المحور السابع: برمجة الأعداد الصحيحة: مشاكل النقل

تمهيد:

مسائل النقل من إحدى المواضيع الهامة المدرجة في بحوث العمليات قسم البرمجة الخطية، باعتبارها تهدف أيضا إلى الوصول إلى الأمثلية في وجود مجموعة من القيود الخطية، وعلى وجه الخصوص تهتم بالبحث عن أقل تكلفة لنقل بضائع شخص طبيعي أو معنوي من مجموعة من المناطق إلى مناطق أخرى وفي حدود كميات محددة، أو البحث عن أعلى ربح أو عائد من جراء عملية النقل هذه، لذا فإنها شائعة الاستخدام على مستوى الاقتصاد الجزئي، في المؤسسات الإنتاجية والتجارية وغيرها، وبالتالي سوف نتطرق من خلال هذا المحور إلى الحالة الأولى وهي حالة تدنئة تكاليف النقل، ونتطرق للحالة الثانية وهي حالة التعظيم.

أولا: شروط استخدام طرق حل مشاكل النقل:

قبل تطبيق طرق حل مشكلة النقل، يجب التأكد من توفر الشروط التالية:

- وجود مجموعة من الطاقات يمكن استخدامها، والتي تسمى المنابع أو المصادر.
- أن تكون عدة أوجه لاستغلال هذه الطاقات، وإلا لا يوجد هناك مشكلة في توزيع الموارد.
- يجب أن يتساوى مجموع المعروض من الطاقات (العرض) مع المطلوب منها (الطلب).
- أن تكون قيمة سواء كانت تكلفة أو إيراد أو وقت لكل من الطاقات المعروضة بالنسبة لطلب ما.
- وجود هدف لمشكلة النقل سواء تعظيم أو تدنئة، وغالبا تعبر عن تدنئة.
- تجانس الموارد (نفس وحدة القياس).

ثانيا: الصيغة الرياضية لمسألة النقل:

دالة الهدف:

$$\boldsymbol{Min\ Z\ ou\ bien\ Max\ Z = c_{11}\,x_{11} + c_{12}\,x_{12} + c_{1n}\,x_{1n} + \dots +}$$
$$\boldsymbol{c_{21}x_{21} + c_{22}\,x_{22} + \dots + c_{2n}\,x_{2n} + c_{m1}\,x_{m1} + c_{m2}\,x_{m2} + c_{mn}\,x_{mn}}$$

القيود:

$$\begin{cases} \left.\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \cdots + x_{2n} = a_2 \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \cdots + x_{mn} = a_m \end{cases}\right\} \text{قيود العرض} \\ \left.\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + \cdots + x_{n1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \cdots + x_{n2} = b_2 \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \cdots + x_{mn} = b_n \end{cases}\right\} \text{قيود الطلب} \end{cases}$$

قيد توازن السوق $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$

شرط عدم السلبية $x_{11}, x_{12} \ldots \ldots \ldots . . x_{mn} \geq 0$

cij: تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مراكز العرض (ai) إلى مراكز الطلب (bj).

Xij: الكميات المنقولة من مراكز العرض (ai) إلى مراكز الطلب (bj).

ai: الكميات المعروضة من المصدر i.

bj: الكميات المطلوبة من المصب j.

ثالثا: طرق حل مسائل النقل:

إن أكثر الطرق استخداما في التوصل إلى الحل الأساسي لمشاكل النقل هي:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
- طريقة التكلفة الدنيا.
- طريقة فوجل (Voguel).

1: طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تعتبر هذه الطريقة من بين أسهل الطرق جميعا، إلا أنها في غالب الأحيان لا تؤدي إلى الحل الأمثل للمشكلة، أما خطوات الطريقة فيمكن اختصارها في المراحل التالية:

- وضع مصفوفة النقل المتضمنة للعرض والطلب والتكاليف الوحدوية والكميات المراد نقلها.
- تساوي العرض والطلب.
- تبدأ عملية التوزيع من الخلية الواقعة في الزاوية الشمالية الغربية من مصفوفة النقل، بغض النظر عن التكلفة الوحدوية للنقل، بالإضافة إلى وجود كميات من العرض في مركز التوزيع متاحة أثناء عملية التوزيع وإلا ننتقل إلى الخلية التالية.
- يلاحظ من خلال هذه الطريقة، أن عملية تحديد الخلية التي سوف تغطي احتياجاتها تعتمد على الموقع لا التكلفة المتضمنة فيها.

مثال تطبيقي:

تمتلك شركة لصناعة الملابس ثلاث مخازن في المواقع التالية: C,B,A على التوالي، يتم الحصول على منتجات الشركة من خلال سوقين: M_2,M_1، حيث أن طاقات المخازن المتاحة على التوالي: 60، 40، 70 وحدة، والطلبات في كلا السوقين على التوالي: 65،105 وحدة.

- التكلفة الوحدوية للنقل من المخزن الأول إلى السوقين على التوالي: 4، 2 دينار.
- التكلفة الوحدوية للنقل من المخزن الثاني إلى السوقين على التوالي: 7، 5 دينار.
- التكلفة الوحدوية للنقل من المخزن الثالث إلى السوقين على التوالي: 3، 10 دينار.

المطلوب: إيجاد الحل الأساسي باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية؟ مع حساب التكاليف الكلية للنقل.

الحل:

قبل القيام بعملية التوزيع نلاحظ أن: $\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj$

70 + 40 + 60 = 105 + 65 (العرض = الطلب)

إعداد مصفوفة النقل كالتالي:

إلى/من	M_1		M_2		العرض
A	60	4		2	60
B	40	7		5	40
C	5	3	65	10	70
الطلب	105		65		170 / 170

نقوم بتوزيع الطلب على السوقين من خلال المخازن الثلاث، وذلك ابتداء من الخلية الواقعة في الزاوية الشمالية الغربية أي الخلية التي تقع في السطر الأول والعمود الأول، حيث التكلفة مساوية لـ (4 د)، وهنا يتضح أن الاختيار يكون بالاعتماد على موقع الخلية لا تكلفتها، لوجود خلايا تحتوي على تكاليف وحدوية أقل، ويتم الانتقال من الأسطر إلى الأعمدة إلى آخر خلية يتم إشباعها باستنفاذ جميع الكميات المتاحة، والجدول التالي يمثل الجدول النهائي للنقل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

إلى/من	M_1		M_2		العرض
A	60	4		2	~~60~~ 0
B	40	7		5	~~40~~ 0
C	5	3	65	10	~~70~~ ~~65~~ 0
الطلب	~~105~~ ~~45~~ ~~5~~ 0		~~65~~ 0		170 / 170

يلاحظ من جدول النقل أنه تم تلبية جميع طلبات السوقين باستنفاذ جميع الكميات المتاحة، أما تكلفة النقل الكلية: $CT_{NWC} = (60 \times 4) + (40 \times 7) + (5 \times 3) + (65 \times 10) = 1185DZ$

2: طريقة التكلفة الدنيا:

تعتبر طريقة التكلفة الدنيا أفضل من سابقتها، حيث يراعى فيها تكلفة الخلية الأدنى التي يتم إشباعها وصولا إلى حل أساسي أقرب إلى الحل الأمثل، ويتم ذلك حسب الخطوات التالية:

- وضع مصفوفة النقل المتضمنة للعرض والطلب والتكاليف الوحدوية والكميات المراد نقلها.
- تساوي العرض والطلب.
- اختيار الخلية المتضمنة لأقل تكلفة في المصفوفة، حيث نبدأ من خلالها عملية التوزيع، ثم الخلية التي تليها بنفس الطريقة إلى غاية تلبية جميع الطلبات من الطاقات المتاحة.

