CHPITRE 3

Chapitre III : Analyse de la structure spatiale de la variable

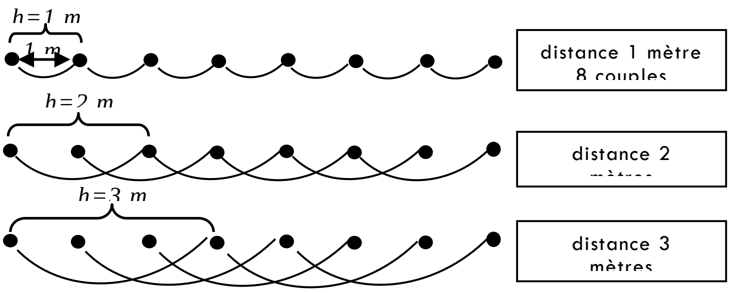
III.2 Analyse de la structure spatiale de la variable

III.2.3 Calcul du variogramme

1) Calcul du variogramme (Cas d'échantillonnage à une Dimension « 1D »)

On cherche à construire un graphique représentant en abscisse les distances h séparant les points et en ordonnée les valeurs du variogramme (semi-variances).

La construction du variogramme est illustrée ci-dessous par des schémas établis à partir de 8 points d'observation répartis à distance égale de 1 mètre le long d'un transect.



Ce schéma montre que le nombre de points participant au calcul du variogramme diminue au fur et à mesure que la distance augmente. Les valeurs de semi-variance risquent donc d'être moins précises pour les grandes valeurs de h.

Exemple :

Soit deux exemples fictifs correspondant à des observations disposées le long d'un transect à des intervalles réguliers de 1 mètre.

Calculez pour chacun des exemples: - la moyenne; - la variance; - $\gamma(1)$, $\gamma(2)$ et $\gamma(3)$

1er Cas :

4 3 2 1 0 1 2 3 4

1 m

1er Cas :

4 2 1 0 3 1 2 4 3

1 m

Solution :

1. **Calcule de la moyenne et de la variance pour les deux cas :**

	Formule	Cas 01	Cas 2
Moyenne	$\bar{Z} = \frac{\sum Z(xi)}{N}$	2.22	2.22
Variance (s^2)	$\hat{s}^2 = \frac{\sum(Z(xi) - \bar{Z})^2}{N-1}$	1.94	1.94

2. **Calcule du variogramme γ(h) pour le premier cas :**

La valeur du variogramme γ(h) est donnée par l'expression suivante :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2\,m}\sum_{i=1}^{m}[Z(xi + h) - Z(xi)]^2$$

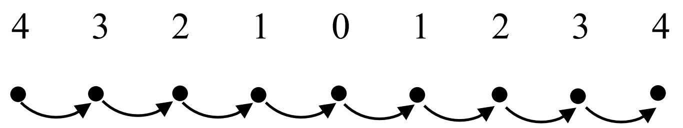
Ou :

- m est le nombre possible de couples qu'on peut former par les valeurs d'observations disponibles, utilisés pour le calcule de γ(h) ;
- Z(xi) et Z(xi+h) sont les valeurs des points d'observations formant les différents couples.

1er Cas :

Alors, on doit d'abord fixer la distance h pour laquelle on veut calculer γ(h) ;

Pour h =1 m les couples de points utilisés sont comme le montre la figure :



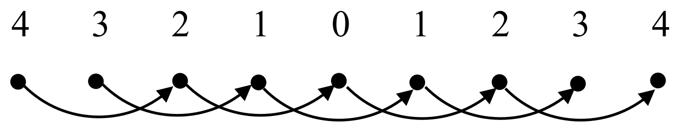
On compte huit (08) couple c à d m =8 et le variagramme est :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2\ (8)}[(4-3)^2 + (3-2)^2 + (2-1)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2 + (2-3)^2 + (3-4)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{16}[(1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{8}{16} = 0.5$$

