

Chapitre 3

Différences finies pour les Équations aux Dérivées Partielles (EDPs)

Objectifs

À la fin de ce chapitre, vous devez pouvoir:

- expliquer en vos propres termes le principe de la discrétisation des EDPs par les différences finies,
- expliquer ce qu'est un maillage structuré, non structuré, Cartésien, curviligne,
- expliquer ce qu'est un schéma décentré amont,
- discrétiser une EDP (ou un système d'EDPs) du second ordre,
- donner une définition du nombre de Courant (EDPs hyperboliques) et du nombre de Fourier (EDPs paraboliques), ainsi que leur influence potentielle sur la stabilité de la solution numérique.

3.1 Principe

On rappelle que, contrairement à une EDO, une EDP implique plusieurs variables indépendantes (au moins 2). L'une d'elles peut être le temps (pour des EDPs paraboliques ou hyperboliques) ou non (*Ex.* l'équation (1.20) exprime un régime permanent). Dans la discrétisation des EDPs, le temps est une dimension « particulière », dans le sens où sa discrétisation est toujours relativement simple. En revanche, les possibilités de discrétisation de l'espace sont nombreuses. Ceci est vrai en particulier pour les EDPs où interviennent plusieurs dimensions de l'espace. Les diverses possibilités sont présentées dans les sous-sections suivantes.

3.1.1 Discrétisation impliquant une seule dimension d'espace

Dans le cas d'EDPs ne comportant qu'une seule dimension d'espace, le temps et l'espace sont discrétisés de la même manière : on définit des points de calcul (généralement notés en utilisant l'indice i) d'abscisses x et des dates de calcul t^n où l'on veut déterminer la solution numérique (Figure 3.1). La solution numérique au point i au pas de temps n est notée U_i^{n+1} . Le terme de *maillage* est souvent utilisé pour désigner la disposition des points de discrétisation de l'espace.

En général, le maillage est fixe dans l'espace. Cependant, il existe des méthodes à maillage *mobile*, c'est à dire que les positions des points de calcul sont susceptibles de changer au cours du temps. C'est le cas des problèmes où la forme ou l'étendue du domaine de calcul sont susceptibles d'évoluer dans le temps. On parle alors de *maillage adaptatif*. Dans ce cours, seuls les maillages fixes sont considérés.

3.1.2 Problèmes multidimensionnels

Lorsque l'EDP que l'on cherche à résoudre implique plus d'une direction d'espace, il existe de nombreuses options pour discrétiser ce dernier. Les deux principaux types de maillage sont les suivants :

- dans un *maillage structuré*, l'espace est discrétisé en lignes, colonnes et/ou rangées. Les intersections des lignes définissent les points de calcul. Dans deux dimensions d'espace, un point de calcul est repéré par deux indices (en général i et j) ; un point sera repéré en trois dimensions d'espace par le biais de trois indices (généralement notés i, j et k). Il existe deux grandes « familles » de maillage structuré (Figure 3.2) :

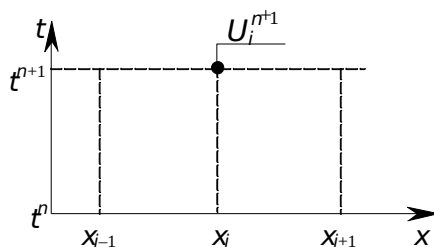


Fig. 3.1. discrétisation du temps et de l'espace (cas d'une seule dimension d'espace).

- * les maillages *cartésiens*, où les points de calcul sont positionnés sur des *lignes droites* ;
 - * les maillages *curvilignes*, où les points de calcul sont positionnés sur des lignes courbes. ceci permet une plus grande flexibilité dans la description de la géométrie (en particulier pour des modèles côtiers, où une description fine de la géométrie du littoral est nécessaire).
- dans un maillage *non structuré*, les points de calcul ne sont pas alignés selon des directions préférentielles. Ils sont repérés par un seul indice (Fig. 3.2).

