Équations de la physique mathématique

Dr. Chabane Farid

Khemis Miliana Unieversity

Matre and Computer science Faculty

Mathematical Department

Email : *f.chabane@univ-dbkm.dz*

5.0

10 Mars 2025

Table des matières

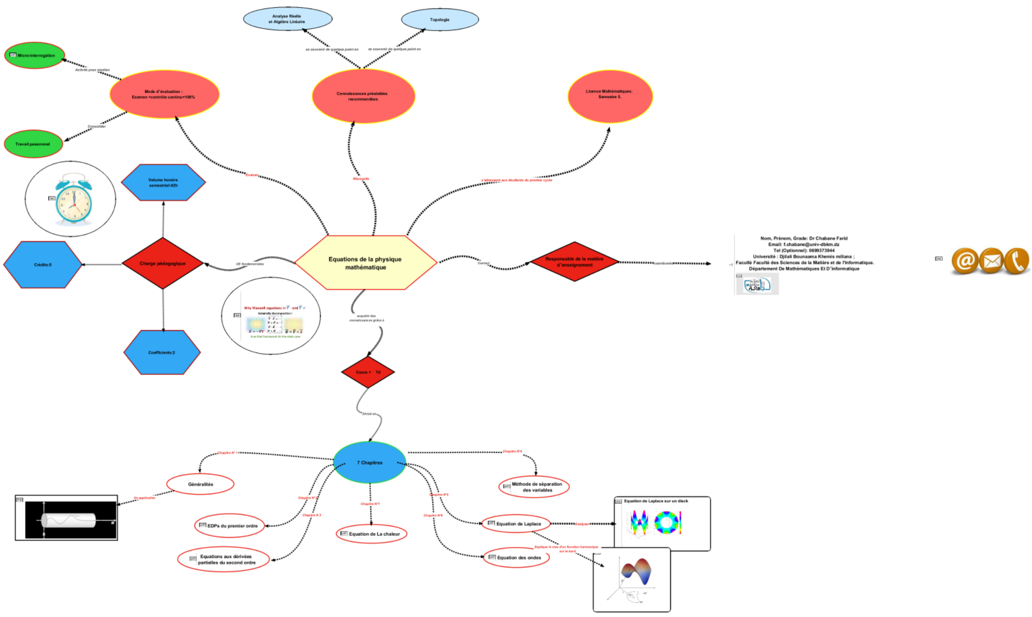
Objectifs

Ce cours vise à l'étude des équations aux dérivées partielles (EDPs) pour un étudiant de licence est de lui permettre ***d'identifier*** les concepts fondamentaux, ***comprendre les méthodes analytiques et numériques*** utilisées pour leur résolution, et ***appliquer*** ces techniques à des problèmes concrets issus de la physique et des sciences de l'ingénieur.

L'étudiant doit être en mesure de formuler des problèmes sous forme d'***EDPs***, ***analyser*** l'existence et l'unicité des solutions, et ***évaluer*** l'efficacité des différentes méthodes de résolution en fonction de la nature des équations (elliptiques, paraboliques ou hyperboliques).

Ce cours l'amène également à ***synthétiser*** les connaissances acquises pour créer des modèles mathématiques adaptés à des situations réelles, renforçant ainsi ses compétences en mathématiques appliquées et en physique mathématique.

Introduction



Carte Conseptulle de Cour d'équation da la physique mathématiques

Il existe une infinité d'équations aux dérivées partielles, mais il n'existe pas une méthode univers pour résoudre toutes celles-ci . Beaucoup de domaines sont fortement dépendants de la théorie desEDPs[*]. L'aérodynamique, la dynamique des fluides, l'électrodynamique, la géophysique, la mécanique.