Pour h =2 m les couples de points utilisés sont comme le montre la figure :



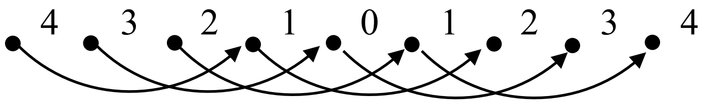
On compte huit (07) couple c à d m =7 et le variagramme est :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2\ (7)}[(4-2)^2 + (3-1)^2 + (2-0)^2 + (1-1)^2 + (0-2)^2 + (1-3)^2 + (2-4)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{14}[(2)^2 + (2)^2 + (2)^2 + (0)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{24}{14} = 1.71$$

Pour h =3 m les couples de points utilisés sont comme le montre la figure :



On compte huit (06) couple c à d m =6 et le variagramme est :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2\ (6)}[(4-1)^2 + (3-0)^2 + (2-1)^2 + (1-2)^2 + (0-3)^2 + (1-4)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{12}[(3)^2 + (3)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (-3)^2 + (-3)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{38}{12} = 3.16$$

Les résultats du premier cas se résument dans le tableau ci-contre :

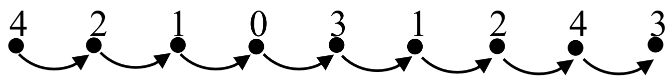
h	m	γ(h) (Cas 01)
1	8	0.5
2	7	1.71
3	6	3.16

3. Calcule du variogramme γ(h) pour le deuxième cas :

2ème Cas :

On reprend la même procédure mais avec les valeurs de l'échantillonnage du deuxième cas. Alors, on fixe la distance h pour laquelle on veut calculer γ(h) ;

Pour h =1 m les couples de points utilisés sont comme le montre la figure :



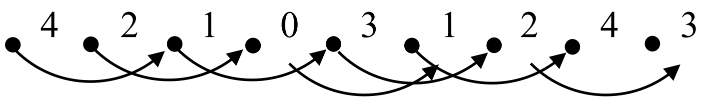
On compte huit (08) couple c à d m =8 et le variagramme est :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2\ (8)}[(4-2)^2 + (2-1)^2 + (1-0)^2 + (0-3)^2 + (3-1)^2 + (1-2)^2 + (2-4)^2 + (4-3)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{16}[(2)^2 + (1)^2 + (1)^2 + (-3)^2 + (2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (1)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{25}{16} = 1.56$$

Pour h =2 m les couples de points utilisés sont comme le montre la figure :



On compte huit (07) couple c à d m =7 et le variagramme est :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2\ (7)}[(4-1)^2 + (2-0)^2 + (1-3)^2 + (0-1)^2 + (3-2)^2 + (1-4)^2 + (2-3)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{14}[(3)^2 + (2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{29}{14} = 2.07$$

Pour h =3 m les couples de points utilisés sont comme le montre la figure :

4 2 1 0 3 1 2 4 3

On compte huit (06) couple c à d m =6 et le variagramme est :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2\ (6)}[(4-0)^2 + (2-3)^2 + (1-1)^2 + (0-2)^2 + (3-4)^2 + (1-3)^2]$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{12}[(4)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2]$$

$$\boldsymbol{\gamma(h) = \frac{26}{12} = 2.16}$$

Les résultats du premier cas se résument dans le tableau ci-contre :

h	**m**	**γ(h) (Cas 02)**
1	8	1.56
2	7	2.07
3	6	2.16

Conclusion :

Les résultats obtenus permettent de conclure que :

- Dans les deux cas les échantillons présentent les mêmes observations et par conséquent la même moyenne et même variance. Mais, on voit clairement qu'ils n'ont pas le même degré de continuité spatiale, la 1ère série étant nettement plus continue que la seconde.
- Par contre l'analyse des résultats du variogramme montrent que la 1ère série présente une croissance continue alors que la seconde série montre un variogramme à peu près constant à un niveau près de la variance expérimentale.

