CHPITRE 4

Chapitre IV : Modélisation du variogramme

IV.1.5 Analyse de l'anisotropie

Il existe certains phénomènes, dont la continuité spatiale n'est pas nécessairement la même dans toutes les directions. Lorsque le variogramme est calculé pour tout couple de points dans certaines directions comme Nord-Sud ou Est-Ouest, il révèle parfois des différences de comportement (c'est-à-dire une anisotropie). Si cela ne se produit pas, le variogramme ne dépend alors que de la distance entre les points, et on parle alors d'isotropie.

Lorsqu'on calcule un variogramme, il est important d'utiliser au minimum quatre directions. Si le variogramme était calculé pour seulement deux directions perpendiculaires, on risquerait de passer à côté de l'anisotropie.

Bien que dans la nature il existe une très grande variété d'anisotropies, en géostatistique, on ne peut modéliser aisément que les anisotropies géométriques. Les autres anisotropies peuvent être approchées en combinant plusieurs modèles isotropes ou avec anisotropie géométrique. Généralement on distingue deux principaux types d'anisotropie : l'anisotropie géométrique et l'anisotropie zonale.

1) Anisotropie géométrique

Appelée aussi anisotropie elliptique : ce type d'anisotropie est déterminer par des variogrammes directionnels qui ont les mêmes paliers dans toutes les directions même si leurs portées sont différentes, ou des pentes différentes lorsque il s'agit des variogrammes linéaires. Dans ce cas l'anisotropie peut être corrigée par une transformation affine des coordonnées.

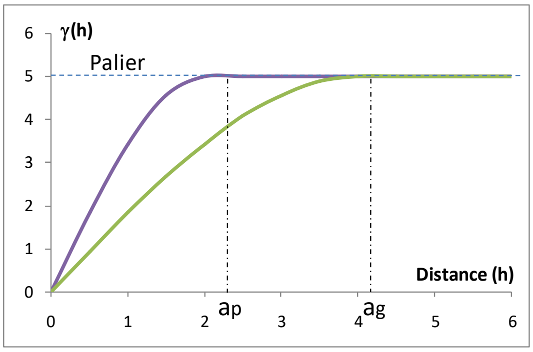

Fig. 01 : Anisotropie modèle sphérique

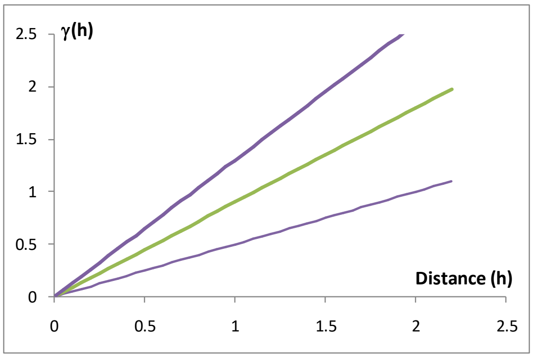

Fig. 02 : Anisotropie modèle linéaire

- On observe dans diverses directions des paliers et des composantes pépitiques identiques mais des portées différentes.

- Les portées maximales (ag) et minimales (ap) s'observent selon deux directions orthogonales.
- On peut rendre les portées identiques (et égales à ag suivant toutes les directions en multipliant la composante de la portée parallèle à ap par le facteur (ag/ap). Les portées décrivent une ellipse dont l'axe majeur est orienté parallèlement à ag.