Ce cours est organisé en sept chapitres principaux. Dans le premier chapitre, on a rappelé les notions de base et apporté des définitions concernant ce type des équations. Des exemples des ***EDPs***[*] ont été formulés en utilisant des principes physiques. Le deuxième chapitre est réservé exclusivement aux équations du premier ordre dont le contenu est divisé en deux parties. Dans la première partie, on a fait un rappel important sur les systèmes différentiels, qui sert après à comprendre la manière de résoudre les ***EDPs***[*] du premier ordre. Ensuite, on a présenté des théorèmes sur la résolution implicites des équations quasi linéaires.

Dans la seconde partie, on a introduit une méthode de la résolution de certains types des ***EDPs*** non linéaires. Ce chapitre est conclu par une étude complète sur le problème de Cauchy relative à une équation quasi linéaire où un théorème important a été démontré. Cette étude a été illustrée par des exemples d'existence et de non-existence.

I Pré-requis

Les principaux préalables recommandées pour suivre ce cours d'équation de la physique mathématique sont les suivants :

- Une solide connaissance en analyse réelle.
- Des bases en algèbre linéaire
- Une bonne compréhension en topologie

II Test de pré-requis

1. Exercice

Soit la fonction

$$f: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 \end{cases}.$$

Le vecteur gradient de f au point (x, y)est

- ☐ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2x \\ y^2 \end{pmatrix}$
- ☐ $2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$où :
  - $(\mathbf{i})$ est le vecteur unitaire selon l'axe (x),
  - $(\mathbf{j})$ est le vecteur unitaire selon l'axe (y).

2. Exercice :

Soit la surface S définie par l'équation :

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ et on considère le vecteur $\mathbf{V} = (-1, 2, 0)$.

Question 1

Montrez que le vecteur gradient de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ est normal à la surface S .

Indice :

Rappelez-vous que le vecteur normal à une surface $f(x, y, z) = c$ est le gradient $\nabla f(x, y, z)$.

Question 2

Calculez le vecteur normal à S au point $(2, 1, 2)$

Indice :

Remplacez $x = 2$, $y = 1$, et $z = 2$ dans le vecteur gradient pour obtenir le vecteur normal au point $(2, 1, 2)$.

Question 3

Déterminez un vecteur unitaire normal à la surface en ce point.

Indice :

Divisez le vecteur normal trouvé par sa norme pour obtenir un vecteur unitaire. La norme est donnée par $||\mathbf{n}|| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$.

Question 4

Concluez que $\mathbf{V} = (-1, 2, 0)$ appartient au plan tangent à la surface au point $(2, 1, 2)$.

3. Exercice : Opérateur linéaire

Soit W un espace vectoriel de dimension finie et $T : W \to W$ un opérateur linéaire.

Quel est l'ensemble des propriétés qu'un opérateur T doit satisfaire pour être un opérateur linéaire ?

- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ et $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ et $c \in \mathbb{K}$.
- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ mais $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}) + 1$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ et $c \in \mathbb{K}$.
- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + cT(\mathbf{v})$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ et $c \in \mathbb{K}$.
- $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ et $T(c\mathbf{u}) = T(\mathbf{u})$ pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ et $c \in \mathbb{K}$.

III Objectif

1. ***L'objectif principal*** de ce chapitre est ***d'analyser*** les types des EDPs* et ***d'explorer*** une méthode de résolution appropriée pour certains EDPs* simples
2. ***Les objectifs spécifiques incluent :***

- -Définir les principaux concepts et termes liées à des équations aux dérivées partielles (EDPs*)
- Connaître des phénomènes physique liés à certaines des modales mathématiques
- Explorer une méthode de résolution appropriée au problème mathématique qui lui est présenté en utilisant une méthode de résolution appropriée.

IV Chapiter01 :Généralités

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) jouent un rôle central dans la modélisation des phénomènes complexes impliquant plusieurs variables. Une EDPs établit une relation entre une fonction inconnue u et ses dérivées partielles, permettant ainsi de décrire l'évolution de systèmes dynamiques dans divers domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie et l'économie(Voire [1*,2*,3*,4*,5*,6*,7*,8*]. En effet, de nombreux processus naturels et industriels obéissent à des lois fondamentales qui se traduisent mathématiquement par des EDPs. Ces équations permettent d'exprimer la manière dont une grandeur varie en fonction de plusieurs paramètres, offrant ainsi un cadre rigoureux pour l'analyse et la prévision des comportements de systèmes complexes.

1. Concepts préliminaires et notions fondamentaux

L'exemple le plus simple d'équation différentielle se présente lorsque la fonction u dépend uniquement d'une seule variable x.

Dans ce cas, la relation entre u et ses dérivées est décrite par une équation différentielle ordinaire (EDO[*]).

Définition

Une EDO est une relation du type

$$F\left(x, u(x), u'(x), u''(x), \cdots, u^n(x)\right) = 0 \qquad (1.1)$$

entre la variable $x \in \mathbb{R}$ (parfois $x \in I \subset \mathbb{R}$) et les dérivées de la fonction inconnue u

point x telle que

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n+2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto F(x, y), \end{aligned}$$

avec $y = (y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple

Le mouvement d'un objet sur une droite peut \^etre décrit par l'équation:

$$u^2(x) = g(u(x))$$

La variable x correspond au temps et la fonction u correspond à la position de l'objet.

Dans ce cas $x \in I \subset \mathbb{R}$ et

$$F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto F(x, y) = y_2 - g(y_0),$$
avec $y = (y_0, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$.

Définition

Une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante u est les variables indépendantes $(x_1, x_2, \cdots)$ une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est ainsi de la forme :

$$F\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \cdots, \partial^2_{x_1^2} u, \partial^2_{x_2^2} u, \partial^2_{x_1 x_2} u, \cdots\right) = 0 \qquad (1.2)$$

Complément

Ou' F est une fonction de plusieurs variables, $\partial_{x_j} u$\$

désigne la dérivée partielle par rapport à x_j ($\partial_{x_j} = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, j = 1, \cdot, n$).

Si n est le nombre de variables indépendantes, alors nous

considérons le n-tuplet de variable indépendante $(x_1, x_2, \cdots)$ comme appartenant à un domaine D convenable (Ω) de $\mathbb{R}^n$.

Fondamental : Dimension, degré et ordre d'une EDP

L'ordre d'une EDP: est le plus grand ordre de dérivation qui apparait dans l'équation

\eqref{Gedp}.

La dimension d'une EDP est: le nombre de variables indépendantes dont dépend la

fonction inconnue u.

Le degré d'une EDP est: le degré de la dérivée d'ordre le plus élevé

qui apparaît dans celle-ci après que l'équation a été rationalisée.

Exemple

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = u + xy$ (EDP de 1^{er} order , 1^{er} degré et 2 demonsion).
- $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 2x\dfrac{\partial u}{\partial x}$ (EDP de order , 1^{er} degré et 2 demonsion).
- $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = xyz$ (EDP de 1^{er} order , 1^{er} degré et 3 demonsion).
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(1 + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^{\frac{1}{2}}$($2^{nd}$ order, 2^{nd} degree PDE and tow dimonsion).

Définition

Une EDP (Equation différentielle aux dérivées partielles) d'ordre 1 ou du premier ordre d'inconnue u de n variables indépendantes$x_1, x_2 \cdots, x_n$ est une équation de la forme:

$$F\left(x_1, x_2 \cdots, x_n, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \cdots, \partial_{x_n} u\right) = 0 \qquad (1.3)$$

Ou' $(x_1, \cdots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

Complément

La forme générale d'une EDP d'ordre 2 et de dimension 2 est:

$$F\left(x_1, x_2, u, \partial_{x_1} u, \partial_{x_2} u, \partial^2_{x_1^2} u, \partial^2_{x_2^2} u, \partial^2_{x_1 x_2}, \partial^2_{x_2 x_1} u\right) = 0 \qquad (1.4)$$

Ou' $(x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$

Linéarité et homogénéité

La notion de la linéarité pour les EDPs fait intervenir des opérateurs différentiels. Un opérateur différentiel est un opérateur construit à partir des dérivées partielles des fonctions diférentiables.i.e un opérateur L désignera une transformation qui associée à toute fonction

$u = u(x, y, \cdots)$ de plusieurs variables les $x, y, \cdots$ sur un domaine D ; une fonction $\mathcal{L}u = \mathcal{L}u(x, y, \cdots)$.