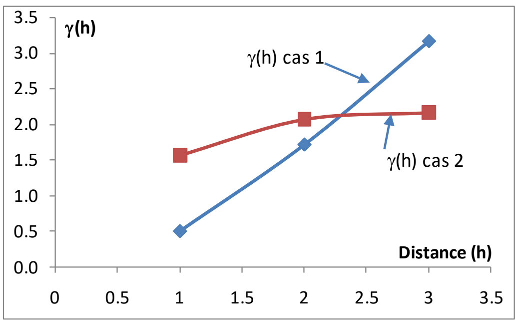


Fig. 1 : Représentation graphique du variogramme

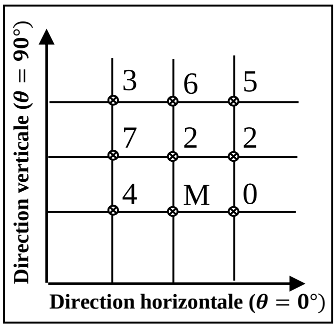
2) Calcul du variogramme (Cas d'échantillonnage à deux Dimension «2D»)

Les phénomènes naturels ne présentent pas la même continuité spatiale dans les différentes directions. Par exemple un champ de pluviométrie, ne varie pas de manière identique dans toutes les directions, il se pourrait que des hauteurs de pluies montrent une meilleure continuité dans la direction Ouest - Est que perpendiculairement à celle-ci. De même, pour la contamination par un polluant dans le sol, on pourrait observer une meilleure continuité horizontalement que verticalement en raison de la gravité.

Afin de déterminer l'isotopie ou l'anisotropie de la structuration d'un phénomène, il est necessaire de calculer le variogramme directionnel c'est-à-dire en différentes directions (au moins quatre directions)

Considérons une matrice de données 3 x 3 ayant les valeurs suivantes (la distance horizontale et verticale entre 2 éléments consécutifs est de 1 m et M indique une donnée manquante).

Dans ce cas le variogramme peut être calculé selon certaines directions spécifiques et on note :



$$\gamma(h,\theta) = \frac{1}{2\,m(h,\theta)} \sum_{i=1}^{m} [Z(xi+h) - Z(xi)]^2$$

Ou :

- m est le nombre possible de couples qu'on peut former à partir des valeurs d'observations disponibles, suivant la direction θ ;
- θ est la direction (angle) suivant laquelle le variogramme est calculé (θ est choisi pour déterminer la meilleure continuité du phénomène dans l'espace, son choix se fait on se basant sur les conventions trigonométrique ou géographique).
- h est la distance séparant deux points Z(xi) et Z(xi+h) dans la direction θ.

En pratique on accorde une tolérance sur h et sur θ pour avoir suffisamment de paires pour chaque distance h et chaque angleθ.

Concéderons les données de cet exemple, et on va calculer le variogramme pour différente directions :

- **Calcule du variogramme suivant la direction horizontale $\theta = 0°$:**

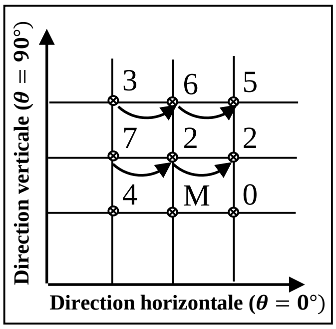
Pour h=1m :

Les pairs d'observations possibles dans ce cas sont comme le montre la figure ;

$$\gamma(1{,}0°) = \frac{1}{2\,(4)}[(7-2)^2 + (2-2)^2 + (3-6)^2 + (6-5)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{1}{(8)}[(5)^2 + (0)^2 + (-3)^2 + (1)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{35}{8} = 4.375$$



