables désigne une position dans un repère spatial et l'autre est le temps:
  $u(0, t) = G(t) \quad \forall t \geq 0,$
  une condition de type frontière est associée à une fonction connue G et une condition initiale est associée à une fonction connue F
  $u(x, 0) = F(x) \quad \forall x \in \Omega,$

4. Problème de Cauchy

$P, Q,$ et R étant trois fonctions supposées de classe C^1 dans un ouvert de

$\mathbb{R}^3$, g une fonction analytique définie sur une ***courbe régulière*** $\mathcal{C}$, de $\mathbb{R}^2$ donnée sous

forme paramétrique $t \mapsto (x_0(t), y_0(t))$.

Soit ($\mathcal{C}$) une courbe régulière de $\mathbb{R}^2$ et soit g une ***fonction analytique*** sur $\mathcal{C}$,

Définition

Le problème de Cauchy sur la courbe $(C_\prime)$, est un problème constitué de l'équation

$$P(x,y,u)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial\varphi}{\partial y}=R(x,y,u). \qquad (\varepsilon)$$

dont on cherche une solution vérifiant :

$$u(x,y)=g(x,y), \quad \text{sur } C_\prime. \qquad \text{(CL)}$$

Fondamental : Théorème de Cauchy-Kowalewski

Si la courbe $(C_\prime)$ ***n'est pas caractéristique,*** alors le problème de Cauchy admet une solution

unique.

Remarque

Ce théorème donne un ***résultat local d'existence et d'unicité de la solution analytique autour de la courbe de condition initiale.*** Il ne donne pas à priori d'information sur la taille du domaine d'existence de la solution. De même des solutions

non-analytiques sont susceptibles de coexister

Méthode : Méthode des caractéristiques

Un problème est bien posé si la condition limite n'est pas donnée le long d'une caractéristique. Considérons un problème de Cauchy bien posé, ou' la courbe de condition limite (C_0) n'est pas une caractéristique et déterminons comment construire la courbe caractéristique qui passe par le point (x_0,y_0) de (C_0) correspondant à l'abscisse curviligne s_0.

Cette courbe caractéristique $(C_\star)$ de $\mathbb{R}^3$ dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$t\mapsto(x_\star(t),y_\star(t),z_\star(t)).$$

est solution de :

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_\star}{\mathrm{d}t}=P\left(x_\star(t),y_\star(t),z_\star(t)\right),\\ \dfrac{\mathrm{d}y_\star}{\mathrm{d}t}=Q\left(x_\star(t),y_\star(t),z_\star(t)\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}z_\star}{\mathrm{d}t}=R\left(x_\star(t),y_\star(t),z_\star(t)\right)\end{cases} \qquad (\varepsilon')$$

avec la condition initiale $(x_\star(0),y_\star(0),z_\star(0))=(x_0,y_0,g(x_0,y_0))$.

Remarque

D'après ***Théorème*** précédent la construction d'une solution explicite n'est pas souvent

disponible. On peut donner juste un développement sous forme d'une série entière au

voisinage de (C_0). Dans le cas d'une EDP linéaire homogène, on peut trouver la solution

explicite comme dans l'exemple suivant et les exercice 6, 7 et 8

Exemple

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, & \dots.(E_1) \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$$

1) Une courbe caractéristique associé à (E_1) est une solution de son système caractéristique (S)

$$dx = -\frac{dy}{xy}, dz = 0$$

2) Le problème de Cauchy est posé sur la courbe $C_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\right\}$ (L'axe des ordonnées) :

a) Si la courbe (C_1) n'est pas caractéristique, le problème (E_1) admet une solution unique.

b) Si la courbe (C_1) est une courbe caractéristique, le problème (E_1) peut ne pas avoir de solution ou il peut en avoir une infinité.

3)On définit les caractéristiques comme des courbes $\mathbb{R}^2$ données par $(x_c(s), y_c(s))$. Les

équations qui satisfassent $(x_c(s), y_c(s))$ sont

$$\begin{cases} x_c'(s) = 1 \\ y_c'(s) = -x_c(s)y_c(s), \\ z_c'(s) = 0. \end{cases}$$

4) Déterminons les courbes caractéristiques de (E_1).