Définition

Une EDP d'une inconnue u est dite linéaire si l'on peut la mettre sous la forme

$$\mathcal{L}u = f(x, y, \cdots) \qquad (1.5)$$

ou'

$\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire différentiel,

f est une fonction de n variables indépendantes définie sur un domaine de $\mathbb{R}^n$.

Si $f \equiv 0$, on dit que l'équation est ***linéaire homogène***. Sinon elle est ***non-homogène***.

Une EDP est dite linéaire si la variable dépendante et ses dérivées partielles n'apparaissent que dans le premier degré et ne sont pas multipliées, sinon elle est dite non linéaire.

Exemple

L'équation

$$u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2yx\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \qquad (1.6)$$

est linéaire non-homogène sur $\mathbb{R}^2$ car elle peut s'écrire sous la forme \eqref{lin} ou'

$$\mathcal{L}u = u + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2yx\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

est un opérateur linéaire diférentiel et $f(x, y) = 1$.

Exemple

L'équation

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + xu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \sin(y) \qquad (1.7)$$

n'est pas linéaire ne homogène sur $\mathbb{R}^2$ car elle peut s'écrire sous la forme \eqref{lin} ou'

$$\mathcal{L}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + xu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

et $f(x, y) = \sin(y)$. Pour vérifier cela, il suffit de prendre $a = b = 1$ et

$u_1(x, y) = u_2(x, y) = x^2$: On obtient

$\mathcal{L}\left(au_1(x, y) + bu_2(x, y)\right) = 16x$ et $a\mathcal{L}u_1(x, y) + b\mathcal{L}u_2(x, y) = 4x$ et clairement $\mathcal{L}\left(au_1(x, y) + bu_2(x, y)\right) \neq a\mathcal{L}u_1(x, y) + b\mathcal{L}u_2(x, y)$.

Quelques équations de la physique mathématique

1. ***Équation de transport*** $\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ou' $u(x, t)$; est utilisée pour modéliser la pollution de l'air, la dispersion des colorants ou même le flux de trafic.
2. ***Équation de Burgers*** $\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ou' $u(x, t)$;est issue de l'étude de la dynamique des gaz.
3. ***Équation des ondes*** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u$,ou' $u(x, y, z, t)$ est utilisé pour modéliser de petites oscillations, elle joue un grand rôle dans la dynamique des fluides et dans l'électromagnétisme.
4. ***Équation de la chaleur*** $\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u$,ou' $u(x, y, z, t)$ est utilisée dans l'étude de la conduction thermique.
5. ***Équation de Laplace ou du potentiel*** $\Delta u = 0$, ou' $u(x, y, z, t)$, apparaît notamment dans: astronomie, électrostatique, mécanique des fluides et la mécanique quantique.
6. ***Équation d'Euler-Bernoulli*** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}$, $u(x, t)$ utilisée dans la théorie des poutres.

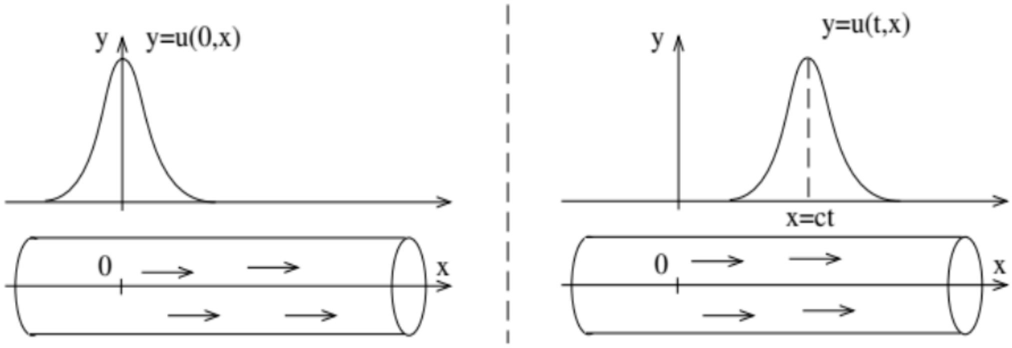
2. Construction d'une équation aux dérivées partielles