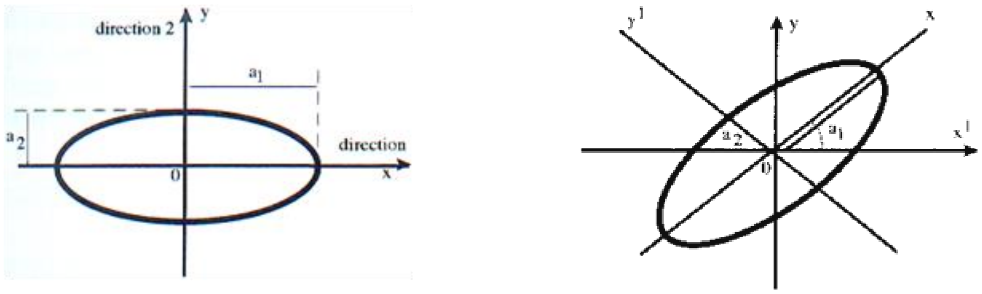

Fig. 03 : Deux exemples d'elipsses d'anisotropie

L'équation de l'ellipse est donnée par : $$\frac{(a_\theta Cos\theta)^2}{a_g^2} + \frac{(a_\theta Sin\theta)^2}{a_p^2} = 1$$

Ce type d'anisotropie peut être corrigé par une transformation des coordonnées. Connaissant a_g et a_p, on peut trouver a_θ, où θ désigne l'angle mesuré par rapport à la direction où est rencontrée ag.

$$a_\theta = \frac{a_g a_p}{\left[a_p^2\, Cos^2\theta + \, a_g^2 Sin^2\theta\right]^{1/2}}$$

Exemple :

Un gisement 2D est modélisé par un modèle avec anisotropie géométrique. Le modèle est sphérique avec C=17%^{2} et effet de pépite C0=13%^{2} et les portées sont de 100m dans la direction (convention trigonométrique) de plus grande continuité (30^o) et 60m dans la direction de plus petite continuité (120^o). Quelle est la valeur du variogramme entre deux observations situées aux coordonnées (x_1,y_1)=(10,30) et (x_2,y_2)=(40,20).

Réponse :

On calcule d'abord la distance séparant les deux points et la direction qu'ils définissent :

- La distance est donnée en appliquons le théorème de Pythagore par l'expression :

$$h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\ \ avec\ \begin{cases}\Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta x = y_2 - y_1\end{cases}$$

d'où $$h = \sqrt{(20-30)^2 + (40-10)^2}\ = 31.62m$$

- La direction que définissent les deux points est :
  $\theta = arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) = arctan\left(\frac{-10}{30}\right) = -18.4°$

- Cette direction forme un angle de (θ =48.4^o) avec la direction de plus grande continuité (c à d suivant ag).

On calcule la portée dans cette direction en utilisant la formule donnant aθ :

$$a_\theta = \frac{100 \times 60}{\left[60^2 \ Cos^2 48.4 + \ 100^2 \ Sin^2 48.4\right]^{1/2}} = 70.81m$$

On calcule la valeur du variogramme en utilisant l'équation du modèle sphérique pour la distance h entre les deux points et avec la portée 70.81m:

Sachant que le modèle de variogramme c'est modèle sphérique avec un C=17%^{2} et effet de pépite C0=13%^{2}, et de portée a_θ = 70.81m calculée suivant la direction de plus grande continuité. L'expression du variogramme est :

$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 + C * \left[1.5\left(\frac{h}{a}\right) - 0.5\left(\frac{h}{a}\right)^3\right], & 0 \le h \le a \\ C_0 + C, & h > a \end{cases}$$

Pour h = 31.62 m

$$\gamma(h) = 13 + 17 * \left[1.5\left(\frac{31.62}{70.81}\right) - 0.5\left(\frac{31.62}{70.81}\right)^3\right] = 23.63\ \%^2$$

Pour la détection des anisotropies géométriques on doit vérifier certaines conditions :

a) Le facteur d'anisotropie géométrique obtenu avec les variogrammes expérimentaux sous-estime en général le véritable facteur d'anisotropie en raison de l'utilisation d'une fenêtre angulaire et du fait que les variogrammes expérimentaux ne sont pas nécessairement orientés exactement selon les directions principales de l'ellipse d'anisotropie.
b) L'estimation correcte et à la limite, la détection, d'anisotropie géométrique n'est possible, en pratique, qu'à quatre conditions (fortement liées) devant être remplies simultanément :
   - Le nombre de données est suffisant (au moins 50)
   - Le facteur d'anisotropie est important (au moins 1.5)
   - Une des directions utilisées dans le calcul du variogramme est près de la direction de plus grande portée.
   - La fenêtre angulaire utilisée est suffisamment étroite.

2) **Anisotropie zonale**

Appelée aussi stratifiée, ce type d'anisotropie est très rare, elle n'est rencontrée que dans certain cas, lorsqu'il s'agit de la troisième dimension.

Dans un domaine à 3D la direction verticale joue souvent un rôle particulier parce qu'il y a plus de variations entre les strates qu'à l'intérieur des strates. Ce type d'anisotropie est plus complexe.

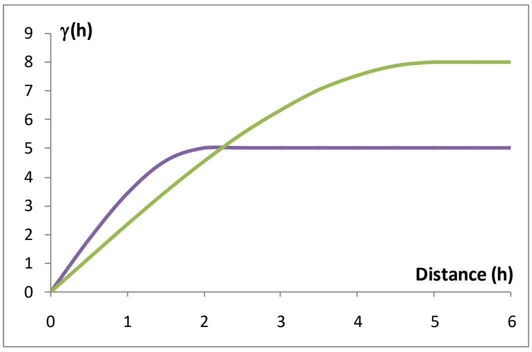

Fig. 04 : anisotropie zonale

Dans ces cas, la pratique courante est de séparer le variogramme en deux tenues, le premier étant isotrope, et le second ne dépendant que de la composante verticale :

$$\gamma(h) = \ variogramme\ isotrope + composante\ verticale$$

$$\gamma_{Zonale}(h, \theta) = \gamma_{isotrope}(h) + \ \gamma_p(h.sin\theta)$$

Ou l'indice p représente le modèle anisotrope suivant la direction de portée minimale.

IV.1.6 Conditions de calcul de variogrammes et l'ajustement de modèles

- On accorde plus de poids aux points du variogramme expérimental calculés avec beaucoup de paires.
- On essaie d'avoir $N(h) \geq 30$ pour chaque point expérimental du variogramme. Si ce n'est pas possible pour certaines classes, on accorde moins d'importance à ces points. Si le nombre de paires est très faible (<10), on ne considère plus du tout le point.
- On accorde plus de poids aux premiers points du variogramme (h petit) car ce sont ces valeurs qui ont le plus d'impact dans les calculs géostatistiques.
- Lorsque h dépasse environ $\frac{d_{max}}{2}$, on ne tient pas compte des valeurs du variogramme. dmax est la taille du phénomène étudié dans la direction considérée.
- On cherche à obtenir des modèles les plus simples possible qui rendent bien compte des valeurs expérimentales.

Toute modélisation d'un variogramme doit passer par les étapes suivantes :

- Calculer les variogrammes directionnels selon différentes directions (ex. 0°, 45°, 90°, 135°) ainsi que le variogramme omnidirectionnel (i.e. sans tenir compte de la direction). La géologie peut apporter une information précieuse dans le choix des directions et la présence ou non d'anisotropies.
- Vérifier les critères ci-dessus : $N(h) \geq 30$, h < dmax/2
- Si nécessaire, augmenter la tolérance angulaire ou le pas de calcul de façon à augmenter N(h).
- Déterminer s'il y a anisotropie (différences de palier ou de portées qui ne peuvent raisonnablement être imputées à des fluctuations aléatoires du variogramme).
- Procéder à l'ajustement d'un modèle anisotrope ou isotrope selon le cas (habituellement par essai et erreur, bien que l'on puisse aussi obtenir ces ajustements de façon automatique par régression (pondérée, et souvent, non linéaire).
- Chercher à respecter la règle de la parcimonie : adopter les modèles les plus simples possibles qui permettent un ajustement adéquat. Comparer des modèles concurrents à l'aide de la technique de validation croisée.