

Chapitre 2. Équations de Maxwell

1 Les lois fondamentales de l'électrostatique

L'**électrostatique** est la branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques. On dit qu'un système est en régime électrostatique lorsqu'il n'y règne aucun champ magnétique. La charge électrique du système est immobile, et est conservée lors de toutes les interactions. Sa valeur est mesurée en **coulomb** (symbole C).

Loi de Coulomb

DÉFINITION

Deux particules ponctuelles portant respectivement les charges q et q' , placées dans le vide, exercent l'une sur l'autre une force appelée **force de Coulomb**. Cette force est portée par la droite joignant les deux particules, et a pour expression : $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q'}{r^2}$,

où r est la distance entre les deux particules, et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ F.m}^{-1}$ est la constante électrique du vide (appelée aussi **permittivité du vide**).

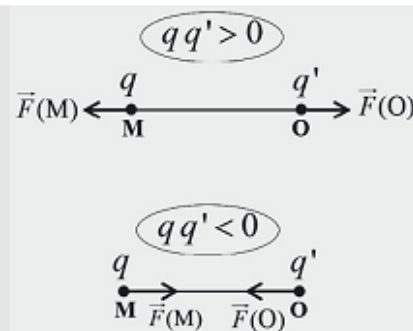


Figure 1– Forces d'interaction coulombienne entre deux particules chargées situées aux points M et O.

- Lorsque les charges q et q' sont de même signe, les deux particules se repoussent.
- Lorsque les charges q et q' sont de signes contraires, les deux particules s'attirent.

Champ électrique et potentiel électrique. En considérant l'une des deux particules ; par exemple, la particule située au point M, porteuse de la charge q , on peut exprimer la force de Coulomb subie par cette particule de la manière suivante :

$$F(M) = qE(M)$$

où la grandeur physique $E(M) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ représente le **champ électrique** qui règne au point M. En fait, $E(M)$ est le champ électrique créé en M par la particule située au point O et de charge q' .

De manière plus générale, l'effet d'une répartition statique de charges créant un champ \vec{E} sur une **charge** q placée au point M est une **force** :

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

où le champ électrique $\vec{E}(M)$ est aussi appelé **champ électrostatique**, grandeur qui se mesure en $V.m^{-1}$.

La loi de Coulomb est en fait applicable à toute distribution de charges statiques. Par exemple, dans le cas d'une distribution de charge répartie dans un volume V_0 avec une densité volumique de charge ρ , le champ électrique crée par cette distribution en un point M de l'espace environnant s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V_0)} \frac{\rho \vec{u}}{r^2} d\tau = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V_0)} \frac{\rho \vec{r}}{r^3} d\tau,$$

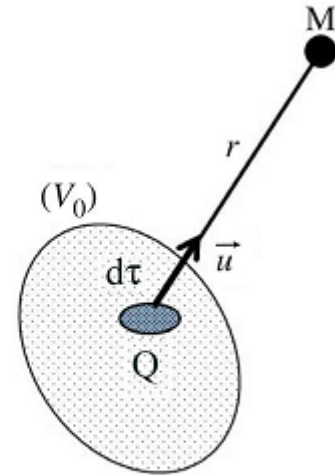


Figure 2

où $\vec{r} = \overline{QM} = \vec{r}_M - \vec{r}_Q$, et $\rho d\tau$ représente la charge contenue dans le volume élémentaire $d\tau$ centré en un point Q du volume V_0 .

En utilisant $\frac{\vec{r}}{r^3} = \overline{\text{grad}}_Q \left(\frac{1}{r} \right) = -\overline{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right)$, on peut exprimer le champ \vec{E} de la manière suivante :

$$\vec{E}(M) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V_0)} \overline{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) \rho d\tau = -\overline{\text{grad}}(V),$$

avec $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V_0)} \frac{\rho}{r} d\tau.$

Le champ électrostatique est donc un champ de gradient; ce qui implique que

$$\boxed{\overline{\text{rot}} \vec{E} = 0}$$

Plus généralement, à tout champ électrostatique, on peut associer un **potentiel électrique** V (aussi appelé **potentiel électrostatique**) donné par la relation

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}}(V).$$

Le potentiel V se mesure en **volt**.