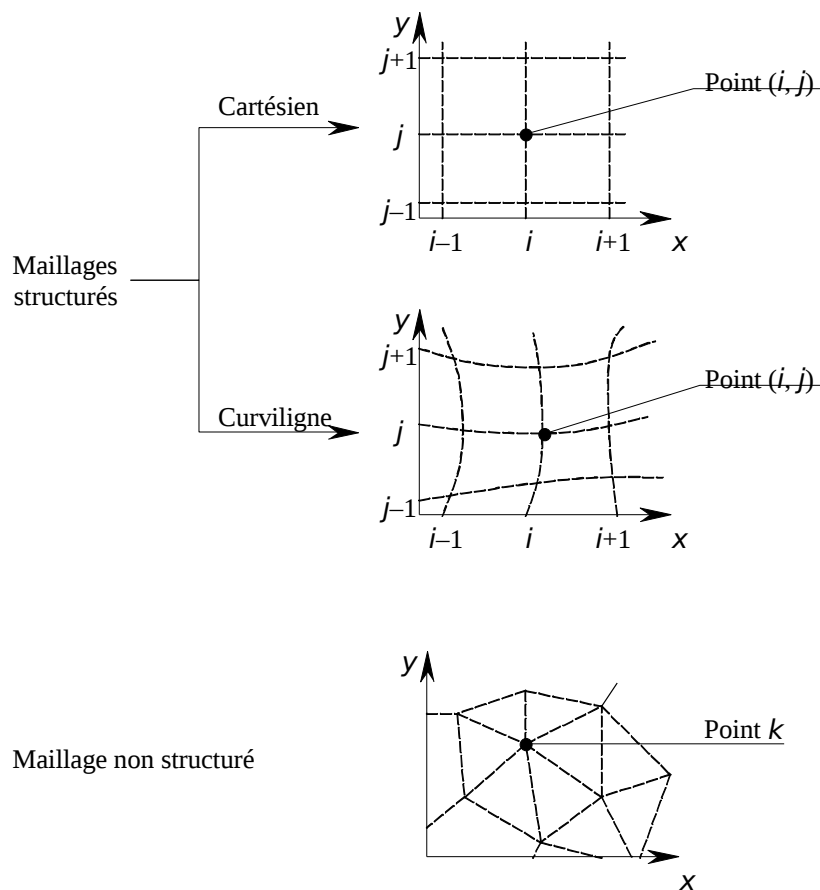


Fig. 3.2. Divers types de maillage (ici pour deux dimensions d'espace).

N.B. : dans ce cours, on ne traitera que des maillages structurés cartésiens.

3.2 Méthodes pour les EDPs hyperboliques

Dans cette section, on traite l'équation de convection (1.31) (encore appelée advection) que l'on rappelle ici :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Cette équation est la plus simple de toutes les EDPs possibles, puisqu'elle comporte un nombre minimal de variables indépendantes et des ordres de dérivation minimaux. Elle figure pourtant parmi les EDPs les plus difficiles à résoudre, dans le sens où les moindres défauts des méthodes numériques peuvent être mis en évidence à l'aide de cas-tests extrêmement simples. On rappelle que l'équation (1.31) est équivalente à la formulation suivante, qui fait intervenir la dérivée totale D/Dt :

$$\frac{DU}{Dt} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \quad (3.1)$$

L'équivalence de ces deux formulations est démontrée en Annexe B. Cette équivalence est utilisée dans les méthodes aux caractéristiques et dans certaines méthodes aux volumes finis (*Cf.* chapitre 4). Les méthodes les plus classiques sont présentées ici.

3.2.1 Schémas décentrés amont

Il existe deux principales versions de schémas décentrés amont : une version explicite et une version implicite.

Schéma décentré amont explicite. Dans le schéma décentré amont explicite, les dérivées $\frac{\partial U}{\partial t}$ et $\frac{\partial U}{\partial x}$ sont approchées de la façon suivante (*Cf.* Fig. 3.3 pour illustration) :

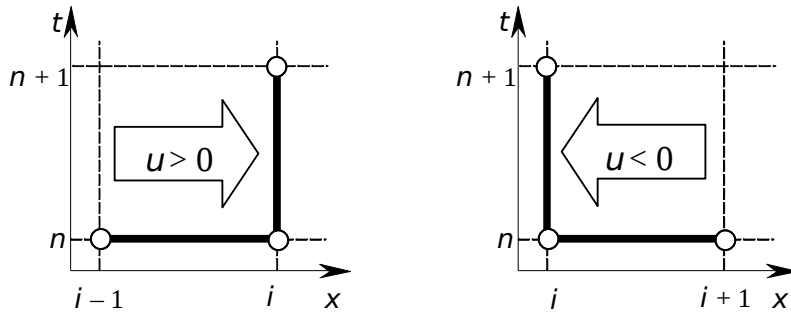


Fig. 3.3. Schéma décentré amont explicite. Points de calcul utilisés pour une vitesse positive (gauche) et négative (droite).

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \begin{cases} \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1/2}} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (3.2)$$

où $\Delta x_{i-1/2}$ et $\Delta x_{i+1/2}$ représentent respectivement les distances $x_i - x_{i-1}$ et $x_{i+1} - x_i$. A noter que la dépendance de l'approximation de $\partial U / \partial x$ par rapport au signe de λ peut être justifiée grossièrement de la façon suivante : l'information sur l'état de U vient de l'amont, il peut donc paraître normal d'utiliser les points à l'amont de i pour l'approximation de la dérivée d'espace. En remplaçant (3.2) dans (1.31), il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \lambda \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x_{i-1/2}} &= 0 & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \lambda \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} &= 0 & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} (3.3)$$

ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} U_i^{n+1} &= \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}} U_{i-1}^n + \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}}\right) U_i^n & \text{si } \lambda \geq 0 \\ U_i^{n+1} &= \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}}\right) U_i^n - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}} U_{i+1}^n & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} (3.4)$$

On introduit le nombre de Courant (adimensionnel) :

$$Cr = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \quad (3.5)$$

(du nom du mathématicien Robert Courant – il s’écrit avec une majuscule !) Ce nombre permet de simplifier l’écriture du schéma :

$$\left. \begin{aligned} U_i^{n+1} &= Cr_{i-1/2} U_{i-1}^n + (1 - Cr_{i-1/2}) U_i^n & \text{si } \lambda \geq 0 \\ U_i^{n+1} &= (1 + Cr_{i+1/2}) U_i^n - Cr_{i+1/2} U_{i+1}^n & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

Ce schéma est stable pour des nombres de Courant compris entre -1 et $+1$.

Schéma décentré amont implicite. Dans ce schéma, les dérivées sont estimées comme suit (Cf. Fig. 3.4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \begin{cases} \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} & \text{si } \lambda \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} (3.7)$$

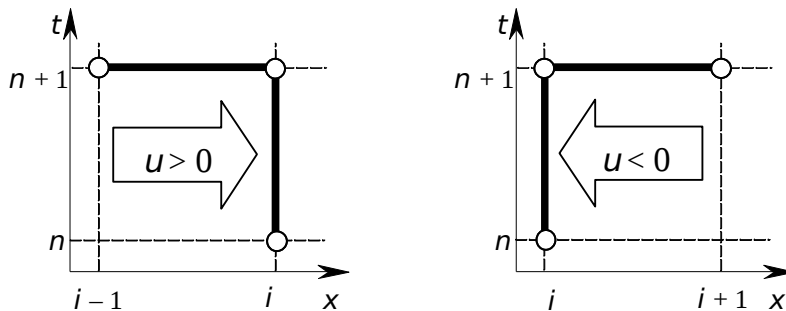


Fig. 3.4. Schéma décentré amont implicite. Points de calcul utilisés pour une vitesse positive (gauche) et négative (droite).

N.B. : la dérivée $\partial/\partial x$ est estimée en utilisant les valeurs (inconnues) au pas de temps $n + 1$. En remplaçant dans (1.31), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \lambda \frac{U_i^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x_{i-1/2}} &= 0 & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \lambda \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} &= 0 & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

ce qui donne une relation entre deux points consécutifs au pas de temps $n + 1$:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}}\right) U_i^{n+1} - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}} U_{i-1}^{n+1} &= U_i^n & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}}\right) U_i^{n+1} + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}} U_{i+1}^{n+1} &= U_i^n & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

On obtient un système bidiagonal d'équations faisant intervenir les valeurs inconnues de U en deux points consécutifs. Ce système peut cependant être inversé en utilisant une méthode de simple balayage. En effet, (3.9) peut se récrire

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}}\right) U_i^{n+1} &= U_i^n + \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i-1/2}} U_{i-1}^{n+1} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \left(1 - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}}\right) U_i^{n+1} &= U_i^n - \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x_{i+1/2}} U_{i+1}^{n+1} & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Ce qui donne :

$$\left. \begin{aligned} U_i^{n+1} &= \frac{U_i^n + C_{i-1/2} U_{i-1}^{n+1}}{1 + C_{i-1/2}} & \text{si } \lambda \geq 0 \\ U_i^{n+1} &= \frac{U_i^n - C_{i+1/2} U_{i+1}^{n+1}}{1 - C_{i+1/2}} & \text{si } \lambda \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Il suffit donc de balayer le domaine en partant du point amont (point 1 si λ est positif, point N si λ est négatif) et d'utiliser (3.11) comme relation de récurrence pour déterminer le point suivant dans le sens du balayage.

Ce schéma est stable pour toutes les valeurs du nombre de Courant. On dit aussi qu'il est *inconditionnellement stable*.

3.2.2 La méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques s'appuie sur la formulation (3.1) de l'équation de convection. (3.1) peut se récrire sous la forme encore plus simple :

$$U = \text{Cst} \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda \quad (3.12)$$

qui indique que la quantité U est *invariante* le long de la trajectoire $dx/dt = \lambda$. Cette trajectoire est représentée par une courbe (appelée *courbe caractéristique*) de pente $1/\lambda$ dans le plan (x, t) . Ce plan est appelé l'*espace des phases* (Fig. 3.5). Le principe de la méthode des caractéristiques est le suivant : si l'on veut déterminer la valeur de U en un point $(i, n + 1)$ dans l'espace des phases, il suffit de remonter la courbe caractéristique dans le temps jusqu'à une date où la valeur de U est connue.

Ainsi, la valeur de U au point $(i, n + 1)$ est égale à sa valeur U_A au point A (situé au pas de temps n). Le point A est souvent appelé le *piéd* de la caractéristique. La valeur de U au point A est interpolée linéairement entre les points $i - 1$ et i (on ne donne la formule que pour une vitesse d'advection λ positive) :

$$U_A = \frac{x_i - x_A}{\Delta x_{i-1/2}} U_{i-1}^n + \frac{x_A - x_{i-1}}{\Delta x_{i-1/2}} U_i^n \quad (3.13)$$

où x_A est l'abscisse de A. Elle peut être estimée comme suit :

$$x_A = x_i - \lambda \Delta t \quad (3.14)$$

En introduisant (3.14) et la définition (3.5) du nombre de Courant dans (3.13), on obtient

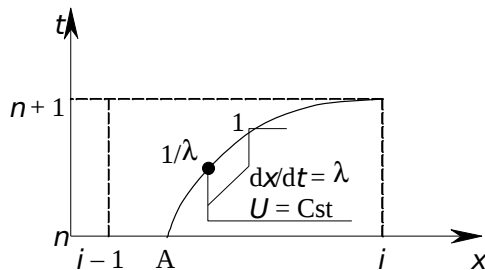


Fig. 3.5 Caractéristique dans l'espace des phases.

$$U_i^{n+1} = U_A = C_{i-1/2} U_{i-1}^n + (1 - C_{i-1/2}) U_i^n \quad (3.15)$$

qui donne exactement la même formule que (3.6) pour une vitesse d'advection λ positive. On vérifiera que la formulation est identique à celle de (3.6) pour une vitesse d'advection λ négative.

Le schéma (3.15) est stable pour des nombres de Courant compris entre 0 et 1. Pour des nombres de Courant négatifs, il est nécessaire d'effectuer l'interpolation entre les points i et $i + 1$.

Il est possible d'accroître la précision de la méthode en utilisant une interpolation parabolique (c.à.d. que l'on ajuste une courbe du type $U(x) = ax^2 + bx + c$ entre les points $i - 1$, i et $i + 1$).

3.2.3 Le schéma de Preissmann

Principe Le schéma de Preissmann est utilisé dans des logiciels de simulation tels que CARIMA ou ISIS. Il est implicite. Les dérivées en temps et en espace sont approchées en utilisant les points (i, n) , $(i + 1, n)$, $(i, n + 1)$ et $(i + 1, n + 1)$. Il est conçu de manière à respecter le caractère conservatif des équations.

Les dérivées en temps et en espace sont approchées comme suit (Cf. Fig. 3.6) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \theta \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i+1}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \theta \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

où ψ et θ sont deux paramètres, déterminés par l'utilisateur, qui permettent de « décentrer » le schéma en espace et en temps respectivement. Ils peuvent influencer considérablement sur la stabilité et le degré de précision de la solution numérique. En général, il est conseillé de prendre $\psi = 1/2$ et θ supérieur ou égal à $1/2$ (pour des valeurs inférieures de θ , la solution peut devenir instable).

Dans la formulation (3.16), on peut considérer que la dérivée par rapport au temps est estimée comme la moyenne pondérée des deux dérivées par rapport au temps estimées aux points i et $i + 1$; par une démarche similaire, la dérivée par rapport à l'espace est estimée comme la moyenne pondérée des dérivées estimées aux pas de temps n et $n + 1$.

Application à l'équation de convection Le schéma de Preissmann est appliqué à la discrétisation de l'équation (1.31), que l'on rappelle ici :

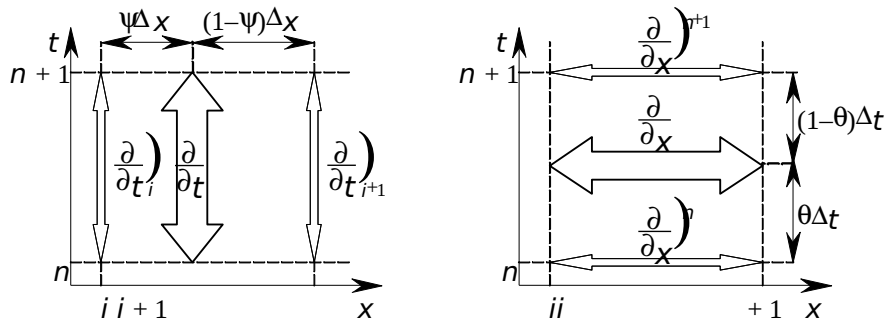


Fig. 3.6. Principe du schéma de Preissmann. La dérivée par rapport au temps est une pondération des dérivées estimées aux points i et $i + 1$; la dérivée par rapport à l'espace est une pondération des dérivées estimées aux pas de temps n et $n + 1$.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

En remplaçant (3.16) dans (1.31), on obtient :

$$\begin{aligned} & (1-\psi) \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \psi \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i+1}^n}{\Delta t} \\ & + \left[(1-\theta) \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x_{i+1/2}} + \theta \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_i^{n+1}}{\Delta x_{i+1/2}} \right] \lambda = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

En regroupant les termes en U^{n+1} , (3.17) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\alpha_{i+1/2} U_i^{n+1} + \beta_{i+1/2} U_{i+1}^{n+1} + \chi_{i+1/2} = 0 \tag{3.18}$$

où les coefficients $\alpha_{i+1/2}$, $\beta_{i+1/2}$ et $\chi_{i+1/2}$ sont donnés par :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i+1/2} &= 1 - \psi - \theta Cr_{i+1/2} \\ \beta_{i+1/2} &= \psi + \theta Cr_{i+1/2} \\ \chi_{i+1/2} &= \psi - 1 - (1-\theta) Cr_{i+1/2} U_i^n + [\psi + (1-\theta) Cr_{i+1/2}] U_{i+1}^n \end{aligned} \right\} \tag{3.19}$$

Comme pour le schéma décentré amont implicite (Cf. Eq. (3.9)), on se trouve en présence d'un système d'équations algébriques à deux inconnues impliquant des points consécutifs du maillage. Ce système est aisément résolu en effectuant un

balayage du domaine de calcul en partant de l'amont (point 1 pour une vitesse d'advection positive, point N pour une vitesse d'advection négative). En effet, (3.18) peut s'écrire sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$\left. \begin{aligned} U_{i+1}^{n+1} &= -\frac{\alpha_{i+1/2}}{\beta_{i+1/2}} U_i^{n+1} - \frac{\chi_{i+1/2}}{\beta_{i+1/2}} \\ U_i^{n+1} &= -\frac{\beta_{i+1/2}}{\alpha_{i+1/2}} U_{i+1}^{n+1} - \frac{\chi_{i+1/2}}{\alpha_{i+1/2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

La première égalité (3.20) doit être utilisée dans le cas d'une vitesse d'advection positive, pour balayer le domaine dans le sens des indices i croissants ; la seconde égalité sera utilisée dans le cas d'une vitesse d'advection négative, pour balayer le maillage dans le sens des indices i décroissants.

Stabilité : schéma de Preissmann est stable sous la condition suivante :

$$\theta - \frac{1}{2} + \frac{\Psi - \frac{1}{2}}{Cr_{i+1/2}} \geq 0 \quad (3.21)$$

Pour le cas particulier $\Psi = 1/2$, la condition (3.21) devient :

$$\theta \geq \frac{1}{2} \quad (3.22)$$

Au-dessous de cette valeur de θ , le schéma est inconditionnellement instable, quel que soit le nombre de Courant ; au-dessus de cette valeur, il est inconditionnellement stable, indépendamment du nombre de Courant.