EDP du premier ordre (Equation de transport) :

Dans cette sous-section, on illustre la manière de dérivation de quelques EDPs citées ci-dessus en utilisant des lois physiques.

Cette équation peut être utilisée pour modéliser la pollution de l'air, la dispersion des colorants ou même le flux de trafic avec u représentant la densité du polluant (ou colorant ou trafic) à la position x et au temps t. Pour une discussion du modèle physique, on considère l'exemple tiré de \cite{Walter}. Considérons un tube très étroit de longueur l conduit de l'eau à une vitesse constante c.

Supposons qu'il existe une substance chimique qui pollue de l'eau. Soit $u(t, x)$ la concentration de la substance chimique à l'instant t et à l'abscisse x.



Schema de Transport d'un polluant dans l'eau

On désigne par $Q(t)$ la quantité de la substance chimique à l'instant t.

L'expression de Q entre les points d'abscisse 0 et x est donnée par:

$$Q(t) = \int_0^x u(t, y)\mathrm{d}y$$

Pendant une période h, une particule de la substance parcourt une distance ch. La quantité Q entre les points d'abscisse ch et $x + ch$ est la même quantité entre 0 et$x$ à l'instant$t$.

On a donc

$$Q(t) = \int_{ch}^{x+ch} u(t, y)\mathrm{d}y = \int_{ch}^{x+ch} u(t, t + ch)\mathrm{d}y$$

En dérivant par rapport à x; on trouve $u(t, y) = u(t, t + ch)$.

En dérivant cette fois-ci par rapport à h et posant $h = 0$; on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (2.1)$$

EDP du second ordre (Corde vibrante)

Prenons une corde de longueur L, qui subit des vibrations transversales relativement faibles.

Soient $T(x; t)$ la tension dans la corde et ρ la densité (masse par unité de longueur) de la corde.

Cet exemple a été traité de manière détaillé dans [5*,8*]. On désigne par $u(x; t)$ son déplacement transversal à l'instant t et à la position x.

D'après ***la loi de Newton***[1] pour la partie de la corde entre deux points quelconques à x = x_0 et x = x_1. La pente de la corde en x_1 est $\frac{\partial u(x_1, t)}{\partial x}$.

La loi de Newton s'écrit

$$\frac{T\left(\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)^2}}\Bigg|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt\,(transversale)$$

Maintenant, on suppose que le mouvement est faible, alors par le développement de Taylor

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{\partial u(x_1,t)}{\partial x}\right)^2 + \cdots \approx 1,$$

où les points représentent les puissances supérieures de $\frac{\partial u}{\partial x}$. On a négligé les quantités faibles

et ses puissances supérieures. Supposons que T est indépendant de x, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

C'est

$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ou' $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$

«

1-Pour un corps de masse m (constante) : l'accélération $\vec{a}$ subie par ce corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces $\vec{F}$ qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m . Ceci est souvent traduit par l'équation :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

»

La vidéo suivante explique l'utilisation de l'une des équations aux dérivées partielles les plus célèbres et comment l'extraire.

[cf. La construction de l'équation de la chaleur][cf. Deuxième vidéo qui explique l'utilisation des EDP fondamentaux]

3. Résolution de quelque des équation aux dérivées partielles

Résoudre une EDP dans un domaineΩ de $\mathbb{R}^n$, c'est trouver une fonction suffisamment différentiable dans Ω, telle que la relation (1.2) soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans Ω.

