المحور الثاني: البرمجة الخطية: الصيغة القياسية

أولا: مفهوم البرمجة الخطية:

– البرمجة الخطية هي إحدى الأساليب الرياضية التي تبحث عن أفضل الطرق للاستخدام الأمثل للموارد المتاحة، عن طريق تحويل المشكلة المدروسة إلى علاقات رياضية خطية، بهدف تعظيم الربح أو تدنئة التكاليف.

– البرنامج الخطي هو صيغة رياضية مشتقة من مشكلة معينة، هدفها البحث عن الأمثلية عن طريق معادلات رياضية تتكون من مجموعة من المتغيرات من الدرجة الأولى، في وجود مجموعة من القيود، والتي تكون في شكل معادلات أو متراجحات.

إن تعبير **البرمجة** يعني: وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع ما لبلوغ وتحقيق هدف معين.

إن تعبير **خطية** يعني: افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صياغة رياضية سهلة.

ثانيا: مجالات استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الاقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الاقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية والتقنية أو هما معا.

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي:

- **في حالة التعظيم:** تعظيم الأرباح، تعظيم الإنتاج، تعظيم طاقات التخزين، تعظيم استخدام رؤوس الأموال، تعظيم استخدام اليد العاملة... الخ، وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.
- **في حالة التدنئة:** تدنئة التكاليف، تدنئة الخسائر، تدنئة عدد الموظفين، تدنئة الأجور الإجمالية.

ثالثا: خطوات تكوين برنامج مسألة البرمجة الخطية:

تعتبر عملية تشكيل النموذج الرياضي الخطي أهم وأول خطوة للبحث عن الحل الأمثل للمسائل، وهي تهدف إلى عرض المشكلة بطريقة رياضية، فإيجاد الحل الأمثل يتطلب وضع المسألة في شكل نموذج خطي.

لتشكيل النموذج الرياضي الخطي للمسألة نتبع الخطوات التالية:

1: تحديد المتغيرات: تدعى بمتغيرات القرار، أي متغيرات المسألة المدروسة، وهي القيم التي يجب تحديد قيمتها للوصول إلى الهدف، ويرمز لها بـ X_j.

حيث: j: تعبر عن عدد المتغيرات.

2: دالة الهدف: تسمى أيضا بالدالة الاقتصادية، وهي تعبر عن الهدف الذي تسعى إليه المؤسسة للوصول إلى تعظيم الأرباح أو تدنئة التكاليف، ويعبر عنها بدالة خطية يرمز لها بـ Z كما يلي:

$$\text{Max (Z) ou bien Min (Z)} = \sum_{j=1}^{n} \text{Cj Xj}$$

حيث:

Cj: معاملات دالة الهدف، أي إما العائد الوحدوي أو التكلفة الوحدوية للمنتوج.

3: القيود: تسمى أيضا بالشروط الموضوعية أو الخطية، وهي عبارة عن مجموعة من المتراجحات أو المعادلات، وتعبر عن كمية الموارد المتاحة لدى المؤسسة، (أي ما تحتاج إليه كل وحدة إنتاج)، وتأخذ الشكل التالي:

$$\sum aij\ Xj\ (\leq \geq =) bi$$

حيث:

aij: هي المعاملات الفنية، أي الكميات المستهلكة من الموارد المتاحة لإنتاج وحدة واحدة (معاملات القيود).

bi: هي الكميات المتاحة من الموارد.

i: عدد الأسطر وهي بعدد القيود (m).

J: عدد الأعمدة وهي بعدد المتغيرات (n).

4: شرط عدم السالبية: ويعني هذا الشرط أن جميع المتغيرات لا تأخذ قيما سالبة، وبالتالي إما أن تأخذ قيما موجبة أو معدومة، ويعبر عنه بالعبارة التالية: $\text{Xj} \geq 0$

إذن يمكن صياغة البرنامج الخطي بشكل مفصل كالتالي:

$$Max\ Z\ \ ou\ bien\ \ Min\ Z = c_1x_1 + c_2\ x_2 + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . c_n\ x_n$$

$$S/c \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2\ + a_{13}x_3\ + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . a_{1n}x_n\ (\geq = \leq) b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2\ + a_{23}x_3\ + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . a_{2n}x_n\ (\geq = \leq) b_2 \\ a_{31}\ x_1 + a_{32}x_2\ + a_{33}x_3\ + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . a_{3n}x_n\ (\geq = \leq) b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}x_2\ + a_{m3}x_3\ + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . a_{mn}x_n\ (\geq = \leq) b_m \\ \\ x_1\ \geq 0\ ,\ \ x_2\ \geq 0, x_3\ \geq 0\ , \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_n\ \geq 0 \end{cases}$$

مثال:

مؤسسة تقوم بإنتاج نوعين من الطاولات A وB، كل نوع من الطاولات يمر بورشتين.

الوقت المطلوب لكل وحدة منتجة في كل ورشة، والربح المحقق لكل وحدة من الطاولات المنتجة مبين في الجدول التالي:

المنتجات / الورشات	A	B	الوقت المتاح
الورشة 1	4	5	70
الورشة 2	10	6	60
ربح الوحدة	3	6	

المطلوب: بناء نموذج البرمجة الخطية للمؤسسة؟

الحل:

1: التعريف بالمتغيرات:

X_1: عدد الوحدات المنتجة من الطاولات A.

X_2: عدد الوحدات المنتجة من الطاولات B.

2: دالة الهدف: تهدف المؤسسة إلى تعظيم الأرباح.

$$\text{Max } (Z) = 3\ X_1 + 6\ X_2$$

3: القيود:

$$s/c \begin{cases} 4\ X1 + 5\ X2 \leq 70 & \text{قيد الوقت} \\ 10\ X1 + 6\ X2 \leq 60 & \text{قيد الوقت} \\ X1 \geq 0, X2\ \geq 0 & \end{cases}$$

4: شرط عدم السالبية: