Chapitre 2 : Méthodes analytiques

1. Principe de superposition

Le **principe de superposition** est utilisé pour résoudre des équations linéaires. Cela signifie que si une équation différentielle linéaire $\mathcal{L}(u) = 0$ admet plusieurs solutions u_1 et u_2, alors toute combinaison linéaire de ces solutions, c'est-à-dire $u(x) = \alpha u_1(x) + \beta u_2(x)$, avec α et β des constantes, est aussi une solution de l'équation.

Application pratique :

- **Exemple en diffusion** : Si $u_1(x,t)$ est une solution de l'équation de diffusion et $u_2(x,t)$ en est une autre, alors $u(x,t) = \alpha u_1(x,t) + \beta u_2(x,t)$ est aussi une solution.

Cela permet de décomposer des problèmes complexes en plusieurs parties plus simples à résoudre.

2. Méthode de séparation de variables

La méthode de séparation de variables est une technique qui consiste à supposer que la solution de l'équation différentielle peut être séparée en produits de fonctions qui dépendent chacune uniquement d'une variable. Cette approche est utilisée dans les EDP lorsqu'on connaît la forme de la solution et les conditions aux limites.

Application de la méthode :

Prenons un problème de diffusion comme exemple :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Avec la condition initiale :

$$u(x,0) = f(x)$$

et les conditions aux bords $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

1. **Hypothèse de séparation des variables** : On suppose que la solution peut être écrite sous la forme :

   $$u(x,t) = X(x)T(t)$$

   Cela suppose que la solution est un produit d'une fonction de x (l'espace) et d'une fonction de t (le temps).

2. **Substitution dans l'équation de diffusion** : En substituant $u(x,t) = X(x)T(t)$ dans l'équation de diffusion :

$$X(x)\frac{dT(t)}{dt} = DT(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

3. **Séparation des variables** : Cette équation peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{1}{DT(t)}\frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

Chaque côté de l'équation dépend uniquement d'une variable. Comme cette équation doit être vraie pour toutes les valeurs de x et t, les deux termes doivent être égaux à une constante (disons $-\lambda$) :

$$\frac{1}{DT(t)}\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda \quad \text{et} \quad \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda$$

Ce qui nous donne deux équations ordinaires :

- $\frac{dT(t)}{dt} = -\lambda DT(t)$
- $\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\lambda X(x)$

4. **Résolution des équations** : L'équation pour $T(t)$ est une équation du premier ordre, et son intégration donne :

$$T(t) = Ae^{-\lambda Dt}$$

L'équation pour $X(x)$ est une équation différentielle du second ordre qui dépend de la constante λ. Les solutions de cette équation, sous les conditions aux bords $X(0) = 0$ et $X(L) = 0$, sont les fonctions sinus :

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

où n est un entier positif. Cela nous donne des valeurs discrètes de $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$.

5. **Solution générale** : La solution générale de l'équation est donc une somme infinie de solutions des différentes valeurs de n, selon le principe de superposition :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 Dt}$$

Cette série de Fourier permet de représenter la solution en termes de conditions initiales.

3. Application à l'équation de Laplace en coordonnées cartésiennes

L'**équation de Laplace** est une équation elliptique de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Elle modélise des phénomènes comme la distribution de température dans une plaque en équilibre thermique, ou le potentiel électrostatique dans une région sans charges.

Résolution en utilisant la méthode de séparation des variables :

1. **Séparation de la solution** : On suppose une solution de la forme $u(x, y) = X(x)Y(y)$.
2. **Substitution dans l'équation de Laplace** : En substituant dans l'équation de Laplace :

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

3. **Séparation des variables** : On divise par $X(x)Y(y)$:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

   Ce qui donne deux équations ordinaires :

   - $X''(x) + \lambda X(x) = 0$
   - $Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$

4. **Résolution des équations** :

   - L'équation pour $X(x)$ a des solutions trigonométriques, comme $X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$.
   - L'équation pour $Y(y)$ a des solutions exponentielles, comme $Y(y) = Ce^{\sqrt{\lambda}y} + De^{-\sqrt{\lambda}y}$.

   Les constantes A, B, C, D sont déterminées par les conditions aux bords.

4. Application à l'équation d'onde

L'**équation d'onde** est une EDP qui modélise la propagation d'ondes (mécaniques, électromagnétiques, etc.) :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Cette équation est similaire à celle de la diffusion, mais ici, on a la dérivée seconde par rapport au temps.

Méthode de séparation de variables :

1. **Séparation de la solution** : On suppose une solution sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$.
2. **Substitution dans l'équation d'onde** : Cela donne :

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

3. **Séparation des variables** : En divisant par $X(x)T(t)$, on obtient :

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

   Cela donne deux équations ordinaires :

   - $T''(t) + \lambda c^2 T(t) = 0$
   - $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

4. **Résolution des équations** : Les solutions pour $X(x)$ sont similaires à celles de l'équation de Laplace, et pour $T(t)$, ce sont des fonctions trigonométriques.