3.2.4 Le schéma de Crank-Nicholson

Ce schéma utilise trois points consécutifs (Cf. Fig. 3.7). On donne son expression pour un pas d'espace Δx régulier :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &\approx \frac{1}{4} \frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{4} \frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

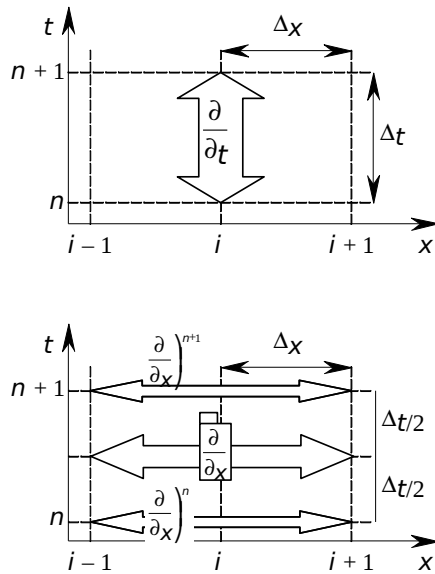


Fig. 3.7. Schéma de Crank-Nicholson.

3.2.5 Stabilité des schémas

La stabilité d'un schéma numérique pour les EDPs s'analyse de manière similaire à celle d'un schéma pour les EDOs : le principe consiste à analyser le rapport U_i^{n+1}/U_i^n et sous quelles conditions il est inférieur à 1 (auquel cas le schéma est stable) ou supérieur (auquel cas le schéma est instable).

La stabilité des schémas numériques *explícitos* pour les EDPs hyperboliques est en général fortement conditionnée par la valeur du nombre de Courant.

3.3 Méthodes pour les EDPs paraboliques

Schéma à trois points explicite. On présente ici un schéma pour la résolution de l'équation de diffusion (1.19), rappelée ici :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \nu \text{ positif}$$

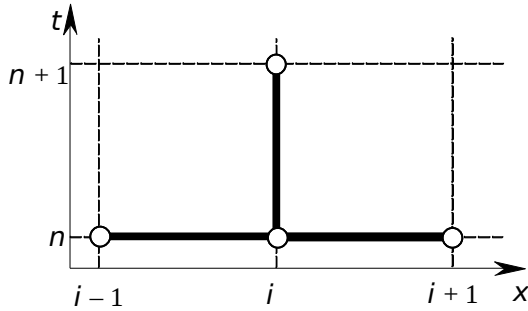


Fig. 3.8. Schéma à trois points explicite.

Du fait de la présence d'une dérivée seconde par rapport à x , il est nécessaire d'introduire trois points en espace. Pour un pas d'espace Δx uniforme, les dérivées sont approchées comme suit (Figure 3.8) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \end{aligned} \right\} (3.24)$$

En remplaçant les approximations (3.24) dans l'équation (1.19), il vient :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + v \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{\Delta x^2} \Delta t \quad (3.25)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$U_i^{n+1} = U_{i-1}^n + U_{i+1}^n F + (1 - 2F) U_i^n \quad (3.26)$$

où $F = v \Delta t / \Delta x^2$ est parfois appelé le nombre de Fourier. Il représente l'analogie du nombre de Courant pour les phénomènes de diffusion.

Le schéma est stable pour des nombres de Fourier compris entre 0 et 1/2.

Schéma à trois points implicite. Ce schéma utilise les approximations suivantes (Cf. Fig. 3.9) :

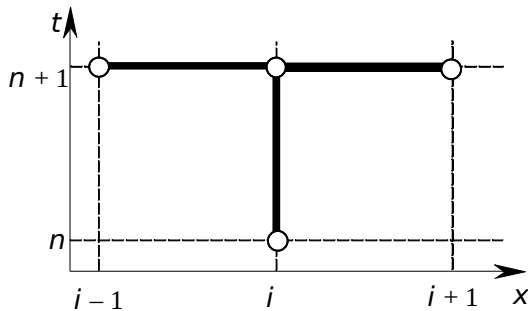


Fig. 3.9. Schéma à trois points implicite.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \right\} (3.27)$$

En remplaçant les approximations (3.27) dans l'équation (1.19), il vient :

$$U_i^{n+1} - v \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \Delta t = U_i^n \quad (3.28)$$

ce qui s'écrit encore :

$$(1 + 2F) U_i^{n+1} - (F) U_{i-1}^{n+1} + (F) U_{i+1}^{n+1} = U_i^n \quad (3.29)$$

Cette équation fait intervenir trois variables inconnues (à la date $n+1$). En dénommant N le nombre total de points du maillage, on peut écrire $N-2$ équations du type (3.29) pour les points 2 à $N-1$ inclus. Il est en outre nécessaire de fournir 2 conditions aux limites (aux points 1 et N respectivement). Par conséquent, on a au total N équations pour N inconnues et la solution est unique. Une méthode couramment utilisée pour l'inversion du système d'équations (3.29) est par exemple celle du double balayage (Cf. cours de première année).

Le schéma implicite est inconditionnellement stable (c.à.d. que la stabilité n'est pas limitée par la valeur du nombre de Fourier).

Schéma de Crank-Nicholson Le schéma de Crank-Nicholson pour les EDPs paraboliques revient à prendre une moyenne entre les formulations implicite et

explicite :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}}{2\Delta x^2} \end{aligned} \right\} (3.30)$$

3.4 Méthodes pour les EDPs elliptiques

Les EDPs elliptiques de l'ingénieur sont en général des EDPs exprimant un régime permanent ; elles ne font donc pas intervenir de dimension de temps. En revanche, elles impliquent deux ou trois dimensions d'espace. L'espace peut être discrétisé en utilisant un maillage structuré ou non structuré. Dans cette section, on ne présente la méthode que pour un maillage structuré.

On présente la méthode pour la résolution de l'équation (1.20) :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = Q$$

Comme pour les équations paraboliques, l'approximation des dérivées secondes requiert trois points dans chaque direction de l'espace :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\approx \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \right\} (3.31)$$

où Δx et Δy sont les pas d'espace selon les directions x et y respectivement. On notera la disparition de l'exposant en temps et l'apparition d'un double indexage sur l'espace. En remplaçant (3.31) dans (1.20), on obtient :

$$\frac{U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}}{\Delta y^2} = Q_{i,j} \quad (3.32)$$

L'équation (3.32) peut être écrite pour chaque point (i, j) à l'intérieur du domaine. Elle ne peut être écrite pour les points situés sur les limites, car pour un point (i, j) en bordure du domaine, l'un au moins des points $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$ ou $(i, j+1)$ n'est pas situé à l'intérieur du domaine et l'EDP

ne peut lui être appliquée. En revanche, on rappelle qu'il est nécessaire de fournir des conditions aux limites en tout point ; on obtient donc le nombre nécessaire et suffisant d'équations pour que la solution soit unique. Il n'est cependant pas aisé d'inverser un système de la forme (3.30) (dont la largeur de bande est au minimum 5), aussi a-t-on souvent recours à des méthodes telles que les directions alternées (Cf. section 3.5 ci-dessous).

3.5 Problèmes multidimensionnels

Un problème multidimensionnel est un problème où interviennent plusieurs dimensions d'espace (deux ou trois). Cette section présente les méthodes les plus couramment utilisées. Il est à noter que le traitement des problèmes multidimensionnel est un sujet de recherche très actuel dans de nombreux domaines, en particulier celui de la propagation d'ondes. En effet, pratiquement toutes les méthodes numériques existantes introduisent des effets indésirables sur la précision des solutions numériques.

3.5.1 Les directions alternées

Jusqu'à une période récente, la plupart des méthodes numériques ont été mises au point pour une dimension d'espace uniquement. Les raisons en sont nombreuses, mais deux facteurs principaux peuvent être cités :

- 1) Un certain nombre de notions mathématiques (et de théorèmes sur la convergence des solutions) ne sont applicables qu'en une dimension d'espace ;
- 2) Pendant longtemps, la capacité de stockage (tant en mémoire que physiquement sur disque) et la puissance de calcul des ordinateurs sont restées très limitées. Ceci rendait le traitement de situations multidimensionnelles (qui sont caractérisées par un grand nombre de points de calcul) extrêmement lourd, sinon impossible.

Pour cette raison, un certain nombre de techniques ont été mises au point pour tenter de résoudre des EDPs à plusieurs dimensions en utilisant des méthodes conçues pour une seule dimension d'espace. Ces méthodes sont connues sous le nom de *directions alternées*

Directions alternées explicites considère une EDP en trois dimensions

d'espace :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (3.33)$$

où les coefficients a, \dots, f sont (ou non) des fonctions des coordonnées d'espace x, y, z , de U et/ou du temps t . Cette EDP est hyperbolique si $b = d = f = 0$ et parabolique dans les autres cas. Les directions alternées explicites consistent à traiter successivement chaque dimension d'espace en prenant pour point de départ le résultat obtenu en traitant les directions précédentes.

L'algorithme est le suivant :

- 1) En notant U^n la solution au début du pas de temps, on résout dans un premier temps la partie de l'équation dans la direction x :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (3.34)$$

On obtient alors une solution intermédiaire que l'on notera $U^{n+1,x}$.

- 2) On utilise la solution intermédiaire comme point de départ pour résoudre la partie de l'équation dans la direction y :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (3.35)$$

On obtient une seconde solution intermédiaire que l'on notera $U^{n+1,y}$.

- 3) On utilise cette seconde solution intermédiaire comme point de départ pour résoudre la partie de l'équation dans la direction z :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (3.36)$$

La solution obtenue à la fin de ces trois balayages est la solution U^{n+1} .

Chacune des étapes 1) – 3) consiste à résoudre un problème unidimensionnel.

Directions alternées implicites (ADI). Cet algorithme est souvent mentionné dans la littérature sous le terme ADI (pour Alternate Directions Implicit). Il est plus général que le précédent car il permet de résoudre également des EDPs elliptiques. On considère la forme plus générale de (3.33) :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (3.37)$$

où ε peut être pris égal à 0 pour une EDP elliptique. L'algorithme est le suivant :

- 1) En notant U^n la solution au début du pas de temps, on résout dans un premier temps la partie de l'équation dans la direction x :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = - \left[c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right]^n \quad (3.38)$$

On obtient alors une solution intermédiaire que l'on notera $U^{n+1,x}$. On notera que pour une EDP elliptique (c.à.d. pour $\varepsilon = 0$), le concept de pas de temps ne s'applique pas et l'on utilisera de préférence la notation U^x .

- 2) On utilise la solution intermédiaire comme point de départ pour résoudre la partie de l'équation dans la direction y :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = - \left[a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right]^x \quad (3.39)$$

On obtient une seconde solution intermédiaire que l'on notera $U^{n+1,y}$ (ou U^y dans le cas d'une EDP elliptique).

- 3) On utilise cette seconde solution intermédiaire comme point de départ pour résoudre la partie de l'équation dans la direction z :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + e \frac{\partial U}{\partial z} + f \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = - \left[a \frac{\partial U}{\partial x} + b \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial U}{\partial y} + d \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]^y \quad (3.40)$$

La solution obtenue à la fin de ces trois balayages est la solution $U^{n+1,z}$ (ou U^z dans le cas d'une EDP elliptique).

- 4) On reprend la solution $U^{n+1,z}$ (ou U^z) comme point de départ pour répéter les étapes 1) – 3). La boucle 1) – 3) s'appelle une *itération*. On itère tant que la différence entre les résultats de l'itération m et $m+1$ diffère d'une valeur supérieure à un *critère de convergence* fixé à l'avance par l'utilisateur.

3.5.2 Méthodes multidimensionnelles

Les méthodes multidimensionnelles pures consistent à prendre en compte tous les termes des EDPs liés à toutes les directions de l'espace en une seule fois. Si cela ne pose pas de problème particulier pour les méthodes explicites, pour les méthodes implicites il est nécessaire de procéder à une numérotation *globale* des points de calcul (c.à.d. une numérotation dans laquelle chaque point du maillage est repéré par un seul indice).

On considère par exemple l'équation de diffusion bidimensionnelle :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (3.41)$$

Les dérivées partielles de cette équation peuvent être discrétisées comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &\approx \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\approx \frac{U_{i-1,j}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &\approx \frac{U_{i,j-1}^{n+1} - 2U_{i,j}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Ce qui donne :

$$\left(U_{i-1,j}^{n+1} + U_{i+1,j}^{n+1} \right) F_x + \left(U_{i,j-1}^{n+1} + U_{i,j+1}^{n+1} \right) F_y + (1 - 2F_x - 2F_y) U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n \quad (3.43)$$

où $F_x = \nu \Delta t / \Delta x^2$ et $F_y = \nu \Delta t / \Delta y^2$ sont les nombres de Fourier dans les directions x et y respectivement. Après renumérotation des points, (3.43) devient :

$$\left(U_{p^1}^{n+1} + U_{p^2}^{n+1} \right) F_x + \left(U_{p^3}^{n+1} + U_{p^4}^{n+1} \right) F_y + (1 - 2F_x - 2F_y) U_{p^5}^{n+1} = U_{p^5}^n \quad (3.44)$$

Ce qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\mathbf{A} \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B} \quad (3.45)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} A_{p^5, p^1} &= A_{p^5, p^2} = F_x \\ A_{p^5, p^3} &= A_{p^5, p^4} = F_y \\ A_{p^5, p^5} &= 1 - 2F_x - 2F_y \\ B_{p^5} &= U_{p^5}^n \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

La solution \mathbf{B}^{n+1} est obtenue en inversant la matrice \mathbf{A} :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.47)$$

La différence entre les indices max $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ et min $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ indique la largeur de bande de la matrice \mathbf{A} . Cette largeur de bande est un facteur important pour la rapidité avec laquelle \mathbf{A} peut être inversée. C'est pourquoi la numérotation des points de calcul est une étape importante dans le traitement du maillage.

3.6 Traitement des termes non-linéaires dans les schémas implicites

De nombreuses EDPs de l'ingénieur contiennent des termes non-linéaires. Ainsi, dans les équations de Saint-Venant, on trouve des termes tels que le débit de quantité de mouvement Q^2/A , ou des termes de frottement tels que $|Q|Q/(CR^2)$. Ces termes sont non-linéaires par rapport à Q , qui est une des variables (inconnues, à calculer) de l'écoulement.

Lorsque l'on veut calculer Q au pas de temps $n + 1$, on procède en général par inversion d'un système linéaire tel que (3.45). Il est donc indispensable que le système à résoudre soit linéarisé. Ainsi, le terme Q^2/A est approché par :

$$\frac{Q^2}{A} \approx \frac{Q^n Q^{n+1}}{A^{n+1/2}} \quad (3.48)$$

qui est un terme linéaire par rapport à Q^{n+1} , où la section en travers $A^{n+1/2}$ est approchée par :

$$A^{n+1/2} \approx \frac{A^n + A^{n+1}}{2} \quad (3.49)$$

Au cours d'un pas de temps, on effectue de façon itérative les opérations suivantes :

- 1) Calcul de $A^{n+1/2}$. Pour la première itération, on estime $A^{n+1/2}$ comme étant égal à A^n .
- 2) Calcul du coefficient $Q^n/A^{n+1/2}$. Ce terme entre dans la matrice \mathbf{A} que l'on doit inverser.
- 3) Inversion du système (3.45). On obtient une première estimation de \mathbf{U}^{n+1} .

- 4) Répétition des étapes 1) – 3) sur la base de la valeur mise à jour de \mathbf{U}^{n+1} , jusqu'à la convergence.

3.7 Consistance des schémas numériques pour EDPs – diffusion et dispersion numériques

3.7.1 Analyse de consistance des schémas pour les EDPs

La consistance des schémas numériques pour les EDPs s'analyse de la même manière que celle des schémas pour EDOs : par développements en séries de Taylor.

Exemple : l'analyse de consistance de la méthode aux caractéristiques (3.15) :

$$U_i^{n+1} = C_{r_{i-1/2}} U_{i-1}^n + (1 - C_{r_{i-1/2}}) U_i^n$$

On effectue un développement en série de Taylor au voisinage de U_i^n :

$$\left. \begin{aligned} U_{i-1}^n &= U_i^n - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \text{HOT}_1(\Delta x) \\ U_i^{n+1} &= U_i^n + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \text{HOT}_2(\Delta t) \end{aligned} \right\} (3.50)$$

où HOT_1 et HOT_2 sont des polynômes de degré au moins 3 en Δx et Δt respectivement. En substituant (3.50) dans (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} & U_i^n + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \text{HOT}_2(\Delta t) \\ & = \\ & \left[U_i^n - \Delta x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \text{HOT}_1(\Delta x) \right] C_{r_{i-1/2}} + (1 - C_{r_{i-1/2}}) U_i^n \end{aligned} \quad (3.51)$$

Cette égalité se simplifie en :

$$\Delta t \frac{\partial U}{\partial t} + \Delta x C_{r-1/2} \frac{\partial U}{\partial x} = \left[\frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \text{HOT}_1(\Delta x) \right] C_{r-1/2} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \text{HOT}_2(\Delta t) \quad (3.52)$$

En divisant par Δt et en introduisant la définition du nombre de Courant, il vient :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + u \frac{\partial U}{\partial x} = \left[\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\text{HOT}_1(\Delta x)}{\Delta x} \right] u - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\text{HOT}_2(\Delta t)}{\Delta t} \quad (3.53)$$

L'erreur de troncature est donnée par :

$$\text{TE}(\Delta t, \Delta x) = \left[\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\text{HOT}_1(\Delta x)}{\Delta x} \right] u - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\text{HOT}_2(\Delta t)}{\Delta t} \quad (3.54)$$

Cette erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. En effet, le polynôme $\text{HOT}_1/\Delta x$ est de degré au moins 2 en Δx et le polynôme $\text{HOT}_2/\Delta t$ est de degré au moins 2 en Δt . Donc le schéma (3.15) est consistant à l'équation de convection. A noter que, pour que l'erreur de troncature disparaisse, il est nécessaire de réduire *à la fois* le pas de temps et d'espace (réduire uniquement l'un des deux ne permet pas d'améliorer la qualité de la solution numérique !)

3.7.2 Diffusion numérique

L'analyse de consistance ci-dessus montre que l'erreur de troncature contient des termes en $\partial^2 U / \partial x^2$. Comme indiqué au §1.2.5, de tels termes sont classiquement associés au phénomène de diffusion. Ils sont de nature numérique (puisque'ils sont dûs à la discrétisation de l'équation originelle qui, elle, ne contient pas de termes de diffusion) ; on parle de *diffusion numérique*. La diffusion numérique a pour effet de « lisser » les profils calculés (Cf. Fig. 3.10 pour illustration).

3.7.3 Dispersion numérique

Il existe des discrétisations de l'équation de convection d'où les termes en $\partial^2 U / \partial x^2$ sont absents ? c'est par exemple le cas du schéma de Preissmann avec $\theta = \psi = 1/2$. Les dérivées d'ordre le plus faible dans l'erreur de troncature sont alors des dérivées en $\partial^3 U / \partial x^3$. De telles dérivées sont associées à la *dispersion* (au sens des ondes. Il ne s'agit *pas* de la dispersion hydrodynamique !), dont l'effet est de créer des oscillations dans les profils

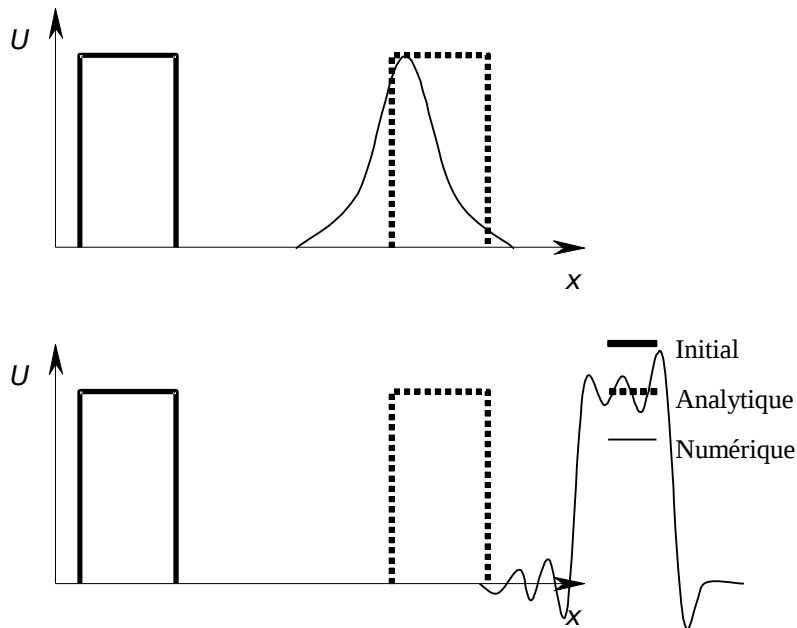


Fig. 3.10. Effets de la diffusion numérique (haut) et de la dispersion numérique (bas) sur des profils souis à la convection.

calculés (Cf. Fig. 3.10).

N.B. : lorsque la solution est affectée par la diffusion numérique, les termes de dispersion sont également présents. Cependant, ils sont « cachés » par les effets de la diffusion numérique. En effet, le coefficient des termes en $\partial^2 U / \partial x^2$ est un terme en Δx , alors que celui des termes $\partial^3 U / \partial x^3$ est en Δx^2 . Lorsque Δx est « petit », les termes de dispersion sont donc plus petits que ceux de diffusion.