Chapitre 1 : Notions sur les équations aux dérivées partielles

.1) Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) interviennent dans la description de très nombreux problèmes de l'électronique, physique, chimie, sciences de la terre, biologie...

Une équation différentielle aux dérivées partielles (EDP) est une relation fonctionnelle en une fonction de plusieurs variables et ses dérivées. Si on se limite aux EDPs d'ordre 2 à deux variables, ses formes sont :

$$aZ''_{xx} + bZ''_{xy} + cZ''_{yy} + dZ'_{x} + eZ'_{y} + fZ + q = 0$$

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus ∂élevé intervenant dans l'∂équation.

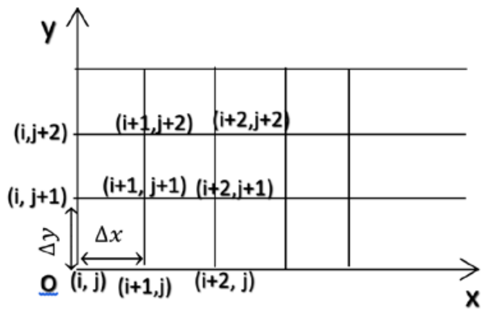
Selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on sépare trois types :

- si $\Delta = 0$, l'équation est dite parabolique,
- si $\Delta > 0$, l'équation est dite hyperbolique,
- si $\Delta < 0$, l'équation est dite elliptique.

Pour ces équations, les solutions analytiques (par exemple par la méthode de séparation des variables) ne peuvent être déterminées que dans des cas très simples. Plusieurs méthodes numériques permettent d'approcher les solutions telles que la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des volumes finis (MVF), la méthode des intégrales finies (MIF) et la méthode des différences finies (MDF). Seule la méthode MDF est mise en œuvre ci-après pour chaque type d'équations précédents.

.2) La méthode des différences finies (MDF)

La méthode MDF est très classique, simple à mettre en œuvre et convient pour beaucoup de problèmes rencontrés en pratique. Les calculs sont effectués suivant un maillage obtenu par un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacées.



L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud de cordonnées. Si $\Delta x = \Delta y$ le maillage est dit régulier sinon il est irrégulier.

.3) Expressions discrètes de la première et deuxième dérivée

En utilisant le développement de Taylor au voisinage du point x_i, on obtient :

a) Première dérivée

- Différence en avant : $u'(x_i) = \frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} + \theta(h) = \frac{u_{i+1}-u_i}{h}$
- Différence en arrière : $u'(x_i) = \frac{u(x_i)-u(x_i-h)}{h} + \theta(h) = \frac{u_i-u_{i-1}}{h}$
- Différence centrée : $u'(x_i) = \frac{u(x_i+h)-u(x_i-h)}{2h} + \theta(h^2) = \frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}$

b) Deuxième dérivée

- Différence en avant : $u''(x_i) = \frac{u(x_i)-2\,u(x_i+h)+u(x_i+2h)}{h^2} + \theta(h) = \frac{u_i - 2\,u_{i+1} + u_{i+2}}{h^2}$
- Différence en arrière : $u''(x_i) = \frac{u(x_i-2h)-2\,u(x_i-h)+u(x_i)}{h^2} + \theta(h) = \frac{u_{i-2} - 2\,u_{i-1} + u_i}{h^2}$
- Différence centrée : $u''(x_i) = \frac{u(x_i-h)-2\,u(x_i)+u(x_i+h)}{h^2} + \theta(h^2) = \frac{u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1}}{h^2}$

3.4) Equations elliptiques

On distingue deux équations classiques de ce type :

1) Equation de Laplace : $u"_x + u"_y = 0$
2) Equation de Poisson : $u"_x + u"_y + g(x, y) = 0$

En général, ces deux équations décrivent des phénomènes stationnaires non évolutionnaire (ne dépends pas au variable temps ou régime permanent). Par exemple le champ électrique dans un conducteur, les déplacements et les contraintes dans un solide élastique, etc.

La forme canonique d'une équation de type elliptique pour deux variables est :

$$\nabla^2 u = G.$$

Soit un domaine fermé D, avec la frontière S, on définit :

a) Le problème de Dirichlet (position)

$$\nabla^2 u = f \; dans \; D$$
$$u = g \; sur \; S$$

b) Le problème de Neumann (vitesse)

$$\nabla^2 u = f \; dans \; D$$
$$u'_n = g \; sur \; S$$

c) Le problème de Fourier ou mixte (position et vitesse)

$$\nabla^2 u = f \; dans \; D$$
$$u'_n + k\,u = 0 \; sur \; S$$

Dans la suite, on va illustrer la résolution d'un problème elliptique par la méthode des différences finies, en considérant l'exemple ci-dessous.