Si les différentes solutions d'une EDP s'écrivent sous la même forme, cette forme est appelée solution générale de l'équation. Comme la solution générale d'une EDO implique des constantes arbitraires, la solution générale d'une EDP implique des fonctions arbitraires

Exemple : Résolution des EDP simples

Résoudre l'équation de transport (2.1) .

La solution générale de cette équation sur Ω est $u(x,t) = f(x-ct)$ ou'f est une fonction arbitraire de classe $C^1(\mathbb{R})$. La solution est trouvée en utilisant la ***méthode des caractéristiques*** qui sera l'objet du prochain chapitre.

Exemple : Résolution des EDP simples

On veut résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.1)$$

D'abord, on pose $v(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$, ce qui implique pour tout (x, y) que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Ceci signifie que $v(x, y)$ est constante pour tout y fixé. Alors $v(x, y) = C(y)$, ou' C est une fonction arbitraire de y. On se ramène à trouver u telle que $\frac{\partial u}{\partial x} = C(y)$. Un raisonnement similaire conduit à $u(x, y) = C(y)x + D(y)$. ou' D est une fonction arbitraire.

Exemple : Résolution des EDP simples

On s'intéresse à trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0 \qquad (3.2)$$

On remarque que pour y fixé, l'équation \eqref{enn+} à l'aide d'un changement de variable

$v(x) = u(x; y)$ s'écrit

$$v'' + v = 0.$$

Il s'agit d'une EDO linéaire du second ordre dont la solution générale est donnée par

$$v(x) = A\cos(x) + B\sin(x).$$

Ou' A et B sont des constantes arbitraires. Si on revient à u, on obtient

$u(x, y) = A(y)\cos(x) + B(y)\sin(x)$, d'où la solution de \eqref{enn+}, A et B cette fois sont des fonctions arbitraires.

Exemple : Résolution des EDP simples

On s'intéresse à trouver la solution générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial xy} = 0 \qquad (3.3)$$

Comme dans l'exemple au-dessus, on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C(y) \; ;$$

ou' C est une fonction arbitraire de y, alors

$$u(x, y) = \int C(y)\mathrm{d}y + D(x)$$

ou' D est une fonction arbitraire. Si C admet une primitive E, la solution s'écrit

$$u(x, y) = E(y) + D(x)$$

Méthode : Méthode du changement de variables

Une EDP peut être transformée parfois à une forme plus simple avec une solution connue par un changement de variables approprié. Cette section discute la manière de cette transformation.

Exemple

Déterminons toutes les fonctions $u \in C^1(\mathbb{R}_+^\star)$ et satisfaisant l'équation aux dérivées

partielles

$$2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (3.4)$$

On peut considérer les nouvelles coordonnées: $\xi = x$ et $\eta = xy^2$. Il est facile de vérifier que $\xi, \eta > 0$ et $x = \xi$ et

$$y = \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}$$

car $xy > 0$: Par la règle de chaînes, on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Complément

Ici il faut noter que les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ et $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ sont continues. En remplaçant x, y,

$\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ par leurs expressions correspondantes en fonction de ξ et η dans \eqref{enn223}, on obtient

$$\xi\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \qquad (3.5)$$

Comme ξ est strictement positive, on obtient $\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$ i.e $u = h(\eta), h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

arbitraire et dérivable.

Alors $u = h(xy^2)$ est la solution de \eqref{enn223}.