Intégrons l'équation

$$dx = -\frac{dy}{xy} \Rightarrow xdx = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 + \ln y = c.$$

Ceci donne

$$ye^{\frac{x^2}{2}} = K\dots, \quad K \in \mathbb{R}\dots(1\text{pts})$$

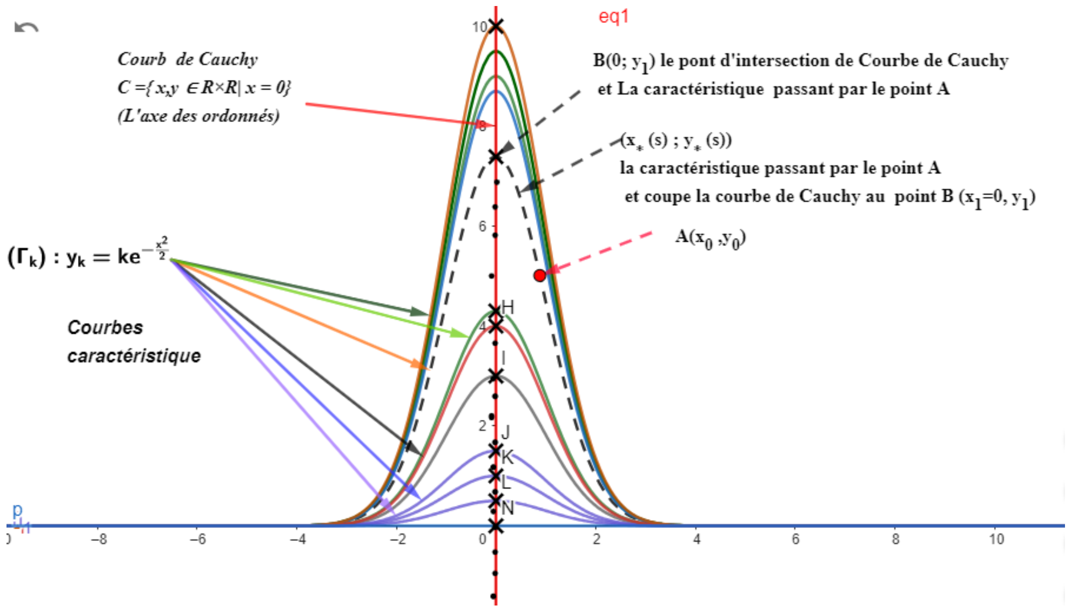
une intégrale première. Comme l'équation est linéaire homogène, l'équation cartésienne des

courbes caractéristiques est

$$y_K = Ke^{-\frac{x^2}{2}}, K \in \mathbb{R}.$$

Pour tracer cette courbe, on trace la graphe des fonctions

$$y_K = Ke^{-\frac{x^2}{2}}, K \in \mathbb{R}$$



5)Démontrons que la solution de (E_1) est constante le long $(x_c(s), y_c(s))$. Le long des caractéristiques, la solution vérifie

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}u\left(x_c(s), y_c(s)\right) &= \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_c(s), y_c(s)\right)\frac{x_c(s)}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\left(x_c(s), y_c(s)\right)\frac{y_c(s)}{ds}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_c(s), y_c(s)\right) - x_c(s)y_c(s)\frac{\partial u}{\partial y}\left(x_c(s), y_c(s)\right) = 0 \ldots\ldots(1\text{pts})\end{aligned}$$

ce qui implique que les solutions sont constantes le long des caractéristiques.

6)Résolvons (E_1) si c'est possible: Comme la courbe (C_1) n'est pas caractéristique et comme toutes les caractéristiques coupent la courbe (C_1), le problème (E_1) admet une solution unique.

Soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan correspondant à $s = s_0$. Soit $(x_*(s); y_*(s))$ la caractéristique passant par ce point et coupe la courbe de Cauchy au $B(x_1, y_1)$ avec $x_1 = 0$, alors on obtient

$$\begin{cases} y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}} = K_* \\ y_1 = K_* \end{cases}$$

ce qui implique que $y_1 = y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}}$. Comme la solution est constante le long de $(x_*(s); y_*(s))$, il en résulte que

$$u\left((x_*(s), y_*(s))\right) = u\left(x_0, y_0\right) = u\left(0, y_1\right) = u\left(0, y_0 e^{\frac{x_0^2}{2}}\right) = y_0^2 e^{0x_0^2}.$$

On obtient donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$u(x, y) = y^2 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Exemple

Le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases} \qquad (E_2)$$

n'admet pas de solution d'après le ***théorème d'existence et d'unicité*** car il es posé sur un

caractéristique.

