Rappels sur les éléments d'analyse vectorielle

1 Notion de champ

Certaines grandeurs physiques couramment utilisées ne peuvent être définies de manière pertinente que par la donnée de la valeur de cette grandeur en différents points d'un milieu. Un exemple de telles grandeurs est la **température**. On ne peut définir de manière pertinente la température (qu'il fait ou qu'il fera) sur un pays qu'en précisant sa valeur en différents endroits du pays. De manière générale, lorsqu'on associe à tout point M(x,y,z) d'un milieu, une valeur $U(\mathrm{M}, t)$ d'une grandeur physique, on dit qu'on a défini un **champ** de cette grandeur physique. Par exemple, la donnée des valeurs de températures en différents endroits d'un territoire correspond à la définition d'un **champ de température** pour ce territoire.

Un champ peut être de nature **scalaire** ou **vectorielle** selon qu'il est défini par une grandeur physique scalaire (la température) ou vectorielle (le champ de gravitation terrestre).

- Un **champ** est dit **uniforme** dans une région donnée **D** si la grandeur définissant ce champ a la même valeur en chaque point de cette région :

$$U(\mathrm{M}, t) = U(t) \qquad \forall^{\mathrm{M}\in\mathrm{D}}$$

- Un champ est dit **stationnaire** (ou **permanent**) si la grandeur définissant ce champ ne dépend pas du temps :

$$U(\mathrm{M}, t) = U(\mathrm{M}) \qquad \forall^{\mathrm{M}\in\mathrm{D}} \quad \forall^{t}$$

2 Flux d'un champ vectoriel

2.1 Définition

DÉFINITION 1.1

- Le **flux** d'un champ $\vec{A}$ à travers un élément de surface élémentaire dS situé en un point M repéré par le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{r}$ s'écrit :

$$\mathrm{d}\phi = \overrightarrow{A(r)} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \overrightarrow{A(r)} \cdot \vec{n} \times \mathrm{d}S$$

où $\vec{n}$ représente le vecteur unitaire normal à l'élément de surface dS.

- Le **flux** de $\vec{A}$ à travers une surface macroscopique S s'écrit :

$$\phi(\vec{A}) = \iint_S \overrightarrow{A(r)} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Remarque Dans le cas d'une surface fermée, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ est défini à partir de l'élément de surface dS et de la normale orientée $\vec{n}$. Par convention la normale est orientée positivement de l'intérieur vers l'extérieur de la surface S.

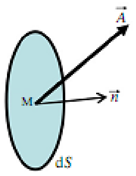


Figure 1.1 – Calcul de flux.

3 Divergence d'un vecteur

La divergence d'un vecteur $\vec{E}$ est un scalaire défini par :

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

4 Théorème de la divergence

Le flux d'un vecteur $\vec{E}$ à travers une surface fermée S est égal à la divergence de ce vecteur dans le volume V_S délimité par la surface S.

$$\iint_S \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}S} = \iiint_{V_S} \mathrm{div}(\vec{E})\, \mathrm{d}\tau$$

Ce théorème généralise le résultat précédent obtenu pour un volume élémentaire.

5 Circulation d'un champ de vecteur

Considérons un champ $\vec{E}$ dans une région donnée où l'on a défini une courbe Γ orientée (c'est-à-dire sur laquelle on a défini un sens positif) allant d'un point A à un point B. On appelle **circulation du vecteur** $\vec{E}$ le long de cette courbe, l'intégrale curviligne :

$$C_{\mathrm{AB}} = \int_\Gamma \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{dM}}$$

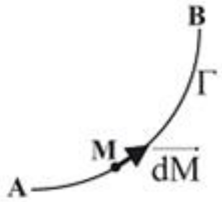


Figure 1.3 – Circulation d'un vecteur.

6 Rotationnel d'un vecteur

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{E}$ est un vecteur défini par :

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right]\vec{u}_x + \left[\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right]\vec{u}_y + \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right]\vec{u}_z$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme suivante :

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \vec{u}_x \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + \vec{u}_y \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + \vec{u}_z \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

Théorème 1.1

Théorème du Rotationnel (théorème de Stokes)

La circulation d'un vecteur $\vec{E}$ sur un contour fermé est égale au flux du rotationnel de $\vec{E}$ à travers toute surface ouverte s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_{\Gamma_f} \vec{E} \cdot \vec{dl} = \iint_{S_\Gamma} \vec{rot}(\vec{E}) \cdot \vec{dS}$$

7 Gradient d'une fonction

Soit $f(x, y, z)$ une fonction scalaire définie en tout point $M(x, y, z)$ d'un milieu donné. La différentielle de cette fonction, que l'on note $\mathrm{d}f$, représente la variation de cette fonction lorsqu'on passe du point $M(x, y, z)$ à un point infiniment voisin $M(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$.

Cette différentielle a pour expression :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z\right] \cdot \left[\mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z\right] \\ &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dM}} \end{aligned}$$

Le gradient d'une fonction f se définit, dans le système de coordonnées cartésiennes, par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

Il est à noter que $\mathrm{d}f$ est maximum lorsque $\overrightarrow{\mathrm{dM}}$ est parallèle à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$. Autrement dit, le gradient indique la direction de la plus grande variation d'un champ scalaire, et l'intensité de cette variation.

8 Laplacien scalaire

Le **laplacien scalaire** est l'opérateur différentiel défini par l'application de l'opérateur **gradient** suivie de l'opérateur **divergence** :

$$\Delta = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)$$

Le **laplacien scalaire** d'un champ $V(x, y, z)$ est un champ scalaire défini par :

$$\Delta V = \mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V\right)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, il s'écrit : $\Delta V = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

9 Laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel d'un champ vectoriel $\vec{A}$ est un champ vectoriel défini par $\Delta\vec{A} = \Delta A_x\vec{u}_x + \Delta A_y\vec{u}_y + \Delta A_z\vec{u}_z$. Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, $\Delta\vec{A}$ a pour composantes :

$$\begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

10 Opérateur nabla

L'opérateur **nabla**, couramment noté $\vec{\nabla}$, est un opérateur vectoriel défini en coordonnées cartésiennes comme suit : $\vec{\nabla} = \dfrac{\partial}{\partial x}\,\vec{u}_x + \dfrac{\partial}{\partial y}\,\vec{u}_y + \dfrac{\partial}{\partial z}\,\vec{u}_z$.

Cet opérateur possède les caractéristiques d'un vecteur, mais qui aurait pour particularité d'être constitué de composantes qui ne prennent pas de valeurs réelles.

Les composantes du vecteur $\vec{\nabla}$ sont plutôt des **opérateurs en attente d'argument**. Cependant, on peut manipuler les composantes de $\vec{\nabla}$ exactement comme on manipule les composantes scalaires d'un vecteur ordinaire (mais avec quelques précautions liées au fait que $\vec{\nabla}$ n'est pas commutatif avec toutes les opérations).

L'opérateur $\vec{\nabla}$ est un outil très commode pour manipuler aisément les principaux opérateurs différentiels :

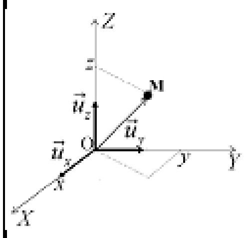
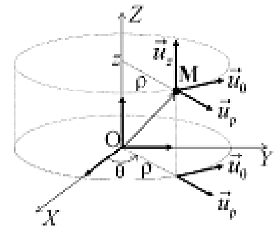
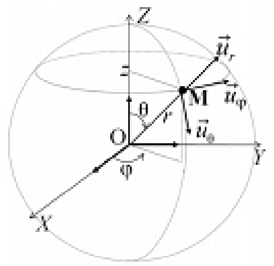
- Gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla} f$
- Divergence : $\text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$
- Rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$
- Laplacien : $\Delta f = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right) f = \left(\nabla^2\right) f = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f.$
- Laplacien vectoriel : $\Delta\vec{A} = \left(\nabla^2\right)\vec{A}$

Tableau 1 – Formules d'analyse vectorielle.

⋆ $\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$
⋆ $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\,\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\,\vec{C}$
⋆ $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) = \vec{0}$
⋆ $\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = 0$
⋆ $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$
⋆ $\text{div}\,(f\,\vec{A}) = \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\, f + f\,\text{div}\,\vec{A}$
⋆ $\overrightarrow{\text{rot}}\,(f\,\vec{A}) = f\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A}\wedge\overrightarrow{\text{grad}}\, f$
⋆ $\overrightarrow{\text{grad}}(f\,g) = g\,\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) + f\,\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, g\right)$

⋆ $\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$
⋆ $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{A}\,\text{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\text{div}\,\vec{A} + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{B}$
⋆ $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} + \vec{B}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{B}$
⋆ $\overrightarrow{\text{grad}}\,(\vec{A}\cdot\vec{A}) = 2\vec{A}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + 2(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{A}$
⋆ $\Delta(f\,g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\overrightarrow{\text{grad}}\, f\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\, g$

Tableau 2-Formulaire d'analyse vectorielle.