مثال تطبيقي:

نأخذ نفس المثال السابق، حيث أن المطلوب إيجاد حل لمشكلة النقل باستخدام طريقة التكلفة الدنيا مع حساب تكاليف النقل الكلية؟

الحل:

الجدول التالي يمثل الجدول النهائي بعد القيام بعملية التوزيع، وذلك انطلاقا من الخلية التي تحمل أقل تكلفة (2 د) حيث أقصى طاقة متوفرة (60 وحدة) مقابل طلب السوق M_2 (65 وحدة)، والذي يمكن إمداده بـ: 60 وحدة، فيصبح بذلك رصيد المخزن A مساو للصفر مقابل تبقي 5 وحدات غير مشبعة لـ M_2، ثم تستمر عملية التوزيع إلى الخلية الموالية (3 د) ثم التي تليها، فنتحصل على الجدول النهائي للنقل التالي:

العرض	M_2	M_1	إلى/من
~~60~~ 0	60 | 2	| 4	A
~~40~~ ~~35~~ 0	5 | 5	35 | 7	B
~~70~~ 0	65 | 10	70 | 3	C
170 / 170	~~65~~ ~~5~~ 0	~~105~~ ~~35~~ 0	الطلب

يلاحظ من جدول النقل أنه تم تلبية جميع طلبات السوقين باستنفاذ جميع الكميات المتاحة، أما تكلفة النقل الكلية: $CT_{LC} = (60 \times 2) + (5 \times 5) + (35 \times 7) + (70 \times 3) = 600\ DZ < CT_{NWC}$

3: طريقة فوجل (Voguel):

وتسمى بطريقة التكلفة البديلة، ويتم استخدام هذه الطريقة من خلال حساب الفروقات بين أقل تكلفتين في الأسطر والأعمدة، ويمكن تلخيصها في المراحل التالية:

- وضع مصفوفة النقل المتضمنة للعرض والطلب والتكاليف الوحدوية والكميات المراد نقلها.
- تساوي العرض والطلب.
- استخراج التكلفة الفرصية (الفرق) بين أقل تكلفتين في كل سطر وفي كل عمود، مع عدم اعتبار السطر والعمود الوهمي عند حساب الفروقات.
- اختيار أعلى فرق في الأسطر والأعمدة.
- مقابل أعلى فرق نختار الحاملة لأقل تكلفة، نقوم بداية منها بإشباع الطلبات من العرض المتوفر.
- إلغاء السطر أو العمود الذي ينعدم في العرض أو الطلب بعد كل عملية توزيع.
- تكرار الخطوات السابقة، ابتداء من الخطوة الثالثة، إلى أن يتم إشباع كافة الطلبات من العرض المتوفر، أي يكون العرض والطلب بقيم صفرية.

مثال تطبيقي:

نأخذ نفس المثال السابق، حيث المطلوب إيجاد حل لمشكلة النقل باستخدام طريقة فوجل مع حساب تكاليف النقل الكلية؟

من خلال الجدول يتضح أن العرض مساوي للطلب.

استخراج الفرق الأول بين الأسطر والأعمدة، حيث نلاحظ أن الفرق في السطر الأول (A) هو 2 د، وفي السطر الثاني (B) هو 2 د، أما السطر الثالث فيمثل الفرق ما بين 10 د و3 د أي الفرق مساوي لـ 7 د، نفس العملية نقوم بها بالنسبة للأعمدة.

نختار أعلى فرق ما بين الأسطر والأعمدة، وفي هذه الحالة نختار الفرق 7، ثم نختار أقل تكلفة مقابلة وهي 3 د نقوم من خلالها بعملية التوزيع، فيصبح رصيد المخزن (c) صفر لذلك نقوم بإلغاءه من عملية التوزيع (حسب الجدول: الخط الأفقي المتقطع المار من المخزن (c))، ونستمر في احتساب الفروق باستثناء الأسطر والأعمدة الملغاة من عملية التوزيع لنحصل في الأخير على جدول التوزيع النهائي.

إلى/من	M_1	M_2	العرض	الفرق (1)	الفرق (2)	الفرق (3)
A	60 | 4	2	~~60~~ 0	2	2	
B	40 | 7	5	40	2	2	
C	5 | 3	65 | 10	~~70~~ 0	7		
الطلب	~~105~~ 35 0	~~65~~ 5	170 170			
الفرق (1)	1	3				
الفرق (2)	3	3				
الفرق (3)	7	5				

حساب التكلفة الكلية للنقل:

$$CT_{VAM} = (60 \times 2) + (5 \times 5) + (35 \times 7) + (70 \times 3) = 600\ DZ = CT_{LC} < CT_{NWC}$$

يلاحظ من خلال حل مشكلة النقل بالطرق الثلاث السابق ذكرها، أن التكلفة الكلية للنقل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية أكبر منها بالنسبة للطريقتين، في حين تساوت التكلفة الكلية للنقل لكل من طريقة التكلفة الدنيا وفوجل.

