المحور الخامس: البرمجة الخطية: الثنائية أو الازدواجية

تمهيد:

لكل مشكلة برمجة خطية هناك مشكلة أخرى مرتبطة بها، نسمي إحدى هاتين المشكلتين بالمشكلة الأولية (**primal model**)، والأخرى نسميها النموذج المقابل (**dual model**)، وتمتلك كلتا المشكلتين خواصا مرتبطة مع خواص الأخرى، فمثلا الحل الأمثل لإحدى هاتين المشكلتين يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للأخرى، أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل مشتق منه.

أولا: فوائد استخدام النموذج المقابل:

- يساعد على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المشكلة المقابلة تستلزم خطوات رياضية أقل تعقيدا من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحيانا.
- للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (إن وجدت) أي عندما تكون المصادر أو الموارد المتاحة بكميات سالبة، وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي.
- يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثيرا من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على فهم أبعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل.

ثانيا: خطوات تحويل البرنامج الأولي إلى البرنامج الثنائي:

- نعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي (**Min**) فإننا نعكسها ونجعلها في النموذج المقابل بصيغة (**Max**) والعكس صحيح.
- استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز (**Xj**) في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار إليها بالرمز (**Yi**) في النموذج المقابل، وتحويل رمز دالة الهدف من (**Z**) في النموذج الأولي إلى (**W**) في النموذج المقابل، حيث ($i = 1 \ldots\ldots m$)، m عدد القيود في النموذج الأولي.
- جعل معاملات متغيرات دالة الهدف للنموذج الأولي، في الطرف الأيمن للقيود الجديدة للنموذج المقابل.
- جعل القيم التي تقع في الجهة اليمنى من قيود النموذج الأولي معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل.
- تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في القيود للنموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أو الأسطر أعمدة، والأعمدة صفوفا.

- تغير اتجاه القيود من (≤) إلى (≥) أو العكس، بحيث تحول المتراجحات من (≤) في حالة (**Max**) إلى (≥) في حالة (**Min**) والعكس صحيح.

ثالثا: ثنائية البرامج القانونية:

مثال توضيحي: أوجد النموذج المقابل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية:

$$\mathbf{Max\ Z = 5\ X_1 + 6\ X_2}$$

$$s/c \begin{cases} X_1 + 9\,X_2 \le 60 \\ 2\,X_1 + 3\,X_2 \le 45 \\ 5\,X_1 - 2\,X_2 \le 20 \\ X_2 \le 30 \\ X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

الحل: النموذج الثنائي (المقابل) هو:

$$\mathbf{Min\ W = 60\ y_1 + 45\ y_2 + 20\ y_3 + 30\ y_4}$$

$$s/c \begin{cases} y_1 + 2\,y_2 + 5\,y_3 \ge 5 \\ 9\,y_1 + 3\,y_2 - 2\,y_3 + y_4 \ge 6 \\ y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0;\ y_4 \ge 0 \end{cases}$$

بما أن الحل الأمثل لإحدى المشكلتين يمكن الحصول عليه من الحل الأمثل للمشكلة الأخرى، فإنه سيكون من الأسهل حل النموذج المقابل في هذه الحالة، وذلك لأن الصعوبات الحسابية في حل مشكلة البرمجة الخطية التي تأتي من كثرة القيود، أكثر من تلك التي تأتي من كثرة المتغيرات، وهذا يعطي إحدى فوائد دراسة المشاكل المقابلة.

رابعا: ثنائية البرامج المختلطة:

- إذا كانت الدالة من النوع (**Max**) وتضمنت قيدا من النوع أكبر أو يساوي (≥) يتم تحويله إلى قيد من النوع أقل أو يساوي (≤) وذلك بضرب القيد في (-1).
- أما إذا كانت الدالة من (**Max**) وتضمنت قيدا من نوع مساواة (=)، يتم تحويله إلى قيدين، واحد من نوع أقل أو يساوي (≤)، والثاني من نوع أكبر أو يساوي (≥)، فيتم ترك القيد الأول على حاله، أما الثاني فيتم تحويله إلى قيد من نوع أقل أو يساوي (≤) وذلك بضرب القيد في (-1).

- العكس في حالة دالة من النوع (**Min**)، فإذا تضمنت قيدا من النوع أقل أو يساوي (≤) يتم تحويله إلى قيد من النوع أكبر أو يساوي (≥) وذلك بضرب القيد في (-1).
- أما إذا كانت الدالة من النوع (**Min**) وتضمنت قيدا من نوع مساواة (=)، يتم تحويله إلى قيدين، واحد من النوع أقل أو يساوي (≤)، والثاني من النوع أكبر أو يساوي (≥)، فيتم ترك القيد الثاني على حاله أما القيد الأول فيتم تحويله إلى قيد من النوع أكبر أو يساوي (≥) وذلك بضرب القيد في (-1).

ملاحظة:

هذه التغييرات نحدثها على مستوى البرنامج الأولي قبل كتابة البرنامج الثنائي.

مثال 1: أوجد البرنامج الثنائي لهذا البرنامج:

$$\textbf{Max } Z = 30 X_1 + 40 X_2$$

$$\text{s/c}\begin{cases} 2 X_1 + 3 X_2 \le 20 \\ X_1 + 3 X_2 \ge 15 \\ X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

يصبح هذا البرنامج كالتالي:

$$\textbf{Max } Z = 30 X_1 + 40 X_2$$

$$\text{s/c}\begin{cases} 2 X_1 + 3 X_2 \le 20 \\ - X_1 - 3 X_2 \le -15 \\ X_1 \ge 0;\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

وبالتالي يكون البرنامج المرافق له على الشكل:

$$\textbf{Min } W = 20 y_1 - 15 y_2$$

$$\text{s/c}\begin{cases} 2 y_1 - y_2 \ge 30 \\ 3 y_1 - 3 y_2 \ge 40 \\ y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

مثال 1: أوجد البرنامج الثنائي لهذا البرنامج:

$$\textbf{Max } Z = 10 X_1 + 8 X_2 + 24 X_3$$

$$s/c \begin{cases} 4 X_1 + 6 X_2 + 2 X_3 = 12 \\ 2 X_1 + 3 X_2 + 4 X_3 \leq 20 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

يصبح هذا البرنامج كالتالي:

$$\textbf{Max } Z = 10 X_1 + 8 X_2 + 24 X_3$$

$$s/c \begin{cases} 4 X_1 + 6 X_2 + 2 X_3 \leq 12 \\ -4 X_1 - 6 X_2 - 2 X_3 \leq -12 \\ 2 X_1 + 3 X_2 + 4 X_3 \leq 20 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0;\ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

وبالتالي يكون البرنامج المرافق له على الشكل التالي:

$$\textbf{Min } W = 12 y_1 + 20 y_2$$

$$s/c \begin{cases} 4 y_1 + 2 y_2 \geq 10 \\ 6 y_1 + 3 y_2 \geq 8 \\ 2 y_1 + 4 y_2 \geq 24 \\ y_1 \forall;\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

$y_1 \forall$: معناه أن المتغير y_1 غير محدد الإشارة، لأن القيد المقابل له في البرنامج الأصلي عبارة عن مساواة، أي هو عبارة عن متغير حر: $y_1 \in (-\infty, +\infty)$ وغير خاضع لشرط عدم السالبية.

خامسا: المقارنة بين الحلول المثلى للبرنامج الأولي مع البرنامج الثنائي:

مثال توضيحي:

$$\textbf{Min } Z = 3 X_1 + 10 X_2$$

$$s/c \begin{cases} 5 X_1 + X_2 \geq 10 \\ -2 X_1 + 7 X_2 \geq 14 \\ X_1 \geq 0;\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحل: تم التوصل إلى جدول الحل الأمثلي للبرنامج الأولي باستخدام طريقة السمبلكس وهو كالتالي:

VB \ VHB	X_1	X_2	S_1	S_2	bi
X_1	1	0	$\frac{-7}{37}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{56}{37}$
X_2	0	1	$\frac{-2}{37}$	$\frac{-5}{37}$	$\frac{90}{37}$
Zj-Cj	0	0	$\frac{-41}{37}$	$\frac{-47}{37}$	$\frac{1068}{37}$

$X_1 = \frac{56}{37}$ $X_2 = \frac{90}{37}$ $S_1 = 0$ $S_2 = 0$ $Z^* = \frac{1068}{37}$

البرنامج الثنائي:

$$\text{Max } W = 10\,y_1 + 14\,y_2$$

$$s/c\begin{cases} 5\,y_1 - 2\,y_2 \le 3 \\ y_1 + 7\,y_2 \le 10 \\ y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0 \end{cases}$$

تم التوصل إلى جدول الحل الأمثلي للبرنامج الثنائي باستخدام طريقة السمبلكس وهو كالتالي:

VB \ VHB	y_1	y_2	S_1'	S_2'	bi
y_1	1	0	$\frac{7}{37}$	$\frac{2}{37}$	$\frac{41}{37}$
y_2	0	1	$\frac{-1}{37}$	$\frac{5}{37}$	$\frac{47}{37}$
Wj-Cj	0	0	$\frac{56}{37}$	$\frac{90}{37}$	$\frac{1068}{37}$

$y_1 = \frac{41}{37}$ $y_2 = \frac{47}{37}$ $S_1' = 0$ $S_2' = 0$ $Z^* = \frac{1068}{37}$

الاستنتاج والمقارنة:

من جدول الحل الأمثلي للبرنامج الأولي وجدنا:

- قيمة متغير القرار $X_1 = \frac{56}{37}$ وهي قيمة تقابل S_1' في السطر الأخير من جدول الحل الأمثلي للبرنامج الثنائي.
- قيمة متغير القرار $X_2 = \frac{90}{37}$ وهي قيمة تقابل S_2' في السطر الأخير من جدول الحل الأمثلي للبرنامج الثنائي.

- وإذا ما نظرنا للسطر الأخير للبرنامج الأولي، فإننا نجد أن قيمة $S_1 = \frac{-41}{37}$ بالقيمة المطلقة أي $\frac{41}{37}$، تقابلها قيمة y_1 في البرنامج الثنائي.
- قيمة $S_2 = \frac{-47}{37}$ بالقيمة المطلقة أي $\frac{47}{37}$، تقابلها قيمة y_2 في البرنامج الثنائي.
- نلاحظ أن قيمة دالة الهدف متساوية في جدول الحل الأمثلي للبرنامجين.

ملاحظة:

- إن هذا التقابل يتم على وجه الترتيب، مع إهمال الإشارة السالبة.
- أما بقية القيم الأخرى فإنها تحدد وفق العلاقة بين المتغيرات: متغيرات القرار في البرنامج الأولي تصبح متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي، ومتغيرات الفجوة للبرنامج الأولي تصبح متغيرات القرار للبرنامج الثنائي.