5. EDPs du premier ordre non linéaires

l'équation eikonale

Avant de passer au cas général non linéaire, analysons en détail le cas particulier de l'équation eikonale. Nous verrons que cette équation peut également être résolue par des caractéristiques. L'équation eikonale bidimensionnelle prend la

forme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = n^2 \qquad (2.8.1)$$

où les surfaces $u = c$ (où c est une constante) sont les fronts d'onde, et n est l'indice de réfraction du milieu. Les conditions initiales sont données sous la forme d'une courbe initiale.

Pour écrire les équations caractéristiques, notez que l'équation eikonale peut être exprimée comme :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, n^2\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\right) = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, n^2\right)$ décrit une direction tangente à la surface de solution (intégrale). Pour vérifier cet argument algébriquement, écrivons les équations des composantes x et y de la courbe caractéristique, et vérifions que l'équation de la composante u est cohérente avec \eqref{eko}.

Nous posons ainsi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u_x, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_y, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = n^2 \qquad (2.8.2)$$

Comme u_x et u_y sont inconnues en ce moment , on calcule

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_x) = u_{xx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + u_{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_{xx}u_x + u_{xy}u_y \\ &= \frac{1}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right)_x = \frac{1}{2}\left(n^2(x,y)\right)_x \end{aligned} \qquad (2.8.3)$$

et même

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\left(n^2(x,y)\right)_y \qquad (2.8.4)$$

Pour écrire la solution de l'équation eikonale, notez qu'il résulte de la définition des courbes caractéristiques que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + u_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = u_x^2 + u_y^2 = n^2 \qquad (2.8.5)$$

L'intégration de la dernière équation conduit à une formule qui détermine u au point $(x(t), y(t))$ en fonction de la valeur initiale de u et des valeurs de l'indice de réfraction le long du chemin d'intégration :

$$u(x(t), y(t)) = u(x(0), y(0)) + \int n^2\,(x(\tau), y(\tau))\, d\tau \qquad (2.8.6)$$

où $(x(t), y(t))$ est une solution de \eqref{eko12} et \eqref{eko14}.

Avant de résoudre des exemples spécifiques, nous devons clarifier un point important concernant les conditions initiales des équations caractéristiques. Comme l'équation d'origine \eqref{eko12} implique les dérivées de u qui ne sont pas connues à ce stade, nous avons éliminé ces dérivées en différenciant une fois de plus les équations caractéristiques par rapport au paramètre t. En effet, les équations que nous avons obtenues \eqref{eko12} et \eqref {ekoin} ne

dépendent plus de u lui-même ; cependant, ce sont des équations du second ordre ! Par conséquent, il ne suffit

pas de fournir une seule condition initiale (comme le point initial de la courbe caractéristique sur la courbe initiale C), mais il faut aussi fournir les dérivées (x_t, y_t). De manière équivalente, nous devons fournir le vecteur tangent à la caractéristique au point initial. Pour cela, nous utiliserons le fait que le vecteur requis est précisément le gradient (u_x, u_y) de u. De l'équation eikonale elle-même, nous savons que la taille de ce vecteur est $n(x, y)$, et à partir de la condition initiale, nous pouvons trouver sa projection en chaque point de dans la direction tangente à . Mais évidemment, la taille d'un vecteur plan et sa projection selon une direction donnée déterminent le vecteur de manière unique. Nous obtenons donc la condition initiale supplémentaire.

Exemple

Résolvez l'équation eikonale \eqref{eko} pour un milieu avec un indice de réfraction constant $n = n_0$ et une condition initiale $u(x, 2x) = 1$.