رابعا: حالات خاصة في مسائل النقل:

من الحالات الشائعة التي يمكن مصادفتها في مسائل النقل عدم تساوي العرض مع الطلب، وحالة التفكك.

1: عدم تساوي العرض مع الطلب:

إن إيجاد الحل الأساسي الأول، وإيجاد الحل الأمثل يتطلب شرطا أساسيا وهو تساوي العرض مع الطلب، أي: $\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj$

غير أنه عمليا يصعب تحقق هذا الشرط في الواقع، إذ يكون إما العرض أكبر من الطلب أو الطلب أكبر من العرض، وفي هذه الحالة ينبغي العمل على توفير هذا الشرط تحايلا، وذلك كما يلي:

- حالة العرض أقل من الطلب، أي: $\sum_{i=1}^{m} ai < \sum_{j=1}^{n} bj$

ينبغي إضافة منبع (سطر) خيالي إلى جدول المسألة، حيث نفترض أن الكمية التي يعرضها هي قيمة الفرق بين العرض والطلب، وتكاليف النقل من هذا المنبع إلى أي مصب نفترضها معدومة.

- حالة العرض أكبر من الطلب، أي: $\sum_{i=1}^{m} ai > \sum_{j=1}^{n} bj$

ينبغي إضافة مصب (عمود) خيالي إلى جدول المسألة، وتكاليف النقل من أي منبع إلى هذا المصب نفترضها معدومة.

في الحالتين نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأساسي الأول ثم الحل الأمثل بصفة عادية، ثم نحذف في النهاية السطر أو العمود الذي تمت إضافته.

2: حالة التفكك:

ونعني بها أن عدد المتغيرات الداخلة في أي حل أساسي لا تساوي m+n−1 وهو شرط أساسي لإيجاد مسارات اختبار الحل، وللتخلص من هذا المشكل أيضا نلجأ إلى التحايل، وذلك بوضع خلية تصورية –أو أكثر حسب الحالة– داخلة في الحل نفترض قيمتها تساوي ε، أي قيمة بجوار الصفر، ثم نقوم بعد ذلك بإيجاد الحل الأمثل، ونهملها تماما في النهاية باعتبارها قيمة مساعدة فقط، ويتم ذلك سواء حصل التفكك في جدول الحل الأساسي الأول أو في جداول الحل الموالية.

خامسا: الاستخدامات الأخرى لمسائل النقل:

تستخدم مسائل النقل في العديد من المجاهيل الاقتصادية الهادفة إلى التدنئة، ومن أمثلة ذلك، تمويل المشاريع، إذ يتم ذلك عادة عن طريق الاقتراض من البنوك مقابل أسعار فائدة، كما في المثال التالي:

مثال تطبيقي:

مصرف تجاري له ثلاث وحدات بنكية ببلدان مختلفة بإمكانه تمويل 4 مشاريع استثمارية متفرقة، بأسعار فائدة بالنسبة المئوية يوضحها الجدول التالي:

	مشروع 1	مشروع 2	مشروع 3	مشروع 4
وحدة 1	10	14	12	17
وحدة 2	12	9	20	13
وحدة 3	11	15	16	14

الأموال التي تعرضها الوحدات الثلاث هي على التوالي: 40، 50، 70 مليار دينار، أما احتياجات تمويل المشاريع فتقدر لكل مشروع على التوالي: 20، 60، 60، 20 مليار دينار، تكون هذه المسألة في شكل مسألة نقل إذا ما طلب إيجاد خطة تمويل هذه المشاريع بحيث يحصل البنك على أعلى ربح ممكن، أو الخطة التي تتمول بها هذه المشاريع من هذه الوحدات بحيث تتحمل المشاريع مجتمعة أقل تكلفة ممكنة من جراء الاقتراض من الوحدات البنكية.

كما يمكن استخدام مسائل النقل أيضا في تنفيذ المشاريع بأقل تكلفة، أو في تخطيط الشراء أو التموين بالمواد للمصانع، وغير ذلك من المواضيع.