<u>Exemple</u>

Soit le problème suivant : $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, dans le carré $[0 \leq x \leq 2 \; et \; 0 \leq y \leq 3]$, vérifiant les conditions suivantes :

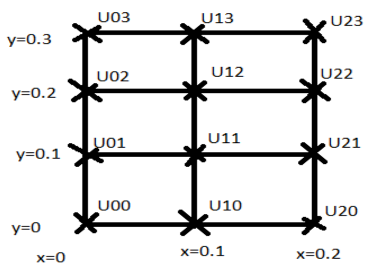
$$U(0, y) = 2y, U(0.2, y) = y + 0.2, U(x, 0) = x \; et \; U(x, 0.3) = 0.6 - 0.5x\;.$$

1) Donner le type du problème, et séparer ses conditions.
2) Résoudre le problème par la méthode MDF en prenant $\Delta x = h = \Delta y = k = 0.1$.

<u>Solution</u>

1) L'équation est de type elliptique et le problème de type de Dirichlet. Dans ce problème on a seulement des conditions aux limites.
2) Pour résoudre ce problème, on doit suivre les étapes ci-après :

   2.1) Tracer le problème : on a $\Delta x = h = \Delta y = k = 0.1$ et $[0 \leq x \leq 2 \; et \; 0 \leq y \leq 3]$.



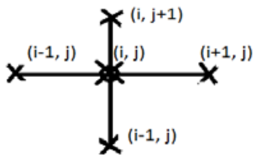
2.2) déterminer les connues et les inconnues par les conditions aux limites.
– à l'aide de $\boldsymbol{U(0,y)=2y}$: $U_{00}=0, U_{01}=0.2, U_{02}=0.4\ et\ U_{03}=0.6$.
– à l'aide de $\boldsymbol{U(0.2,y)=y+0.2}$: $U_{20}=0.2, U_{21}=0.3, U_{22}=0.4\ et\ U_{23}=0.5$.
– à l'aide de $\boldsymbol{U(x,0)=x}$: $U_{00}=0, U_{10}=0.1\ et\ U_{20}=0.2$.
– à l'aide de $\boldsymbol{U(x,0.3)=0.6-0.5x}$: $U_{03}=0.6, U_{13}=0.55\ et\ U_{23}=0.5$.
En remarque que le problème est bien posé.
2.3) détermination des inconnues : les inconnues sont $\boldsymbol{U_{11}et\ U_{12}}$.
2.3) Ecriture de l'algorithme
On remplace les formes discrètes dans la fonction continue, c-à-d, on remplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\ par\ \frac{U_{i+1,j}-2\,U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2}\quad et\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\ par\ \frac{U_{i,j+1}-2\,U_{i,j}+U_{i,j-1}}{k^2}$$

On obtient : $\frac{U_{i+1,j}-2\,U_{i,j}+U_{i-1,j}}{h^2}+\frac{U_{i,j+1}-2\,U_{i,j}+U_{i,j-1}}{k^2}=0\ et\ h=k$, donc :

$$4\,U_{i,j}=U_{i+1,j}+U_{i-1,j}+U_{i,j+1}+U_{i,j-1}$$

La valeur de la fonction au point (i, j) est obtenue en faisant la moyenne arithmétique des valeurs aux points (i+ 1, j), (i−1, j), (i, j+ 1) et (i, j−1). Dont voici la maille du calcul est :



2.4) Calculer les inconnues ($\boldsymbol{U_{11}et\ U_{12}}$) : l'intérieur du domaine, on a :

$$\begin{cases} 4U_{11}=U_{21}+U_{01}+U_{12}+U_{10}=0.3+0.2+U_{12}+0.1 \\ 4U_{12}=U_{02}+U_{22}+U_{11}+U_{13}=0.4+0.4+U_{11}+0.55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4U_{11}-U_{12}=0.6 \\ 4U_{12}-U_{11}=1.35 \end{cases}$$

Sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.35 \end{bmatrix}$$

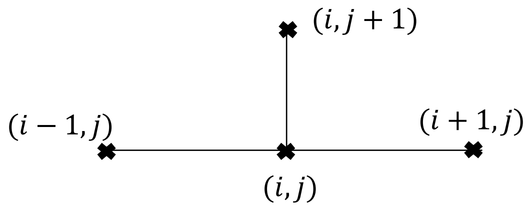
A l''aide de la méthode de Crammer, on trouve ($\boldsymbol{U_{11}=0.25\ et\ U_{12}=0.4}$)

5) Equations paraboliques

L'équation la plus simple de type parabolique est l'équation de la forme $u'_t=a^2u''_{xx}$. Elle est appelée équation de la chaleur ou équation de Fourier. Pour que la solution de cette équation soit entièrement déterminée, la fonction $u(x,t)$ doit vérifier certaines conditions initiales qui sont les conditions aux limites et conditions à l'instant initial $t=0$. La solution numérique est déterminée soit par le schéma explicite soit par celui implicite à l'aide des formules centrées, en avant, en arrière ou avec une combinaison des formules.

.5.a) Schéma explicite

Dans le schéma explicite la solution $u_{i,j+1}$ est calculée directement en appliquant le schéma centré sur les termes $u_{i-1,j}, u_{i,j}\ et\ u_{i+1,j}$, dont le système (la maille) de résolution est itératif.



Pour $\begin{cases} u'_t = \frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) \\ u''_{xx} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \end{cases}$ *au point* (ih, jk)

On remplace dans l'équation de chaleur : $\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = a^2 * \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})$, d'où :

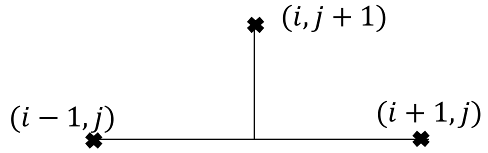
$u_{i,j+1} = \left(1 - \frac{2ka^2}{h^2}\right)u_{i,j} + \frac{ka^2}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$, en posant $r = \frac{ka^2}{h^2}$, la formule précédente devient :

$$\boldsymbol{u_{i,j+1} = u_{i,j} + r(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})}$$

Ce schéma est stable pour $r \leq 0.5$ et instable pour $r > 0.5$ dont les erreurs s'amplifier rapidement. Pour $r = 0.5$, alors :

$$\boldsymbol{u_{i,j+1} = 0.5(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})}$$

La maille du calcul est donc :



.5.b) Schéma implicite

Dans ce schéma, on approche la dérivée u''_{xx} au temps $(t = (j+1)k)$ au lieu du point $t = jk$ et pour obtenir la solution, il faut résoudre un système d'équations linéaires. L'équation de chaleur est alors : $\frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$, d'où :

$u_{i,j} = -r\, u_{i-1,j+1} + (1 + 2r)u_{i,j+1} - r\, u_{i+1,j+1}$ avec $r = \frac{a^2 k}{h^2}$.

Ce schéma est inconditionnellement stable c.-à-d. il est stable quel que soit r.

<u>Exemple</u>

On étude la température à l'intérieur d'un système électronique où on maintient ses limites à température 0°c avec :

$$\begin{cases} u'_t = u''_{xx} & pour\ 0 \leq x \leq 1 \\ u(x,0) = 2x & pour\ 0 \leq x \leq 0.5 \\ u(x,0) = 2(1-x) & pour\ 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

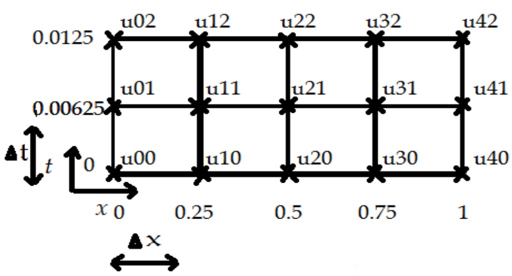
- Résoudre le problème avec la méthode MDF en utilisant le schéma explicite avec $\boldsymbol{r = 0.1, \Delta x = h = 0.25\ et\ 0 \leq t \leq 0.0125.}$

<u>Solution</u>

1) Tracer le problème : on a $\boldsymbol{r = 0.1, \Delta x = h = 0.25\ et\ 0 \leq t \leq 0.0125.}$ On détermine k pour limiter l'axe temporel.

$$r = \frac{a^2 k}{h^2} \rightarrow k = \Delta t = \frac{r\, h^2}{a^2}\ avec\ a = 1\ dan\ ce\ cas.$$