2. Loi de Gauss

a) Forme intégrale

Considérons une région de même nature que le vide, mais qui contient des charges immobiles. La loi de Gauss stipule que « le flux du champ électrique à travers une surface fermée S est proportionnel à la charge totale Q_{int} se trouvant à l'intérieur de cette surface » :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0},$$

où \vec{n} est perpendiculaire à la surface S en chaque point de S , et est dirigé vers l'extérieur de S .

b) Forme locale

Supposons que la charge Q_{int} soit uniformément répartie à l'intérieur du volume V délimité par S , avec une densité volumique de charge ρ . La loi de Gauss s'écrit alors

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau.$$

D'autre part, d'après le théorème de la divergence, $\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}(\vec{E}) d\tau$.

En comparant ces deux expressions, on déduit la forme locale de la loi de Gauss :

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

2 Rappel des lois fondamentales de la magnétostatique

2.1 Loi de Biot-Savart

a) Champ d'induction magnétique

Lorsqu'un courant constant traverse un conducteur électrique de longueur élémentaire $d\vec{l}$, ce conducteur crée en tout point M de l'espace environnant un champ d'induction magnétique donné par :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}}{r^2},$$

où r est la distance séparant l'élément de courant du point M , $\vec{u} = \vec{r}/r$, et

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ est la perméabilité du vide.

Cette loi démontre ainsi que les **courants électriques** sont des **sources de champ magnétique**.

b) Potentiel vecteur

La loi de Biot-Savart étant applicable à toute distribution de courants statiques, si on considère une distribution de courants répartis dans un volume V_0 avec une densité volumique de courant \vec{j} , le champ \vec{B} créé par cette distribution en un point M de l'espace environnant s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\vec{j} \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau,$$

où $\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_Q$, et $\vec{j}d\tau$ représente le courant contenu dans le volume élémentaire $d\tau$ centré en un point Q du volume V_0 .

En utilisant $\frac{\vec{r}}{r^3} = \overrightarrow{\text{grad}}_Q(1/r)$, avec $\vec{r} = \overline{QM}$, le champ s'écrit :

$$\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \vec{j} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{r} \right) d\tau.$$

L'utilisation de l'identité

$\overrightarrow{\text{rot}}(f \vec{a}) = f \overrightarrow{\text{rot}} \vec{a} - \vec{a} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f$, conduit à :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}}{r} d\tau.$$

Dans l'élément de volume $d\tau$, le vecteur \vec{j} est pratiquement constant, ce qui implique que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = 0$, et conduit à :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{j}}{r} \right) d\tau = \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{A}),$$

avec $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_0} \frac{\vec{j}}{r} d\tau.$

Le champ magnétostatique \vec{B} est donc un champ de rotationnel. On en déduit que

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

Plus généralement, à tout champ \vec{B} , on peut associer un champ vectoriel \vec{A} , appelé « **potentiel vecteur** », donné par la relation

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}.$$

2.2 Loi d'Ampère

Cette loi est une conséquence de la loi de Biot et Savart. Elle confirme que les courants électriques sont des sources de champ magnétique.

a) Forme intégrale

La circulation du champ \vec{B} le long d'une courbe Γ , est proportionnelle au courant traversant la surface S délimitée par la courbe Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

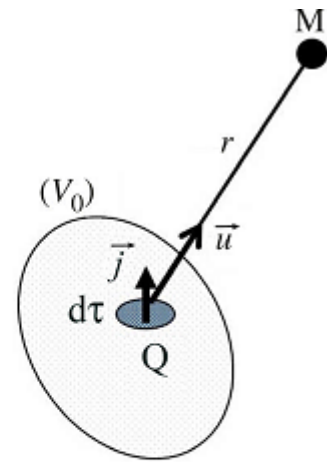


Figure 3

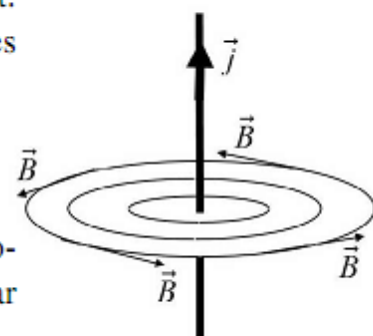


Figure 4 – Lignes de champ magnétique.

b) Forme locale

D'après le théorème de Stokes, $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Soit $\iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ et donc

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Cette équation montre que la densité de courant \vec{j} crée un champ \vec{B} qui tourne autour de \vec{j} (qui se confond alors avec l'axe de rotation de \vec{B}).

Récapitulatif.

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0, \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Ce récapitulatif montre qu'en **régime stationnaire** (indépendant du temps),

- les champs électriques et magnétiques sont complètement découplés ;
- le champ électrique ne peut être créé que par des charges électriques ;
- le champ magnétique ne peut être créé que par des courants électriques.

3 Passage en régime variable

1 Charges et courants volumiques

En pratique il est impossible d'isoler les champs respectifs créés par les différentes particules qui constituent la matière. Pour appliquer les lois fondamentales de l'électromagnétisme dans les milieux matériels, il est indispensable d'introduire un modèle plus adapté : le modèle volumique. Cela consiste à s'intéresser aux effets de la charge contenue dans un petit volume du milieu entourant un point M. Il importe de remarquer qu'un tel volume, bien qu'il soit élémentaire au sens mathématique du terme, contiendra en général un nombre immense de charges particulières. L'échelle caractéristique de ce volume, intermédiaire entre l'échelle **microscopique** et l'échelle **macroscopique**, est appelée échelle **mésoscopique**. Les grandeurs qui y sont associées (densités de charge, densités de courants et champ électromagnétique) sont dites nivelées ou moyennées ; ce qui signifie qu'elles indiquent une valeur moyenne à cette échelle, leurs fluctuations au niveau microscopique pouvant être très grandes.

Ainsi, au volume élémentaire $d\tau$, on associe la charge dq qu'il contient et on pose :

$$dq = \rho(M, t) d\tau$$

où $\rho(M, t)$ est la **densité volumique de charges** au point M, dépendant de ce point et du temps, et exprimée en $C.m^{-3}$.

En outre, une partie de ces charges peut être animée, par rapport à un référentiel R lié au système, d'une vitesse \vec{v} . Le **vecteur densité de courant** $\vec{j}(M, t)$ est alors défini par :

$$\vec{j}(M, t) = \rho_m(M, t) \vec{v}(M, t)$$

où ρ_m représente la **densité de charges mobiles**, qui n'est pas nécessairement égale à ρ . $\vec{j}(M, t)$ s'exprime en $A.m^{-2}$.

Le flux du vecteur $\vec{j}(M, t)$ à travers une surface S quelconque représente l'intensité I du courant à travers cette surface :

$$I = \iint_S \vec{j}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iint_S \rho_m \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S \rho_m \frac{dl}{dt} dS = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho_m d\tau = \frac{dq_m}{dt}$$

où dq_m est la quantité de charge qui traverse la surface dS pendant le temps dt

2 Loi de conservation de la charge

a) Forme intégrale

Considérons un volume V contenant une quantité de charge Q , délimité par une surface fermée S_f . En supposant que cette surface ne soit pas étanche (c'est-à-dire, que des charges puissent la traverser), alors le volume V contient une quantité

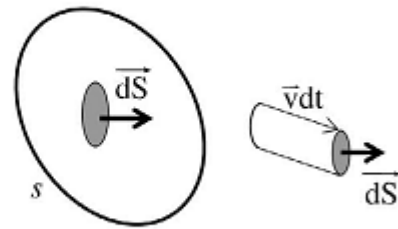


Figure .5

de charge susceptible de varier au cours du temps, qui s'écrit :

$$Q(t) = \iiint_V \rho(M, t) d\tau. \text{ Soit } \frac{dQ}{dt} = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Le principe de conservation de la charge consiste à affirmer qu'en l'**absence de toute création ou disparition de charges** à l'intérieur du volume, toute **variation** de la charge contenue dans le volume V ne peut être due qu'au fait que certaines charges ont franchi la surface S_f . Lorsqu'une telle variation se produit, le mouvement des charges qui franchissent la surface S_f donnent lieu à un courant $I = \iint_{S_f} \vec{j} \cdot d\vec{S}$.

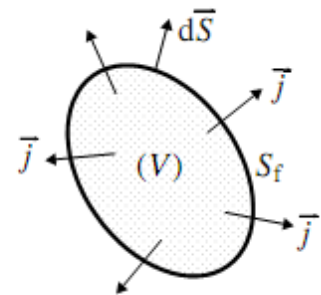


Figure .6

Avec la convention habituelle d'orientation de l'élément $d\vec{S}$ d'une surface fermée vers l'extérieur du volume qu'elle délimite, ce courant est positif quand globalement des charges sortent du volume V . Dans ce cas, le volume V voit sa charge diminuer ($dQ < 0$). On peut donc écrire que

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \iint_{S_f} \vec{j} \cdot d\vec{S}, \text{ soit}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\iint_{S_f} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Cette équation est l'« **équation de conservation de la charge** », exprimée sous sa forme intégrale.

b) Forme locale

D'autre part, d'après le théorème de la divergence,

$$\iint_{S_f} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} \, d\tau$$

$$\text{soit } \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} \, d\tau = - \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau.$$

L'expression locale de la loi de conservation de la charge s'écrit donc :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

3 Équation de Maxwell-Ampère

En 1864, James Maxwell a pointé une incompatibilité entre l'équation de conservation de la charge ($\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$) et le théorème d'Ampère ($\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$). En effet,

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}. \quad \text{Soit } \operatorname{div} [\operatorname{rot}(\vec{B})] = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Maxwell a alors proposé de modifier le théorème d'Ampère de la manière suivante :

$$\boxed{\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Cette équation, connue comme étant l'**équation de Maxwell-Ampère**, se distingue du théorème d'Ampère par la présence du terme $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, ajouté par Maxwell. Ce terme supplémentaire, appelé « **courant de déplacement** », assure la compatibilité de l'équation de Maxwell-Ampère avec la loi de conservation de la charge.

4. Loi de conservation du flux magnétique

Le flux du champ d'induction magnétique \vec{B} à travers toute surface fermée est toujours nul.

a) Forme intégrale

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

b) Forme locale

D'après le théorème de la divergence, $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} \, d\tau$, et donc

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

5 Loi de l'induction électromagnétique de Faraday

Forme intégrale. La loi de Faraday stipule que lorsqu'un circuit électrique est soumis à un flux magnétique variable, $\Phi(t)$, généré d'un champ magnétique \vec{B} , ce circuit acquiert une force électromotrice (f.e.m) U proportionnelle à la variation temporelle du flux magnétique :

$$U = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le signe « - » correspond à la **loi de Lenz**, qui stipule que la f.e.m induite dans le circuit s'oppose par ses effets à la cause qui lui donne naissance. La loi de Faraday peut être mise en évidence par la mise en rotation d'un aimant au voisinage d'un bobinage.

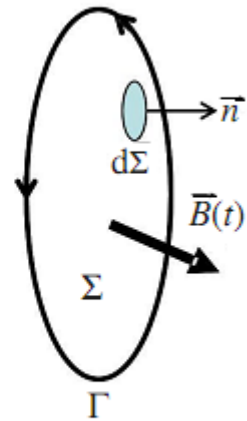


Figure 7

Forme locale. Considérons une surface Σ immobile, délimitée par un contour Γ , placée dans une région où règne un champ magnétique variable \vec{B} (figure 7). Le flux de \vec{B}

à travers Σ est :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma,$$

où \vec{n} est la normale à l'élément de surface $d\vec{\Sigma} = d\Sigma \vec{n}$. Les variations de flux de \vec{B} à travers la surface Σ créent un champ électrique induit \vec{E} dont la circulation le long du contour Γ détermine la f.e.m induite U .

$$U = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

D'après le théorème du rotationnel, on a : $U = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma} \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{n} d\Sigma$

Par ailleurs, $U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Sigma = -\iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} d\Sigma.$

En comparant ces deux dernières expressions, on déduit la relation suivante :

$$\boxed{\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Cette relation, qui a été mise dans sa forme locale par Maxwell, est appelée **équation de Maxwell-Faraday**. Elle constitue l'une des quatre équations de Maxwell, et est considérée comme l'un des postulats de l'électromagnétisme.

4 Équations de Maxwell

Les **équations de Maxwell** sont des lois fondamentales de la physique. Elles constituent les postulats de base de l'électromagnétisme. Elles traduisent sous forme locale différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui existaient de manière indépendante avant que Maxwell ne les réunisse sous la forme d'équations intégrales.

Équation de Maxwell-Gauss. Cette équation locale décrit comment un champ électrique \vec{E} est généré par des charges électriques :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Équation de Maxwell-Flux magnétique. Cette équation énonce que les lignes de champ magnétique \vec{B} sont obligatoirement fermées, et qu'il n'existe aucune « charge magnétique » analogue à une charge électrique.

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$$

Équation de Maxwell-Faraday. Cette équation décrit comment la variation d'un champ magnétique peut créer un champ électrique. Par exemple, un aimant en rotation crée un champ magnétique variable qui génère un champ électrique.

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Équation de Maxwell-Ampère. Cette équation énonce que les champs magnétiques peuvent être générés de deux manières : par les courants électriques (c'est le théorème d'Ampère), ou par la variation d'un champ électrique (c'est l'apport de Maxwell sur cette loi).

$$\operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère, énoncent respectivement que la variation d'un champ magnétique crée un champ électrique et que la variation d'un champ électrique crée un champ magnétique. Par conséquent, ces deux équations permettent la propagation d'ondes électromagnétiques auto-entretenues, y compris dans le vide (en l'absence de charges et de courants).

Les équations de Maxwell font intervenir les grandeurs physiques suivantes :

- Le **champ électrique** \vec{E} , qui s'exprime en V.m^{-1} ;
- Le **champ d'induction magnétique** \vec{B} , qui s'exprime en T ou Wb.m^{-2} ;
- La **densité de charge électrique** ρ , qui s'exprime en C.m^{-3} ;
- La **densité de courant électrique** \vec{j} , qui s'exprime en A.m^{-2} ;
- Les constantes fondamentales du vide : ϵ_0 et μ_0 .

5 Méthode des potentiels scalaire et vecteur

1 Relations champ-potentiels

Les équations de Maxwell qui ne contiennent pas de termes de source matérielle (charge électrique et courants) sont les suivantes : $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Sachant que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, on peut écrire que $\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \text{rot } \vec{A}}{\partial t} = \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ et donc

$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$, ce qui montre que $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$ est un champ de gradient. Pour retrouver l'expression habituelle de l'électrostatique, il suffit de poser que $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t = -\text{grad } V$, soit :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On remarque qu'en régime variable \vec{E} dépend à la fois de V et de \vec{A} , alors que la relation entre \vec{B} et \vec{A} garde la même expression qu'en régime statique :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

6 Résolution directe des équations de Maxwell dans le vide

1 Cas d'un milieu vide contenant par endroit des charges et courants

Dans un tel milieu les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Équation de propagation du champ \vec{E} .

En appliquant la **formule du double rotationnel** au champ \vec{E} , nous obtenons :

$$\text{rot} [\text{rot} (\vec{E})] = \text{grad} [\text{div} (\vec{E})] - \Delta \vec{E} \quad \text{et}$$

$$\text{grad} [\rho / \epsilon_0] - \Delta \vec{E} = \text{rot} \left[-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial \text{rot} (\vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

$$\text{Donc} \quad \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \text{grad} (\rho / \epsilon_0)$$

Équation de propagation du champ \vec{B}

On applique la **formule du double rotationnel** au champ \vec{B} :

$$\text{rot} [\text{rot} (\vec{B})] = \text{grad} [\text{div} (\vec{B})] - \Delta \vec{B} \quad \text{et}$$

$$-\Delta \vec{B} = \text{rot} \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \text{rot } \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \text{rot } \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \text{rot } \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

$$\text{Donc} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \text{rot } \vec{j}$$

2 Cas du vide en l'absence de charges et courants

En posant : $\rho = 0$ et $|\vec{j}| = 0$, on déduit les équations de propagation des champs \vec{E} et \vec{B} dans le vide :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

3 Propagation d'une onde plane dans le vide

Les solutions des équations sont nombreuses. Considérons par exemple une propagation suivant l'axe Oz. Il résulte des équations que les composantes des champs \vec{E} et \vec{B} obéissent à l'équation d'onde du type :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

où ψ désigne l'une des composantes de \vec{E} ou \vec{B} .

La solution de type **onde plane** peut être représentée par une combinaison de la forme :

$$\psi = f(t - z/c) + g(t + z/c)$$

où le terme $f(t - z/c)$ représente une onde se propageant dans le sens des z positifs, et le terme $g(t + z/c)$ une onde se propageant dans le sens des z négatifs.

Quelle que soit la direction de propagation d'une onde plane, on montre facilement que :

- les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires entre eux ;
- chacun des deux champs est perpendiculaire à la direction de propagation.

Une onde plane sinusoïdale monochromatique peut être représentée en notation réelle par :

$$\psi = \psi_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (2.21)$$

où \vec{k} est le vecteur d'onde, et ω la pulsation de l'onde. En notation complexe, on peut représenter cette onde par

$$\psi = \psi_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

Cette notation complexe conduit à :

$$\vec{\nabla} \psi = -i \vec{k} \psi \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi = i \omega \psi$$

Les équations de Maxwell se mettent alors sous la forme

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}, \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{k} \wedge \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega \vec{E}$$

L'équation de propagation n'admet une solution de type onde plane que si :

$$k = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \omega.$$

Cette relation est la **relation de dispersion** des ondes planes dans le vide.

7 Bilan énergétique local

Les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie. La propagation de cette énergie se ressent dans de nombreuses situations de la vie quotidienne, comme par exemple, lors d'une exposition aux rayons solaires ou au rayonnement d'une source chaude, lorsqu'on fait chauffer un aliment dans un four à micro-ondes, ou lorsqu'on capte les émissions d'une station de radio ou de télévision. On peut donc dire qu'en tout point où règne un champ électromagnétique, il existe une certaine densité d'énergie électromagnétique.

En admettant qu'en tout point de l'espace où existe un champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) , on puisse définir une **densité volumique d'énergie** électromagnétique $u(x, y, z, t)$, alors un domaine fini \mathcal{D} limité par une surface S , contiendra par hypothèse, à l'instant

t , une énergie électromagnétique

$$U(t) = \iiint_{\mathcal{D}} u(x, y, z, t) d\tau.$$

Cette énergie contenue dans le domaine \mathcal{D} peut varier au cours du temps pour deux raisons.

(i) Les charges contenues dans \mathcal{D} subissent les forces créées par le champ électromagnétique, et reçoivent donc de l'énergie du champ électromagnétique; ce qui a pour effet de diminuer l'énergie U . Plus précisément, si ρ est la densité volumique de charges, un volume élémentaire $d\tau$ animé d'une vitesse \vec{v} subira la force :

$$d\vec{f} = \rho d\tau \times (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Le travail reçu par ces charges pendant le laps de temps dt où les charges se sont déplacées de $d\vec{l} = \vec{v} dt$ est :

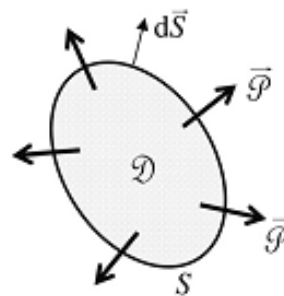
$$dW_1 = d\vec{f} \cdot \vec{v} dt = \rho d\tau \vec{E} \cdot \vec{v} dt = \vec{j} \cdot \vec{E} dt d\tau,$$

où $\vec{j} = \rho \vec{v}$ est le vecteur **densité de courant**. D'après le théorème de l'énergie cinétique, ce travail reçu provoque une variation de l'énergie cinétique de ces charges : $dE_c = dW_1$. Dans tout le domaine \mathcal{D} , la variation d'énergie par unité de temps correspond à la puissance reçue du champ électromagnétique par les charges mobiles, à savoir :

$$P_1 = \frac{dW_1}{dt} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{dE_c}{dt} d\tau = \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau.$$

(ii) D'autre part, comme il n'existe aucune raison pour que l'énergie du champ électromagnétique reste confinée dans un domaine fini de l'espace, une partie de cette énergie peut entrer ou sortir du domaine \mathcal{D} . Autrement dit, au cours du temps, une partie de l'énergie électromagnétique traverse la surface S délimitant le domaine \mathcal{D} .

Pour l'exprimer on peut, sans restreindre la généralité du problème, se placer dans la situation où l'énergie sort de \mathcal{D}



On peut définir la quantité d'énergie qui traverse un élément de surface $d\vec{S}$ pendant l'unité de temps, comme étant le flux à travers $d\vec{S}$ d'un certain vecteur $\vec{\mathcal{P}}$. La puissance qui s'échappe du domaine \mathcal{D} en franchissant la surface S est donc :

$$P_2 = \iint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S}.$$

La puissance totale perdue au sein du domaine \mathcal{D} , à savoir $-\frac{dU}{dt}$, est donc *a priori* égale à $P_1 + P_2$. La définition de la densité d'énergie électromagnétique implique que :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau.$$

ces relations conduisent à :

$$\frac{dU}{dt} = \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = -P_1 - P_2 = - \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \iint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S}.$$

D'après le théorème de la divergence, on a :

$$\iint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}} d\tau.$$

Donc :

$$\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial t} d\tau = - \iiint_{\mathcal{D}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}} d\tau.$$

cette relation est valable quel que soit le domaine \mathcal{D} . on peut finalement écrire que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}} = 0.$$

cette relation traduit le bilan local de l'énergie électromagnétique, avec un vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ dont l'expression en fonction du champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}) sera définie dans la prochaine section.

⑧ Vecteur de Poynting

Soient \vec{a} et \vec{b} deux vecteurs non nuls. D'après l'analyse vectorielle, on peut écrire que :

$$\operatorname{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}.$$

L'application de cette relation au champ électromagnétique s'écrit :

$$\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}.$$

L'équation de Maxwell-Faraday : $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit

$$\vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{B}^2}{\partial t}.$$

L'équation de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{soit}$$

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t}.$$

$$\text{Donc} \quad \operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t} - \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t},$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \operatorname{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = 0.$$

cette expression coïncide avec le bilan local d'énergie si nous posons :

$$u = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

$$\text{et} \quad \vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Le vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ ainsi défini s'appelle le **vecteur de Poynting**. Rappelons que le **flux** de $\vec{\mathcal{P}}$ à travers une surface donnée représente la quantité d'énergie électromagnétique qui traverse cette surface pendant l'unité de temps.

⑨ Application aux ondes planes

Nous nous plaçons dans le cas des ondes planes progressives dans le vide.

Nous savons que dans le vide les champs \vec{E} et \vec{B} sont liés par la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

avec $k = \omega/c$. Il en résulte immédiatement que :

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E})}{\mu_0 \omega} = \frac{\vec{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{k})}{\mu_0 \omega} = \frac{E^2 \vec{k}}{\mu_0 \omega} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{n}.$$

Cette relation montre que le vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ est orienté dans la direction de propagation $\vec{n} = \vec{k}/k$.

La relation $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ implique que $B = E/c$, et comme $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on a :

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 B^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \Rightarrow u = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}.$$

Il en résulte que dans ce cas les contributions des deux champs à la densité d'énergie électromagnétique u sont égales. On peut alors écrire que :

$$\vec{\mathcal{P}} = \varepsilon_0 E^2 c \vec{n} = \frac{B^2}{\mu_0} c \vec{n} = u c \vec{n}.$$

Par ailleurs E et B étant fonctions de $x - ct$, il en est de même de $\vec{\mathcal{P}}$.

À titre d'exemple, considérons une onde plane sinusoïdale monochromatique, se propageant suivant la direction Ox. On a :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t) \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(kx - \omega t),$$

\vec{E} et \vec{B} étant orthogonaux et dans le rapport c . Le vecteur de Poynting s'écrit selon

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2 c \vec{e}_x = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \vec{e}_x.$$

Sa valeur moyenne dans le temps en tout point x est

$$\langle \vec{\mathcal{P}} \rangle = \varepsilon_0 c E_0^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle \vec{e}_x = (\varepsilon_0 c E_0^2 / 2) \vec{e}_x.$$

la densité d'énergie électromagnétique en un point d'abscisse x s'écrit :

$$u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t).$$

Sa valeur moyenne est une valeur constante :

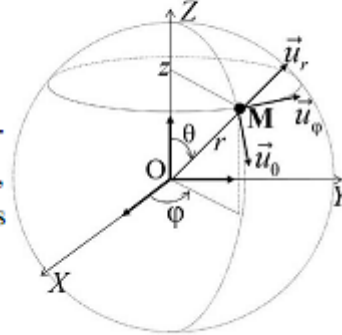
$$\langle u \rangle = \langle \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 / 2 = c \langle \mathcal{P} \rangle.$$

Application aux ondes sphériques

Les champs associés aux ondes sphériques sont de la forme suivante :

$$\psi(r, t) = \frac{1}{r} [f(t - r/c) + g(t + r/c)].$$

Considérons une onde sphérique dont le champ électrique a pour expression $\vec{E} = \frac{1}{r} E_0 e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\theta = E_\theta \vec{u}_\theta$, dans un système de coordonnées sphériques de vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.



L'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B} \quad \text{soit}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{i\omega} \text{rot} \vec{E} = \frac{1}{i\omega} \begin{vmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta E_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r E_\varphi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right) \end{vmatrix} = \frac{1}{i\omega} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r E_\theta)}{\partial r} \right) \end{vmatrix}$$

et donc

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega r} E_0 e^{i(kr - \omega t)} \vec{u}_\varphi = B_\varphi \vec{u}_\varphi.$$

En notation réelle, le champ électromagnétique s'écrit donc :

$$\vec{E} = \frac{1}{r} E_0 \cos(kr - \omega t) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{k}{\omega r} E_0 \cos(kr - \omega t) \vec{u}_\varphi,$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$, le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{r^2 \mu_0 c} \cos^2(kr - \omega t) \vec{u}_r.$$

La valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit :

$$\langle \vec{\mathcal{P}} \rangle = \frac{E_0^2}{2r^2 \mu_0 c} \vec{u}_r.$$

Ici aussi, on peut remarquer que $\vec{\mathcal{P}}$ est colinéaire à la direction de propagation de l'onde.

Le flux du vecteur $\vec{\mathcal{P}}$ à travers une demi-sphère de rayon $r = R$ centrée à l'origine s'écrit :

$$\Phi = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{E_0^2}{2r^2 \mu_0 c} \times (2\pi r \sin \theta) \times r d\theta = \frac{\pi E_0^2}{\mu_0 c} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = \frac{\pi E_0^2}{\mu_0 c}$$

On constate que ce flux indépendant de R .