La signification physique de la condition initiale est que le front d'onde est une ligne droite. Les équations caractéristiques sont

$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0 = \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$. Ainsi, les caractéristiques sont des droites, issues de la droite initiale $y = 2x$. Puisque u est constant sur une telle droite, le gradient de u lui est orthogonal. La deuxième condition initiale de la caractéristique est donc

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{2}{\sqrt{5}}n_0, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}n_0\,.$$

On obtient ainsi :

$$x(t,s) = \frac{2}{\sqrt{5}}n_0 t + x_0(s), \quad y(t,s) = -\frac{1}{\sqrt{5}}n_0 t + y_0(s), \quad u(t,s) = n_0^2 t + u_0(s) \quad (2.8.7)$$

Afin de trouver $x_0(s)$ et $y_0(s)$, nous écrivons la courbe initiale paramétriquement comme $(s, 2s, 1)$. En substituant la courbe initiale dans \eqref{ekoexo}, on obtient la surface intégrale

$$(x, y, u) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}n_0 t + s, -\frac{1}{\sqrt{5}}n_0 t + 2s, n_0^2 t + 1\right) \qquad (2.8.8)$$

En éliminant $t = (2x - y)/\sqrt{5}n_0$, on obtient la solution explicite

$$u(x,y) = 1 + \frac{n_0}{\sqrt{5}}(2x - y)$$

La solution obtenue a une interprétation physique simple : dans un milieu homogène, les courbes caractéristiques sont des droites (rayons lumineux classiques), et un front d'onde plan initial se propage dans la direction orthogonale à celles-ci. Par conséquent, tous les fronts d'onde sont plans.

Exemple

Calculer la fonction $u(x, y)$ vérifiant l'équation eikonale $u_x^2 + u_y^2 = n^2$ et la condition initiale $u(x, 1) = n\sqrt{1 + x^2}$ (n est un paramètre constant).

Écrire les conditions initiales paramétriquement sous la forme $(x, y, u) = \left(s, 1, n\sqrt{1 + s^2}\right)$. Cette condition implique $x_t(0, s) = u_x = ns/\sqrt{1 + s^2}$. En remplaçant la dernière expression dans l'équation eikonale, on obtient $y_t(0, s) = u_y = n/\sqrt{1 + s^2}$. En intégrant les équations caractéristiques on obtient

Pour écrire une solution explicite, il faut observer l'identité

$$x^2 + y^2 = \left(nt + \sqrt{1 + s^2}\right)^2$$

satisfaite par la surface intégrale. La solution est donc \$u=n \sqrt{x^2+y^2}\$. Cette solution représente une onde sphérique partant d'un seul point à l'origine des coordonnées

Méthode : Générale EDPs du premier ordre non linéaires

Dans cette point, on s'intéresse à résoudre des EDPs ayant la forme suivante

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (2.8.9)$$

L'équation \eqref{Nonli} est souvent écrite à l'aide de notation standard $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$. Pour simplicité, les dérivées partielles seront notées par $u_x, u_y \ldots$..

La résolution de équation \eqref{Nonli} passe par les étapes suivantes.

Etape 1: A l'équation \eqref{Nonli}, associons une seconde équation de la forme

$$G(x, y, u, p, q) = \lambda. \qquad (2.8.10)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Voir le prochain exemple pour la construction de telle fonction G. La méthode de

résolution de ce type des équations est basée d'abord sur la construction d'une EDP du premier

ordre dont l'inconnue est G.

Etape 2:Condition de compatibilié

On tire p et q des deux équations \eqref{Nonli} et \eqref{associ}}. Ce sont des fonctions de x, y et u, c-à-d

$p = p(x; y; u)$,$q = q(x; y; u)$ et l'on écrit

$$du = pdx + qdy$$

D'après ***Théorène de Schwarz***[2], on obtient

$$\frac{\partial p}{\partial y} + q\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial x} + p\frac{\partial q}{\partial u} \qquad (2.8.11)$$

Cette équation on l'appelle souvent "« *condition de compatibilité* »". On calcule les dérivés de p et q en dérivant les 2 équations par rapport à x, y et u, considérées comme variables indépendantes

$$\begin{cases} F_x + \frac{\partial p}{\partial x} F_p + \frac{\partial q}{\partial x} F_q = 0 \\ F_y + \frac{\partial p}{\partial y} F_p + \frac{\partial q}{\partial y} F_q = 0 \\ F_u + \frac{\partial p}{\partial u} F_p + \frac{\partial q}{\partial u} F_q = 0, \\ G_x + \frac{\partial p}{\partial x} G_p + \frac{\partial q}{\partial x} G_q = 0 \\ G_y + \frac{\partial p}{\partial y} G_p + \frac{\partial q}{\partial y} G_q = 0 \\ G_u + \frac{\partial p}{\partial u} G_p + \frac{\partial q}{\partial u} G_q = 0 \end{cases}$$

On a ainsi

$$\begin{cases} \left(F_p G_q - F_q G_p\right) \frac{\partial p}{\partial y} = F_q G_y - F_y G_q \\ \left(F_p G_q - F_q G_p\right) \frac{\partial q}{\partial x} = F_x G_p - F_p G_x \\ \left(F_p G_q - F_q G_p\right) \frac{\partial p}{\partial u} = F_q G_u - F_u G_q \\ \left(F_p G_q - F_q G_p\right) \frac{\partial q}{\partial u} = F_u G_p - F_p G_u \end{cases}$$

Comme F et G ne sont pas liées, on a

$$F_p G_q - F_q G_p \neq 0$$

La condition de compatibilité (2.20) s'écrit donc

$$F_q G_y - F_y G_q + q\left(F_q G_u - F_u G_q\right) = F_x G_p - F_p G_x + p\left(F_u G_p - F_p G_u\right) = 0,$$

soit

$$F_p G_x + F_q G_y + \left(pF_p - qF_q\right) G_u - \left(F_x + pF_u\right) G_p - \left(F_y + qF_u\right) G_q = 0 \qquad (2.8.12)$$

Complément

Etape 3: Système caractéristique

L'équation \eqerf{EDPD4INCONUE G} c'est une E.D.P linière du 1er ordre d'inconnue G; fonction de 5 variables $x; y; z; p; q$, son

système caractéristique

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_x} = \frac{dq}{F_g + qF_u}. \qquad (2.8.13)$$

.

Toute intégrale première de ce système contenant effectivement p ou q fournit une fonction

Etape 4: Construction de la solution

I n'est pas nécessaire de connaitre toutes les intégrales premières. Il sufit d'en connaitre une,

puis on intègre le système

$$\begin{cases} F = 0 \\ G - \lambda = 0 \end{cases}$$

On tire alors p et q et on intègre la différentielle

$$du = pdx + qdy$$

Exemple

Reprenons maintenant l'équation de l'exemple précédent et posons

$F(x; y; u; p; q) = p^2 + q^2 - n^2.$

On doit résoudre $p^2 + q^2 = a^2$: On a

$F_x = F_y = F_u = 0; F_p = 2p; F_q = 2q.$

Le système caractéristique associé est

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{2p} = \dfrac{dy}{2q} = \dfrac{du}{2(p^2 + q^2)} \\ dp = dq = 0 \end{cases}$$

D'où

$p = C1$

et

$q = C2 :$

D'autre part

$$\frac{dx}{C_1} = \frac{dy}{C_2} \Rightarrow \frac{x}{C_1} - \frac{y}{C_2} = C_3$$

et $\dfrac{dx}{C_1} = \dfrac{du}{p^2 + q^2} \Rightarrow \dfrac{dx}{C_1} = \dfrac{du}{n^2} \Rightarrow \dfrac{x}{C_1} - \dfrac{u}{n^2} = C_4$

Parmi ces quatre intégrales premières, il suffit d'en choisir ***une seule*** pour résoudre le problème. Prenons par exemple $p = C_1$, on doit intégrer le système

$$\begin{cases} p^2 + q^2 = n^2 \\ p = C_1 \end{cases}$$

Si on pose $C_1 = n\cos(\lambda)$ alors

$$\begin{cases} p = C_1 = n\cos(\lambda) = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ q = C_2 = n\sin(\lambda) = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

d'où $du = n\cos(\lambda)dx + n\sin(\lambda)dy$

ce qui donne $u(x, y) = n\cos(\lambda)x + n\sin(\lambda)y + \mu$, ou' μ est un constant arbitraire. Cette solution sera appelée intégrale complète de l'E.D.P dans l'exemple pour plus de détailles nous recommandons les lecteurs pour lire les ouvrages attache suivant.

[cf. 1] [cf. 2][cf. 3]

Cas particuliers

Il existe quelques méthodes pour des cas particuliers où la solution complète est facile à trouver. Pour en savoir plus, voici la vidéo suivante.

[cf. Résolution des EDP non linaire des cas spécieux]

6. Exercice

Exercice : Problème de Cauchy

1. Résoudre:

$$\begin{cases} u_t + 2u_x & = 0 \\ u(t = 0, x) & = \dfrac{1}{x^2 + 1} \end{cases}$$

2. Évaluer $u\left(\dfrac{1}{2}, x\right)$.

Exercice : EDPs du 1er ordre non-linéaire 01

Résoudre l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

avec la condition $u(x; 0) = x$

Exercice : EDPs du 1er ordre non-linéaire 02

Résoudre léquation aux dérivées partielles suivante:

$$\mathrm{f}\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = \sqrt{1 - \mathrm{f}^2}.$$

Exercice : EDPs du 1er ordre non-linéaire 02

Trouver la solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$$

Avec : $u(x, 0) = cx$

Exercice : EDPs du 1er ordre

Résoudre les EDPs quasi linéaires suivantes :

1. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2y - a)\dfrac{\partial u}{\partial y} = y;$
2. $x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{u^2}{x};$
3. $u\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{1 - u^2};$
4. $(u + y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (u + x)\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + y.$

Exercice : Problème de Cauchy 02

On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$le problème

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

1. Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.

2. Montrer qu'il s'agit de demi-cercles.

3. Quelle condition doit vérifier f pour qu'il y ait existence d'une solution ?

4. Déterminer les solutions de l'EDP dans le cas $f(x) = \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{1 + x^4}$.

III Test d'auto-évaluation de chapitre 02

1. Exercice : Systèmes différentiels, intégrales premières

Résoudre les systèmes différentiels suivants : On considérer les systèmes différentiels suivants

1. $\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{xy^2}.$
2. $\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{y+2z} = \frac{\mathrm{d}z}{3y+4z}$
3. $\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{xd}z}{z^2}$

Question

Donner une intégral premières de chaque une des systèmes considéré ?

2. Exercice :

Problème de Cauchy 01

Soit

$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\mathrm{t} \mid x > 0; y > 0\right\}$

On considère alors sur Ω le problème

$$\begin{cases} 2y\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x, 0) = f(x), x > 0 \end{cases}$$

Question 1

Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.

Question 2

Déterminer les courbes caractéristiques et tracez-les soigneusement.

Question 3

Montrer que les solutions de l'EDP sont: $u(x, y) = f\left(y^2 - x\right)$. ?

Question 4

Expliquer pourquoi ce problème n'est pas bien posé. ?

3. Exercice :

On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+}$le problème

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Question 1

Rappeler ce qu'une solution de cette EDP vérifie le long des courbes caractéristiques.

Question 2

Montrer qu'il s'agit de demi-cercles.

Question 3

Quelle condition doit vérifier f pour qu'il y ait existence d'une solution ?

Question 4

Déterminer les solutions de l'EDP dans le cas $f(x) = \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{1 + x^4}$.

Glossaire

la loi de Newton

Pour un corps de masse m (constante) : l'accélération a subie par ce corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces F~ qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m. Ceci est souvent traduit par l'équation :

\displaystyle{\sum\vect{F} =m\vect{a}}

Abréviations

EDO : Équation différentielle ordinaire

EDPs : Équations aux dérivée partielles

Bibliographie

Baddari K, Abbassov A. Equations de la physique mathématique appliquées. OPU ; 2009.

Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics. Wiley-V C H , édition de 1989.

Eriksson K, Estep D, Hansbo P, Johnson C. Computational Di erential Equations. Cam bridge University Press, New York, 1990.

Nikolenko V. Équations de la physique mathématique. UM, Moscou, 1981

Pinchover, Rubenstein J. An Introduction to Partial Di erential Equations. Cambridge University Press, 2005.

Reinhard H. Équations aux dérivées partielles. Dunod, paris, 2001

Schwartz L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, Paris, 1983.

Walter A. Strauss. Partial Di erential Equations: An Introduction. Wiley, 1992