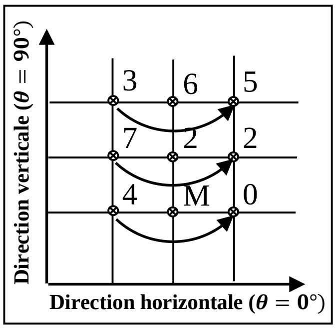
Pour h=2m :

Les pairs d'observations possibles dans ce cas sont comme le montre la figure ;

$$1{,}0°) = \frac{1}{2\,(3)}[(4-0)^2 + (7-2)^2 + (3-5)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{1}{(6)}[(4)^2 + (5)^2 + (-2)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{45}{6} = 7.5$$



Les résultats de calcule du variogramme sont :

h	N(h)	γ(h)
1	4	4.375
2	3	7.5

- **Calcule du variogramme suivant la direction verticale $\theta = 90°$:**

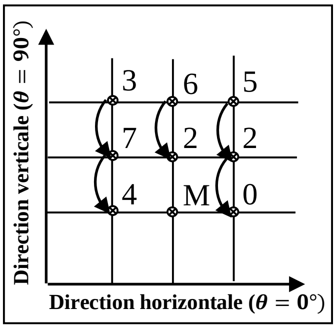
Pour h=1m :

Les pairs d'observations possibles dans ce cas sont comme le montre la figure ;

$$\gamma(1{,}0°) = \frac{1}{2\,(5)}[(3-7)^2 + (7-4)^2 + (6-2)^2 + (5-2)^2 + (2-0)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{1}{(10)}[(4)^2 + (-3)^2 + (4)^2 + (3)^2 + (2)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{54}{10} = 5.4$$



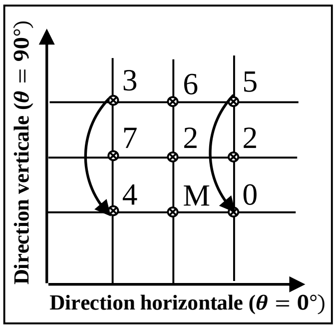
Pour h=2m :

Les pairs d'observations possibles dans ce cas sont comme le montre la figure ;

$$1{,}0°) = \frac{1}{2\,(2)}[(3-4)^2 + (5-0)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{1}{(4)}[(1)^2 + (5)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{26}{4} = 6.5$$



Les résultats de calcule du variogramme sont :

h	N(h)	γ(h)
1	5	5.4
2	2	6.5

- **Calcule du variogramme suivant la direction verticale $\theta = 45°$:**

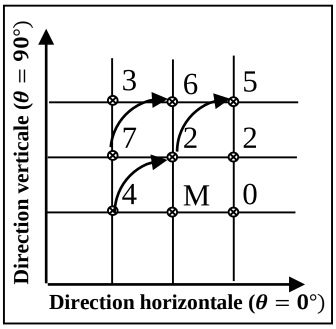
Pour h=1.41m :

Les pairs d'observations possibles dans ce cas sont comme le montre la figure ;

$$\gamma(1{,}0°) = \frac{1}{2\,(3)}[(4-2)^2 + (2-5)^2 + (7-6)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{1}{(6)}[(2)^2 + (-3)^2 + (1)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{14}{6} = 2.33$$



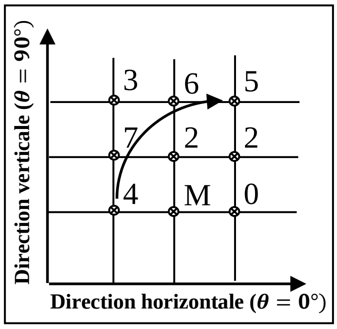
Pour h=2.82m :

Les pairs d'observations possibles dans ce cas sont comme le montre la figure ;

$$1{,}0°) = \frac{1}{2\,(1)}[(4-5)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{1}{(2)}[(1)^2]$$

$$\gamma(1, 0°) = \frac{1}{2} = 0.5$$



Les résultats de calcule du variogramme sont :

h	N(h)	γ(h)
1.41	3	2.33
2.82	1	0.5