Système de coordonnées	cartésienne	cylindrique	sphérique
	 $M(x,y,z)$	 $M(\rho,\theta,z)$	 $M(r,\theta,\varphi)$
Base	$(\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z)$	$(\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$	$(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$
$\overline{\mathrm{OM}}$	$x\vec{u}_x+y\vec{u}_y+z\vec{u}_z$	$\rho\vec{u}_\rho+z\vec{u}_z$	$r\vec{u}_r$
$\mathrm{d}\overline{\mathrm{OM}}$	$\mathrm{d}x\vec{u}_x+\mathrm{d}y\vec{u}_y+\mathrm{d}z\vec{u}_z$	$\mathrm{d}\rho\vec{u}_\rho+\rho\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta+\mathrm{d}z\vec{u}_z$	$\mathrm{d}r\vec{u}_r+r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta+r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$
$\vec{A}$	$A_x\vec{u}_x+A_y\vec{u}_y+A_z\vec{u}_z$	$A_\rho\vec{u}_\rho+A_\theta\vec{u}_\theta+A_z\vec{u}_z$	$A_r\vec{u}_r+A_\theta\vec{u}_\theta+A_\varphi\vec{u}_\varphi$
$\vec{\nabla}$	$\vec{u}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{u}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{u}_z\frac{\partial}{\partial z}$	$\vec{u}_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\vec{u}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{u}_z\frac{\partial}{\partial z}$	$\vec{u}_r\frac{\partial}{\partial r}+\vec{u}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\vec{u}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$
$\vec{\nabla}f=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$	$\frac{\partial f}{\partial\rho}\vec{u}_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$	$\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{u}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\mathrm{div}\,\vec{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]$
$\vec{\nabla}\wedge\vec{A}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$	$\begin{vmatrix}\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z}\\ \frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\\ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\end{vmatrix}$
$\Delta f=$	$\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2f}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2f}{\partial\varphi^2}$

Théorème 1.2

Théorème de la divergence
(Théorème de Green-Ostrogradsky)

Soit une surface fermée S délimitant un volume V. On a :

$$\iint_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\iiint_V \mathrm{div}(\vec{A})\,d\tau$$

L'élément de surface $d\vec{S}$ est orienté de l'intérieur de V vers l'extérieur de V. $d\tau$ est un élément de volume centré en un point de V.

Le caractère plus ou moins tourbillonnaire d'un champ en un point donné est quantitativement mesurable par la valeur de la circulation de ce champ le long d'un élément de contour centré en ce point. Cela se traduit par le théorème qui suit :

Théorème 1.3

Théorème du rotationnel (Théorème de Stokes)

Soit S une surface ouverte délimitée par un contour fermé (Γ). On a :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}(\vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{l}$ est un déplacement élémentaire le long de Γ.

Exercice d'application

En utilisant les coordonnées cartésiennes, démontrer les relations suivantes :

$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f\,g) = f\ \overrightarrow{\text{grad}}\,g + g\,\overrightarrow{\text{grad}}\,f$

$\text{div}\,(f\vec{A}) = f\ \text{div}\,\vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,f$

$\text{div}\,(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$

$\overrightarrow{\text{rot}}\,(f\,\vec{A}) = f\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\,f$

$\text{div}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{A}) = 0$

$\overrightarrow{\text{rot}}\ (\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = 0$

$\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A})$

$\Delta V = \text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}}\,V)$

Les démonstrations proposées s'exécutent rapidement à l'aide de l'opérateur nabla, et en appliquant la règle usuelle de dérivation d'un produit de deux fonctions $[(f \times g)' = f' \times g + f \times g']$.

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f\,g) = \vec{\nabla}(f\,g) = g\,\vec{\nabla}(f) + f\,\vec{\nabla}(g) = g\ \overrightarrow{\text{grad}}\,f + f\,\overrightarrow{\text{grad}}\,g$
- $\text{div}\,(f\vec{A}) = \vec{\nabla} \cdot (f\,\vec{A}) = \vec{\nabla}f \cdot \vec{A} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\,f + f\ \text{div}\,\vec{A}$
- $\text{div}\,(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$

Ici, on peut appliquer la règle usuelle de dérivation d'un produit de deux fonctions, et la règle de permutation des vecteurs dans un produit mixte, $\left[\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a})\right]$ mais en gardant à l'esprit que l'opérateur $\vec{\nabla}$ ne commute pas avec la grandeur à laquelle il s'applique. Autrement dit, une grandeur $\vec{A}$ ne peut passer à gauche de $\vec{\nabla}$ que lorsque $\vec{A}$ est traité comme une constante.

$$\text{div}\,(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{A})$$

$$= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

$$\text{soit div}\,(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$$

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{A}) = \vec{\nabla}\wedge(f\vec{A}) = \vec{\nabla}f\wedge\vec{A} + f\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = -\vec{A}\wedge\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$
$= -\vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f + f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$
- $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0$ car $\vec{\nabla}$ est perpendiculaire à $\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$.
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f) = \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}f = 0$
- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

donc $\Delta\vec{A} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\vec{A}) - \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A})$.

- $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}V) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})V = \nabla^2 V = \Delta V$.