4. Exercice : Travaux dirigés (TD)

Exercice : 01

1. Monter que pour tout fonction $f \in C^1(\mathbb{R})$, $u(x, t) = f(x - ct)$ est solution de L'EDP

   $$\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2. Trouver la solution qui satisfait la condition suivante: $u(0,t) = t^2$.
3. Trouver la solution qui satisfait la condition suivante: $u(0,t) = g(t)$ telle que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Exercice : 02

Soit $u(x,t)$ une fonction de deux variables. Considérons les nouvelles variables suivant (r,θ) définies par les équations suivantes:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2} + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Noter que dans ce cas :

On a aussi

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Montre en utilisant la régle de chaines les formules suivantes:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \cos(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\sin(\theta)}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$;
2. $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin(\theta)\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\cos(\theta)}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$;
3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}$

Exercice : 03

Soit L'EDP suivant

$$(x^2+1)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{4.1}$$

Déterminer toutes les solutions de \eqref{eq1} de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ en utilisant les nouvelles coordonnées $\xi = x$ et $\eta = \dfrac{y}{x^2+1}$

Exercice : 04

1. Déterminer la solution général de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{4.4}$$

en utilisant les nouvelles coordonnées $\xi = x + y$ et $\eta = x - y$.

2. Résoudre l'équation : $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + xt\dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2, \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \qquad (4.5)$

Exercice : 05

Résoudre le problème à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + e^{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x,0) = x \end{cases}, \tag{4.6}$$

* *

*

- Dans ce chapitre, nous avons appris à reconnaître les types d'équations aux dérivées partielles (ordre linéarité, homogénéité), ce qui est essentiel pour choisir les méthodes de résolution adaptées.
- Les équations de la physique (chaleur, ondes, Laplace) en sont des exemples importants, décrivant des phénomènes réels. Parmi les méthodes, les approches directes comme le changement de variables et les courbes caractéristiques simplifient ces équations tout en gardant leur lien avec la réalité physique.
- Le chapitre suivant présentera la méthode des caractéristiques, utile pour résoudre les équations quasi-linéaires du premier ordre en construisant des solutions particulières le long des courbes caractéristiques.

V Test d'auto-évaluation de chapitre 1

1. Exercice : La nature des EDP selon leur order, leur degré, leur linéarité et leur homogénéité, si possible.

On considérer les équations aux dérivées partielles suivantes :

1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y} = y$; 2) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial u}{\partial y} = 1$; 3) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$;

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = sin(x)$; 5) $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + sin(u) = \exp(y)$.

Question

Pour chacune des équations aux dérivées partielles au-dessous, indiquer son ordre, si elle est linéaire ou non, si elle est linéaire homogène ou non

2. Exercice :

Résolution directe des equatioins aux dérivées partilles

Déterminer la solution générale $u(x,t)$ des EDPs suivantes:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1;$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u;$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1;$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$

3. Exercice :

Soinet $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une primitive de g

1. Déterminer toutes les solutions de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ de
   $$g(y)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (4.2)$$
   en utilisant les nouvelles coordonnées $\xi + h(\eta) = x$ et $\eta = y$.
2. Utiliser le résultat obtenu en \eqref{eq2} pour résoudre l'EDP suivant :

Exercice :

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + (y^2 + 1)\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{4.3}$$

Glossaire

la loi de Newton

Pour un corps de masse m (constante) : l'accélération a subie par ce corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces F~ qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m. Ceci est souvent traduit par l'équation :

\displaystyle{\sum\vect{F} =m\vect{a}

Abréviations

EDO : Équation différentielle ordinaire

EDPs : Équations aux dérivée partielles

Bibliographie

Baddari K, Abbassov A. Equations de la physique mathématique appliquées. OPU ; 2009.

Courant R, Hilbert D. Methods of mathematical physics. Wiley-V C H , édition de 1989.

Eriksson K, Estep D, Hansbo P, Johnson C. Computational Di erential Equations. Cam bridge University Press, New York, 1990.

Nikolenko V. Équations de la physique mathématique. UM, Moscou, 1981

Pinchover, Rubenstein J. An Introduction to Partial Di erential Equations. Cambridge University Press, 2005.

Reinhard H. Équations aux dérivées partielles. Dunod, paris, 2001

Schwartz L. Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques. Hermann, Paris, 1983.

Walter A. Strauss. Partial Di erential Equations: An Introduction. Wiley, 1992