الفصل 5: التوزيعات الاحتمالية

يتميز متغير عشوائي بدالة (تابع) الاحتمال أو ما يسمى بالتوزيع الاحتمالي. سنحاول من خلال هذا الفصل استنتاج علاقة رياضية تسمح لنا بالحصول على احتمال اي قيمة من قيم المتغير العشوائي دون اللجوء الى المجموعة الاساسية S.

1 -قوانين التوزيع الاحتمالي في حالة متغير العشوائي المتقطع:

يوجد عدة قوانين التوزيع الاحتمالي في حالة متغير عشوائي متقطع نذكر منها:

1 1 -**قانون توزيع برنولي** : نقول أن X المتغير العشوائي المتقطع يتبع قانون توزيع برنولي اذا كانت للتجربة المتعلقة بهذا المتغير نتيجتين ممكنتين.

مثلا: رمي قطعة نقود بها حالتين (P/F)، سبر الآراء (نعم/لا)، سحب منتوج من منتجات ألة معينة (فاسد/صالح).

فنلاحظ من خلال الامثلة بأن احدى النتيجتين هي معاكسة للأخرى. فالقيم التي يأخذها xi في حالة النجاح هي 1 و في حالة الخسارة هي 0 حيث: $P(X=0)=q,\ P(X=1)=p$ $\Omega = \{0,1\}$

يستعمل قانون برنولي عندما نقوم بالتجربة مرة واحدة (n=1).

لنفرض تجربة العشوائية E ذات نتيجتين ممكنتين، نسمي النتيجة الاولى "حادث النجاح" او الحادث A و نسمي النتيجة الثانية "حادث الفشل" أو الحادث $\bar{A}$، فان احتمال النجاح هو p حيث: $P(A)=1/2=p$

و عليه فان احتمال الفشل هو q حيث: $P(\bar{A})=1-1/2=1/2=q$

$$q=1-p$$

مثال1: عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فان احتمال ظهور الوجه هو $p=1/2$ و احتمال ظهور الظهر $q=1/2$.

مثال2: عند رمي زهرة النرد مرة واحدة، فاحتمال ظهور رقم 4 هو $p=1/6$ و احتمال عدم ظهوره هو $q=5/6$.

و لكن هل يمثل قانون توزيع برنولي قانون توزيع الاحتمالات؟

نقول أن X يتبع قانون توزيع احتمالات اذا كان $\sum_{i=1}^{n} P(X = xi) = 1$

أي : $P(X=0)+P(X=1)=p+q=(1-p)+p=1$

1-1-أ- المميزات العددية لقانون التوزيع برنوالي :

1 - **التوقع الرياضي**: انطلاقا من العلاقة التعريفية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع فان:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{1} xi.P(X=xi)=O.P(X=0)+1.P(X=1)=p$$

$$\boxed{E(X)=p}$$

2 - **التباين**: تعطى علاقة التباين بالشكل التالي:

$$v(x)=E(X^2)-E(X)^2$$

حيث:

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{1} xi^2.P(X=xi)=0^2.P(X=O)+1^2.P(X=1)=p$$

ومنه:

$$v(X)=p-p^2=p(1-p)=pq$$

اذا:

$$\boxed{v(X)=pq}$$

1 ~~2~~ - قانون توزيع الثنائي (او ثنائي الحدين) La loi Binomiale

نطبق قانون توزيع الثنائي عندما نكرر تجربة برنولي n مرة، حيث ان n عدد صحيح موجب مع ثبات قيمة p (التي تعتبر احتمال النجاح) مهما أعيدت التجربة أي أن الحوادث تكون مستقلة (شرط من شروط برنولي).

و لاستنتاج علاقة قانون توزيع الثنائي سنقوم بدراسة المثال التالي:

" لنعتبر التجربة العشوائية الممثلة في مساءلة فرد حول استفتاء ما"، نتائج هذه التجربة هي نعم (O)/ لا (N).

- حالة n=1:

نسمي الحصول على O بالحادث A او حادث النجاح حيث P(A)=p=1/2

نسمي الحصول على N بالحادث $\bar{A}$ او حادث الفشل حيث P($\bar{A}$)=q=1/2

نعرف المتغير العشوائي X على انه عدد مرات الحصول على الاجابة O أي حادث النجاح. فالقيم الممكنة لـX هي Sx={0,1} حيث 0: تمثل عدم حصول على الاجابة و 1: تمثل حصول على الاجابة.

P(X=0)= P(N)=P($\bar{A}$)=q= 1/2

P(X=1)=P(O)=P(A)=p=1/2

- حالة n=2:

لو نكرر التجربة مرتين، فان المجموعة الاساسية للتجربة هي S={OO,NN,ON,NO}

بالتالي القيم الممكنة لـ X هي: Sx={0,1,2}

P(X=0)=P(N∩N)=P(N).P(N)= $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

P(X=1)=P[(N∩O)∪(O∩N)]=P(N).P(O)+P(O).P(N)=2.P(N).P(O)=

=2. $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}= C_2^1.(\frac{1}{2})^1..(\frac{1}{2})^{2-1}$

و منه: $\mathrm{P(X=1)}=C_{n=2}^{x=1}.(p)^{x=1}.(q)^{n-x}$

P(X=2)=P(O∩O)=P(O).P(O)=P(N).P(O)=

=1.($\frac{1}{2})^2 = C_2^2.(\frac{1}{2})^2..(\frac{1}{2})^{2-1}$

و منه: $\mathrm{P(X=2)}=C_{n=2}^{x=2}.(p)^{x=2}.(q)^{2-2}$

اذا الصيغة العامة التي يعطى بها تابع الاحتمال للمتغير العشوائي X هي :

$$\boxed{P(X=x)=C_n^x\ p^x\ q^{n-x}}$$

حيث: تسمى هذه العلاقة بقانون التوزيع الثنائي.

n: تمثل عدد مرات انجاز التجربة حيث (n=1→30)

x: تمثل قيمة من قيم المتغير العشوائي و أعظم قيمة لها هي n

p: تمثل احتمال حادث النجاح

q: تمثل احتمال حادث الفشل (1-P)

نرمز للمتغير العشوائي المتقطع X الذي تابع احتماله f(x) و يتبع التوزيع الاحتمالي الثنائي بالرمز :

.$X\sim B(n,p)$

مثال 1: في تجربة القاء قطعة نقد غير متوازنة. ما هو احتمال الحصول على الظهر (F) 8 مرات عند 20 رمية، اذا علم أن P(F)=0,4 , P(P)=0,6.

الحل: q=0,6 , p=0,4 , x=8 , n=20

حسب المعطيات: $X \sim B(20,\ 0,4)$

بتطبيق قانون توزيع الثنائي:

$$P(X=8)=C_{n=20}^{x=8}\ P^{x=8}\ Q^{20-8}=C_{20}^{8}\ 0,4^{8}\ 0,6^{12}=0,1797$$

مثال2: في تجربة القاء حجري نرد 30 مرة، اوجد احتمال الحصول على المجموع 9، 10 مرات.

الحل:

بالاستعمال التجربة نجد x=10, n=30

حادث النجاح هو الحصول على المجموع 9 حيث أن احتمال النجاح في هذه الحالة هو p=4/36

و بالتالي احتمال الفشل هو q=1-P=1-4/36= 32/36

و منه $X \sim B(30,\ 4/36)$

بتطبيق قانون توزيع الثنائي:

$$P(X=10)=C_{30}^{10}\ p^{10}\ q^{30-10}=C_{30}^{10}\ \left(\frac{4}{36}\right)^{10}\ \left(\frac{32}{36}\right)^{20}=0,004$$

ملاحظة 1: في بعض قد يصعب علينا حساب احتمال المتغير العشوائي X من اجل قيمة معينة، و لذلك تم تقديم جداول احصائية تؤدي هذا الغرض من اجل قيم مختلفة لـ n, x, p.

ملاحظة2: نستعمل توزيع ثنائي الحدين (أو الثنائي) لما تكون $n \leq 30$.

ملاحظة 3: حتى يكون التوزيع ثنائي الحدين توزيعا احتماليا يجب أن يكون مجموع احتمالاته تساوي 1 أي

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x)=1 \Rightarrow \sum_{x=0}^{n} C_{n}^{x}\ p^{x}\ q^{n-x}=1$$

1-2-أ- المميزات العددية للتوزيع ثنائي الحدين:

1 - **التوقع الرياضي**: E(X)= n.p

البرهان:

$$E(X) = \sum xi.P(X = xi)$$
$$= \sum x.C_n^x P^x (1-P)^{n-x}$$
$$= \sum x \frac{n!}{x!(n-x)!} P^x (1-p)^{n-x}$$
$$= \sum x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!} P^{x-1}P(1-p)^{n-x}$$
$$= nP\sum \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} P^{x-1}(1-P)^{n-x} = nP\sum C_{n-1}^{x-1}P^{x-1}(1-P)^{n-x} = nP\,1$$
$$= nP = E(x)$$

2 - **التباين**: V(X)=npq

برهان:

$$V(X) = E(x^2) - E(X)^2$$
$$= \sum x^2 P(X = x) - (np)^2$$
$$= \sum x^2 C_n^x P^x (1-P)^{n-x} - n^2P^2$$
$$= \sum x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x} - n^2P^2 = \sum (x(x-1)$$
$$+ x) \frac{n!}{x!(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x} - n^2P^2$$
$$= \sum \big(x(x-1)\big) \frac{n!}{x!(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x}$$
$$+ \sum x \frac{n!}{x!(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x} - n^2P^2$$
$$= \sum \big(x(x-1)\big) \frac{n!}{x!(n-x)!} P^x (1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2 =$$
$$= \sum \big(x(x-1)\big) \frac{n!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!} P^{x-2}P^2 (1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2$$
$$= P^2 \sum \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} P^{x-2} (1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2$$
$$= P^2 n(n-1) \sum \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} P^{x-2} (1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2$$
$$= P^2 n(n-1) \sum C_{n-2}^{x-2} P^{x-2} (1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2$$

$$= P^2 n(n-1)1 + nP - n^2P^2 = P^2n^2 - nP^2 + nP - n^2P^2 = -np^2 + np$$
$$= np(1-p) = npq = E(X)$$

3 - **معامل التماثل**: $\propto = 3 + \frac{p-q}{\sqrt{npq}}$

- حالة تماثل لما يكون $\propto = 0$
- حالة تماثل ضعيف لما $\propto$ تبعد عن 0 اي $\propto > 0$
- حالة عدم التماثل لما يكون $\propto < 0$

4 - **معامل التطاول**: $\beta = 3 + \frac{1-pq}{npq}$

- حالة اعتدال لما يكون $\beta = 3$
- حالة تطاول لما يكون $\beta > 3$
- حالة تفلطح لما يكون $\beta < 3$

مثال: صياد يصيب الهدف باحتمال $\frac{3}{10}$. ما هو احتمال أن يصيب الهدف 5 مرات عند 20 طلقة، ثم أحسب $V(X)$, $E(X)$ و معامل التماثل و التطاول.

الحل: حسب المعطيات لدينا $q=\frac{7}{10}$, $p=\frac{3}{10}$, n=20, x=5

تمثل كل طلقة تجربة برنولي ذات احتمال$\frac{3}{10}$ و تجربة ذات 20 طلقات تتبع تجربة ثنائي الحدين أي:

$$x \sim B(20, \frac{3}{10})$$

- احتمال أن يصيب الهدف 5 مرات عند 20 طلقة هو:

$$P(X=5) = C_{20}^{5}\,(\frac{3}{10})^{5}\,(\frac{7}{10})^{20-5} = 0{,}1789$$

- حساب $V(X)$, $E(X)$:

$$E(X)=np=20\ .\ \frac{3}{10}=6$$

$$V(X)=npq=20\ .\ \frac{3}{10}.\ \frac{7}{10}=4{,}2$$

- حساب معامل التماثل:

$$\propto = 3 + \frac{p-q}{\sqrt{\mathrm{npq}}} = 3 + \frac{\frac{3}{10} - \frac{7}{10}}{\sqrt{20\frac{3}{10}\frac{7}{10}}} = 2{,}90$$

نلاحظ بأنه يوجد تماثل و لكن ضعيف لان$\propto > 0$

- حساب معامل التطاول:

$$\beta = 3 + \frac{1-pq}{\mathrm{npq}} = 3 + \frac{1-(\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10})}{20.\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{10}} = 2{,}73$$

1 ~~3~~ – قانون توزيع بواسون ***loi de Poisson***

ان هذا القانون يهتم بالظواهر التي لها حالتين متنافيتين تحقق الحادث أو عدم تحققه، كما رأيناه سابقا في قانون التوزيع الثنائي و لكن في هذا القانون يشترط فيه:

- عدد التجارب التي تقوم بها يكون كبير جدا أي ($n>30$)،
- احتمال النجاح (p) يكون جد صغير حيث ($n.p<5$)

و الصيغة القانونية لتوزيع بواسون تعطى على النحو التالي:

$$\boxed{P(X=x) = \frac{\lambda^x \, e^{-\lambda}}{x!}}$$

حيث: $\lambda = n.p$

x : تمثل قيمة من قيم المتغير العشوائي

e=2,7181

نرمز للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون بالرمز:

1-3-أ- حالات استخدام توزيع بواسون:

لتوزيع بواسون استخدامات و تطبيقات واسعة في مجالات عديدة حيث يسمح لنا هذا بإيجاد احتمال عدد من النجاحات خلال فترة زمنية معينة، نذكر منها:

- عدد حوادث المرور على طريق معين.

- عدد الزبائن الذين يترددون على محل ما خلال فترة زمنية.
- عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها موزع هاتفي خلال فترة زمنية.
- عدد الوحدات الفاسدة في حصة انتاجية معينة.

ملاحظة1: لكي يكون قانون بواسون توزيعا احتماليا يجب أن يكون:

$$\sum P(X = xi) = \sum \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!} = 1$$

ملاحظة2: نستطيع استعمال جدول قانون بواسون لتسهيل عملية الحساب مع استعمال العوامل التالية:، λ، x

مثال1: مصنع من مصانع الانتاج ينتج أقلاما سليمة من العيوب و اخرى بها عيوب. فإذا علمت أن 10% من هذه الاقلام غير جيدة و أشتريت منها صدفة 40 قلم. ما هو احتمال الحصول على قلمين غير جيدة.

الحل:

احتمال الحصول على قلم فاسد هو $p=0,1$

معدل الاقلام فاسدة في 40 قلم هو $\lambda=n.\ p=40.\ 0,1=4$

$\lambda<5$ نقوم بتطبيق قانون بواسون حيث

$$x \sim p(4)$$

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!} = \frac{4^2\, e^{-4}}{2!} = 0,147$$

مثال2:

يتلقى موزع هاتفي لإحدى الادارات العمومية خلال فترة زمنية تقدر بـ 14 د عدد من من المكالمات بمعدل3.

المطلوب: حساب احتمال:

1 - عدم تلقي أي مكالمة
2 - تلقي مكالمة واحدة
3 - تلقي مكالمتين
4 - تلقي على الاقل مكالمتين

الحل: $\lambda = 3$

1 - احتمال عدم تلقي أي مكالمة:

$$P(X=0)=\frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!}=\frac{3^0\, e^{-3}}{0!}=\frac{1}{e^3}=0{,}04978$$

2 - احتمال تلقي مكالمة واحدة:

$$P(X=1)=\frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!}=\frac{3^2\, e^{-3}}{1!}=\frac{3}{e^3}=0{,}14536$$

3 - احتمال تلقي مكالمتين:

$$P(X=2)=\frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!}=\frac{3^2\, e^{-3}}{2!}=0{,}22404$$

4 - احتمال تلقي مكالمتين على الاقل:

$P(X\geq2)= P(X=2)+P(X=3)+ \ldots\ldots.+P(X=n)= 1-P(X<2)$

$=1-[P(X=0)+P(X=1)]= 1-(0{,}04978+0{,}14536)=0{,}801$

1-3-ب-المميزات العددية للتوزيع بواسون:

1 - **التوقع الرياضي:** $\boxed{E(X)=\lambda=n.p}$

برهان:

$$E(X)=\sum x\,P(X=x)=\sum x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$=\sum x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)!}=e^{-\lambda}\sum\frac{\lambda\,\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=$$

لدينا $e^{\lambda}=\sum\frac{\lambda^k}{k!}$ نقوم بتعويضه في القانون

$$E(X)=e^{-\lambda}\,\lambda\ e^{\lambda}=\lambda$$

2 - ***التباين:*** $\boxed{V(X)=\lambda=n.p}$

برهان:

$$V(X)=\sum x^2\,P(X=x)-E(X)^2$$

$$= \sum x^2 \frac{e^{-\Lambda}\Lambda^x}{x!} - \Lambda^2 = \sum (x(x-1)+x)\frac{e^{-\Lambda}\Lambda^x}{x!} - \Lambda^2$$

$$= \sum (x(x-1)\frac{e^{-\Lambda}\Lambda^x}{x!} + \sum x\frac{e^{-\Lambda}\Lambda^x}{x!} - \Lambda^2$$

$$= \sum (x(x-1)\frac{e^{-\Lambda}\Lambda^x}{x(x-1)(x-2)!} + \Lambda - \Lambda^2$$

$$= e^{-\Lambda}\sum \frac{\Lambda^x}{(x-2)!} + \Lambda - \Lambda^2 =$$

$$= e^{-\Lambda}\sum \frac{\Lambda^2\Lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \Lambda - \Lambda^2 = e^{-\Lambda}\Lambda^2 e^{\Lambda} + \Lambda - \Lambda^2$$

$$V(X) = \Lambda$$

3 - **معامل التماثل**: $\boxed{\propto = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}}$

-حالة تماثل لما يكون $\propto = 0$

-حالة عدم التماثل لما يكون $\propto > 0$

4 - **معامل التطاول**: $\boxed{\beta = 3 + \alpha}$

- حالة اعتدال لما يكون $\beta = 3$
- حالة تطاول لما يكون $\beta > 3$

1 4 - **توزيع فوق الهندسي**: Loi hypergéométrique

اذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع فوق الهندسي، فان الدالة الاحتمالية لهذا المتغير تعرف كالتالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{C_k^x \ C_{N-k}^{n-x}}{C_N^n}, & x = 0,2,3, \dots . n \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

يشير هذا التوزيع الى ظاهرة عامة بحجم (N) و هذه الظاهرة يمكن تجزئتها حسب خواص أو مميزات معينة الى ظاهرة جزئية (k) و ظاهرة جزئية أخرى $(N-k)$، فإذا أخذنا عينة من الظاهرة العامة (N) بحجم (n) و اذا كان المتغير x يشير الى الظاهرة الجزئية الاولى فان $(n-x)$ سوف يشير الى الظاهرة الجزئية الثانية.

مثلا: في وعاء به N كرة حيث يوجد k كرة بيضاء و $\mathrm{N-k}$ كرة سوداء. نسحب بطريقة عشوائية مرة واحدة n كرة (حيث $n\leq N$) و نهتم في هذا السحب بعدد كرات البيضاء. و نعتبر أن X متغير عشوائي الذي يأخذ بعين الاعتبار عدد كراة البيضاء المتحصل عليها عند n سحب.

بما أننافي فضاء حوادث منتهية و متساوية الاحتمالات (أي كل كرة لها نفس احتمال الظهور) اذا نظرية الاحتمالات تسمح لنا بحساب احتمال الحوادث $(X=n)$.

حالات الممكنة هي عدد حالات سحب مجموعة من n كرة من بين N كرة حيث: $\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}}$

حالات الموافقة هي عدد حالات سحب مجموعة من x كرة بيضاء من بين k كرة بيضاء و $(\mathrm{n-x})$ كرة سوداء من بين $(\mathrm{N-k})$ كرات الباقية حيث: $\mathrm{C}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{x}}\ \mathrm{C}_{\mathrm{N-k}}^{\mathrm{n-x}}$

لدينا اذا:

$$\boxed{P(X=x)=\frac{\mathrm{C}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{x}}\ \mathrm{C}_{\mathrm{N-k}}^{\mathrm{n-x}}}{\mathrm{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{n}}}}$$

هذا القانون يسمى بقانون فوق الهندسي حيث عناصره n,k,N و يرمز له بـ

$$X\sim H(N,K,n)$$

مثال1: وعاء به 10 كرات منها 6 بيضاء و البقية سوداء. نسحب مجموعة من 5 كرات. المتغير العشوائي X هو عبارة عن عدد كرات المسحوبة تكون بيضاء. ما هو احتمال أن تكون كريتيين مسحوبتين بيضاء من بين 5 المسحوبة؟

نحن امام قانون فوق الهندسي حيث: $X\sim H(10,6,5)$

$$P(X=2)=\frac{\mathrm{C}_{6}^{\mathrm{x}}\ \mathrm{C}_{10-6}^{5-\mathrm{x}}}{\mathrm{C}_{10}^{5}}=\frac{\mathrm{C}_{6}^{2}\ \mathrm{C}_{4}^{5-2}}{\mathrm{C}_{10}^{5}}=0{,}24$$

مثال2: قسم يحتوي على 50 طالب، 20 منهم أجانب. ما هو احتمال سحب مجموعة من 15 طالب حيث يكون 5 منهم اجانب.

نعرف X المتغير العشوائي الذي يعطينا عدد الاجانب من مجموعة 15 طالب مختارين.

نحن امام قانون فوق الهندسي حيث: $X\sim H(50,20,15)$

$$P(X=5)=\frac{C_{20}^{x}\ C_{50-20}^{15-x}}{C_{50}^{15}}=\frac{C_{20}^{5}\ C_{4}^{15-5}}{C_{50}^{15}}=\ 1{,}106\ e^{-18}$$

ملاحظة: في قانون ثنائي الحدين يكون فيه سحب مع الارجاع لان التجربة فيه تكون متكررة و مستقلة، و لكن في حالة قانون فوق الهندسي يكون فيه السحب بدون ارجاع.

1-4-أ- **خصائص العددية لقانون فوق الهندسي**:

1 - **التوقع الرياضي**: $E(X)=n.\frac{k}{N}$

2 - **التباين**: $V(X)=\frac{n\,.k}{N^2}\ \frac{(N-k)(N-n)}{(N-1)}$

مثال : وعاء به 10 كرات منها 6 بيضاء و البقية سوداء. نسحب مجموعة من 5 كرات. المتغير العشوائي X هو عبارة عن عدد كرات المسحوبة تكون بيضاء. أحسب $E(X)$ و $V(X)$

$$X\sim H(10,6,5)$$

$$E(X)=n.\frac{k}{N}=5\ \frac{6}{10}=3$$

$$V(X)=\frac{n\,.\,k}{N^2}\ \frac{(N-k)(N-n)}{(N-1)}=\frac{5\,.6}{10^2}\ \frac{(10-6)(10-5)}{(10-1)}=\ 0{,}67$$