TD 1

Exercice 1

Comment s'écrivent les équations de Maxwell dans le vide ?

a. $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{div}(\vec{B}) = 0$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

b. $\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{div}(\vec{B}) = 0$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

c. $\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\quad \mathrm{div}(\vec{B}) = 0$ $\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Exercice 2

1. La 3eem équation de Maxwell nous dit que $\overrightarrow{rot}\vec{E}$ est égale à : $\quad a.\ 0 \quad , b.\ -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad c.\ \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

2. L'équation de Maxwell div$\vec{B}$=0 signifie que :
   a. Les lignes du champ magnétique $\vec{B}$ divergent
   b. Le champ $\vec{B}$est à flux conservatif
   c. Le champ $\vec{B}$ varie en fonction du temps

3. Le terme $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ représente :

   a. Un courant de conduction
   b. Un courant de déplacement
   c. Un courant de dérive

Exercice 3

Soit, dans le vide, un champ électrique de composantes :

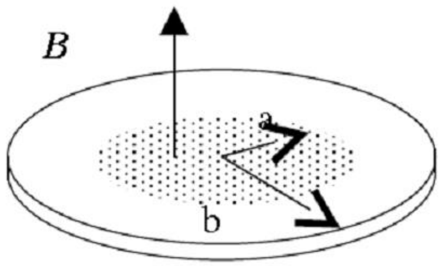
$E_x = 0,\ E_y = 0,\quad E_z = E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$

1. Calculer sa divergence et son rotationnel.
2. En déduire les composantes du champ magnétique $\vec{B}$ qui l'accompagne.
3. Calculer $div\vec{B}$ et $\overrightarrow{rot}\vec{B}$
4. Quelle relation doit lier α et β pour que soient satisfaites les équations de Maxwell.

Exercice 4

Un disque conducteur, de conductivité ,de rayon b et d'épaisseur « faible » e est plongé dans un champ $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{e_z}$ localisé dans un cylindre de rayon a<b et nul ailleurs (figure 1). On convient de négliger le champ créé par le courant induit.

1. Donner l'équation de Maxwell relative à l'induction sous forme locale et intégrale.
2. Utiliser la forme intégrale de l'équation précédente et déterminer l'expression du champ électromoteur induit dans les deux cas suivants : r<a et a<r<b.



TD 1

Solution

Exercice 1

Réponse a ;

Exercice 2

1. La 3e équation de Maxwel nous dit que $\overrightarrow{rot}\vec{E}$ est égale à : *b.* $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2. L'équation de conservation de la charge s'écrit : *b.* $div\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
3. L'équation de Maxwell $div\vec{B} = 0$ signifie que : Le champ $\vec{B}$ est à flux conservatif
4. Le terme $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ représente : Un courant de déplacement

Exercice 3

Soit, dans le vide, un champ électrique de composantes :

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \qquad E_z = E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$$

La divergence : on a immédiatement

$div\vec{E} = 0$ puisqu'on est dans le vide $\rho = 0$

Le rotationnel. a pour composantes

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = \begin{cases} \left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right)_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \\ \left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right)_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \beta E_z \\ \left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right)_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

$\vec{B}$ n'a de composante non nulle que B_y ($\vec{E}$ est suivant *z*, la direction de propagation suivant *x*)

La loi de Faraday donne: $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = -\beta E_z = -\beta E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$

Si on élimine un champ constant qui ne se propage pas :

$$B_y = -\frac{\beta}{\alpha} E_0 e^{(\alpha t - \beta x)}$$

D'où : $div\vec{B} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$

Il vient d'autre part :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \begin{cases} \left(\overrightarrow{rot}\vec{B}\right)_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \\ \left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right)_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0 \\ \left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right)_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\beta^2}{\alpha} E_0 e^{(\alpha t - \beta x)} = \frac{\beta^2}{\alpha} E_z \end{cases}$$

TD 1

Le théorème d'Ampère nous impose d'avoir :

$$\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right)_z = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \quad soit \quad \frac{\beta^2}{\alpha}E_z = \mu_0\varepsilon_0\alpha E_z$$

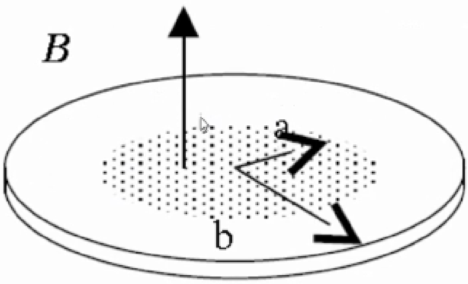
Pour que les équations de Maxwell soient satisfaites il faut que :

$\alpha^2 = \mu_0\varepsilon_0\beta^2 = c^2\beta^2$ où c est la vitesse de la lumière.

Exercice 4

7) Montrer que la valeur moyenne de cette puissance est :

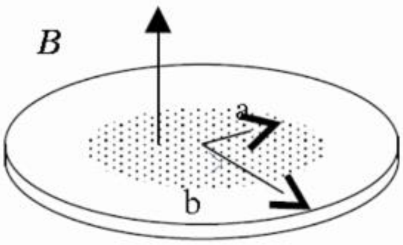
$$< P_j >= \frac{\pi\gamma\omega^2 B_0^2 e a^4}{16}$$



1°) En utilisant la symétrie, préciser la direction du champ électromoteur induit.

$\vec{B}$ Est contenu dans le plan $\left(\vec{e_r},\vec{e_z}\right)$

Donc $\left(\vec{e_r},\vec{e_z}\right)$ est un plan d'antisymétrie donc $\vec{E} = E\vec{e_\theta}$



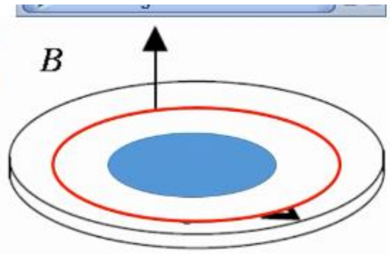
2) Donner l'équation de Maxwell relative à l'induction sous forme locale et intégrale.

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \oint \vec{E}\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\oiint \vec{B}\vec{dS}$$

Université Djilali Bounaama de Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Niveau : Master 1 SDT
Département d'électronique et communication
Module : Radiocommunication

TD 1

3) Utiliser la forme intégrale de l'équation précédente et déterminer l'ex[...] champ électromoteur induit dans les deux cas suivants : r < a et a< r <b.



➢ Cas r < a

$$\oint \vec{E}\,\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{B}\,\vec{dS} \quad \Rightarrow \quad r < a \qquad E(\rho,t)2\pi\rho = -\frac{dB}{dt}\pi\rho^2$$

$$\boxed{\vec{E}(\rho,t) = \frac{\rho\omega B_{0m}\sin(\omega t)}{2}\vec{e_\theta}} \qquad \boxed{\vec{E}(\rho,t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

➢ Cas a< r < b

$$\oint \vec{E}\,\vec{dl} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{B}\,\vec{dS} \quad \Rightarrow \quad r < a \qquad E(\rho,t)2\pi\rho = -\frac{dB}{dt}\pi a^2$$

$$\boxed{\vec{E}(\rho,t) = \frac{a^2\omega B_{0m}\sin(\omega t)}{2\rho}\vec{e_\theta}}$$