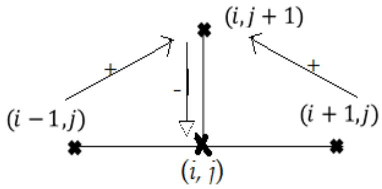
$$k = \Delta t = \frac{0.1\ \ 0.25^2}{1^2} = 0.00625 \quad \text{(0.0125/0.00624=2 c-à-d on a deux itérations)}$$



2) déterminer les connues du problème.
– à l'aide de $u(x,0) = 2x \; pour \; 0 \leq x \leq 0.5$:$u_{00} = 2 \times 0 = 0, u_{10} = 2 \times 0.25 = 0.5, u_{20} = 2 \times 0.5 = 1$.
– à l'aide de $u(x,0) = 2(1-x) \;\; pour \; 0.5 < x \leq 1$:$u_{30} = 2 \times (1 - 0.75) = 0.5, u_{40} = 2 \times (1-1) = 0$.
– à l'aide de la condition (on maintient ses limites à 0°c) c–à–d $u(0,t) = u(1,t) = 0 \;\; pour \; 0 \leq t \leq 0.0125$: $u_{00} = \; u_{01} = u_{02} = u_{40} = \; u_{41} = u_{42} = 0$.
Le problème est bien posé.
3) détermination des inconnues : les inconnues sont $u_{11}, u_{21}, u_{31}; u_{12}, u_{22}, u_{32}$.
4) Ecriture de l'algorithme :
L'algorithme est :

$$\boldsymbol{u_{i,j+1} = u_{i,j} + r\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right)}$$

Pour $r = 0.1$, l'algorithme devient : $\boldsymbol{u_{i,j+1} = u_{i,j} + 0.1 \times \left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right)}$, et la maille du calcul est :



4) Calculer les inconnues $(u_{11}, u_{21}, u_{31}; u_{12}, u_{22}, u_{32})$:
4.1) Première itération : $j = 0, i = 1, 2, 3$.
– pour $i = 1$

$$u_{11} = u_{10} + 0.1(u_{20} - 2\,u_{10} + u_{00}) = 0.5 + 0.1(1 - 2 \times 0.5 + 0) = 0.5$$
$$\boldsymbol{u_{11} = 0.5}$$

– pour $i = 2$

$$u_{21} = u_{20} + 0.1(u_{30} - 2\,u_{20} + u_{10}) = 1 + 0.1(0.5 - 2 \times 1 + 0.5) = 0.9$$
$$\boldsymbol{u_{21} = 0.9}$$

– pour $i = 3$

$$u_{31} = u_{30} + 0.1(u_{40} - 2\,u_{30} + u_{20}) = 0.5 + 0.1(0 - 2 \times 0.5 + 1) = 0.5$$
$$\boldsymbol{u_{31} = 0.5}$$

4.1) Deuxième itération : $j = 1, i = 1, 2, 3$.
– pour $i = 1$

$$u_{12} = u_{11} + 0.1(u_{21} - 2\,u_{11} + u_{01}) = 0.5 + 0.1(0.9 - 2 \times 0.5 + 0) = 0.49$$
$$\boldsymbol{u_{32} = 0.49}$$

– pour $i = 2$

$$u_{22} = u_{21} + 0.1(u_{31} - 2\,u_{21} + u_{11}) = 0.9 + 0.1(0.5 - 2 \times 0.9 + 0.5) = 0.82$$
$$\boldsymbol{u_{22} = 0.82}$$

– pour $i = 3$

$$u_{32} = u_{31} + 0.1(u_{41} - 2\,u_{31} + u_{21}) = 0.5 + 0.1(0 - 2 \times 0.5 + 0.9) = 0.49$$
$$\boldsymbol{u_{32} = 0.49}$$

.6) Equation hyperbolique

La plus simple équation de type hyperbolique est l'équation d'onde, sa forme générale est : $u_{tt}^{''} = c^2 u_{xx}^{''}$ avec c est la vitesse de propagation.
Ces équations dépendent souvent du temps c'est pourquoi on les appelle souvent équations d'évolution ou équations dynamiques.
Pour obtenir la solution $u(x,t)$ de ce type d'équation, il faut avoir des conditions supplémentaires :

a) des conditions aux limites : $u(0,t) \; et \; u(L,t)$, L est la dimension du problème.
b) des conditions initiales ou l'état de la solution à l'instant $t = 0$: