Chapitre 1. Théorie du champ électromagnétique

I. Rappels sur les équations de Maxwell

Les quatre équations de Maxwell constituent le fondement de la théorie électromagnétique. Elles furent publiées en 1864. En 1885, Hertz fut le premier à produire et à détecter des ondes électromagnétiques, autres que des ondes lumineuses, prédites par la théorie de Maxwell et à mesurer leur vitesse de propagation.

I.1. Énoncé

Le champ électromagnétique ($\vec{E}$, $\vec{B}$) est défini dans un référentiel R donné, par la force qui s'exerce sur une particule chargée q, dite **force de Lorentz** :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Dans un référentiel R galiléen, le champ électromagnétique vérifie les quatre **équations de Maxwell** :

Maxwell-Gauss $$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Maxwell-Faraday $$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Maxwell-Flux $$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Maxwell-Ampère

0

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

On distingue les équations avec sources (Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère), qui contiennent les termes ρ et $\vec{j}$ correspondant aux densités volumiques de charges et de courants sources du champ électromagnétique, des équations sans sources (Maxwell-Flux ou Maxwell-Thomson et Maxwell-Faraday).

En régime stationnaire :

Maxwell-Gauss $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = \vec{0}$

Maxwell-Flux $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

On retrouve les lois locales de l'électrostatique et de la magnétostatique. On constate alors que les équations en

$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont découplées.

I.2. Forme intégrée de l'équation de Maxwell-Faraday

On a déjà vu dans les cours d'électrostatique et de magnétostatique que

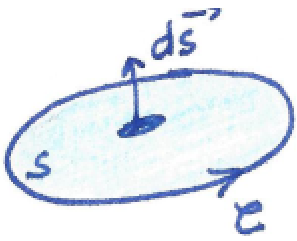
- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Gauss donne le théorème de Gauss.
- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Flux indique que $\vec{B}$ est à flux conservatif.
- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire donne le

théorème d'Ampère.

- la forme intégrée de l'équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire indique que $\vec{E}$ conservative et permet de poser $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$ .En régime variable, l'équation de Maxwell-Faraday indique que $\vec{E}$ n'est plus à circulation conservative.

Calculons la circulation C de $\vec{E}$ sur un contour C fermé, orienté, sur lequel s'appuie une surface S dont l'orientation se déduit de celle de C par la règle de la main droite. C et S sont supposés fixes dans le référentiel d'étude. On a, d'après le théorème de Stokes :

$$\oint_C \vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\mathrm{d}\vec{S}$$



La surface S étant fixe, on peut sortir l'opérateur de dérivation temporelle de l'intégrale :

$$\oint_C \vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}.\mathrm{d}\vec{S}$$

On reconnaît la dérivée du flux de $\vec{B}$ à travers le circuit C.

Considérons C un circuit filiforme. On définit e la force électromotrice de ce circuit par :

$$e = \oint_C \vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell}$$

On a alors

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

On retrouve la **loi de Faraday** vue dans le cours sur l'induction électromagnétique.

Remarque : interprétation énergétique de la f.e.m. e

Soit une charge ponctuelle q :

$$qe = \oint_C q\vec{E}.\mathrm{d}\vec{\ell}$$

qe représente le travail de la force électrique q $\vec{E}$ s'exerçant sur la charge q, et donc l'énergie algébriquement

reçue par cette charge lorsqu'elle a parcouru un tour de circuit.

I.3. Conservation de la charge

On a vu que la conservation de la charge était un postulat fondamental de la physique qui se traduit par la relation locale $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0$ (cf EM3). Il n'est pas nécessaire d'ajouter de postulat aux quatre équations de Maxwell car elles le contiennent déjà.

On a toujours :

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\right) = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{\jmath} + \varepsilon_0 \operatorname{div}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

On peut inverser les dérivées temporelles et spatiales (théorème de Cauchy-Schwarz)

$$\operatorname{div}\vec{\jmath} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{E} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{\jmath} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) = 0$$

On retrouve l'**équation locale de conservation de la charge** :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\jmath} = 0$$

Ainsi, il est inutile d'ajouter ce postulat ~~au~~x équations de Maxwell.

I.4. Équations de Maxwell dans le vide

Dans le vide $\rho = 0$ et $\jmath = 0$.

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

II. Équation locale de conservation de l'énergie : vecteur de Poynting

II.1. Bilan énergétique. Vecteur flux d'énergie électromagnétique

a) Densité volumique d'énergie électromagnétique

On a montré dans les chapitres précédents que l'on pouvait associer à un champ électrique $\vec{E}$ une densité volumique d'énergie $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ et à un champ magnétique $\vec{B}$ une densité volumique d'énergie $\frac{1}{2\mu_0} B^2$.

De manière générale, on peut définir la **densité volumique d'énergie électromagnétique** w_{em}.

On note w_{em} la **densité volumique d'énergie électromagnétique.**

Un volume élémentaire $d\tau$ entourant un point M donné contient une énergie électromagnétique :

$$w_{em}(M,t)\mathrm{d}\tau$$

$[w_{em}] =$ J.m^{-3}

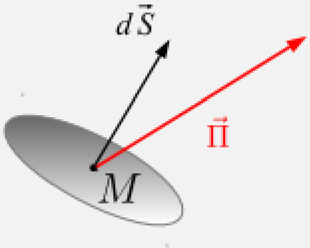
b) ecteur flux d'énergie électromagnétique

On définit $\vec{\Pi}$ le vecteur flux d'énergie électromagnétique, appelé **vecteur de Poynting**.

$\vec{\Pi}.\mathrm{d}\vec{S}dt$ représente l'énergie électromagnétique ayant traversé la surface orientée élémentaire $\mathrm{d}\vec{S}$ pendant le temps dt.

- ▹ $\vec{\Pi}.\mathrm{d}\vec{S}$ est donc homogène à une puissance (en watt).
- ▹ $\|\vec{\Pi}\|$ est homogène à une puissance par unité de surface.

  $[\|\vec{\Pi}\|] = \mathrm{W.m^{-2}}$.



II.2. Bilan énergétique dans le vide sur un volume macroscopique

La force de Lorentz peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

La force magnétique $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ a une puissance nulle car $q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v} = 0$. Seule la force électrique q $\vec{E}$ peut transférer de l'énergie à une charge.

On a vu (voir chapitre EM3) que la puissance volumique cédée par le champ électrique à un conducteur avait pour expression $\mathcal{P}_v = \vec{j}.\vec{E}$. .

Dans le vide, j = 0, l'énergie électromagnétique ne peut pas être convertie en une autre forme d'énergie. Elle est donc conservée.

n souhaite exprimer localement la conservation de l'énergie électromagnétique **dans le vide** à partir d'un bilan macroscopique sur un volume V donné.

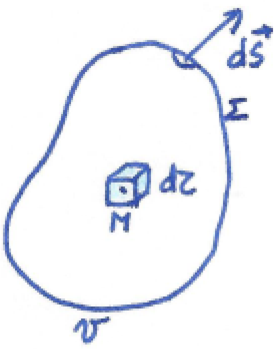
On note $E_{em}(t)$ l'énergie électromagnétique contenue dans ce volume V à l'instant t. La variation d'énergie électromagnétique contenue dans le volume V entre l'instant t et l'instant t+dt est égale l'énergie algébriquement **reçue** pendant dt. On calcule donc le flux **entrant** de $\vec{\Pi}$ (d'où l'orientation —d S du vecteur surface).

$$\mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t+\mathrm{d}t) - \mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t) = \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi}.(-\mathrm{d}\vec{S})\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t+\mathrm{d}t) - \mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} w_{\mathrm{em}}(M, t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}\tau - \iiint_{\mathcal{V}} w_{\mathrm{em}}(M, t)\mathrm{d}\tau$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t+\mathrm{d}t) - \mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} [w_{\mathrm{em}}(M, t+\mathrm{d}t) - w_{\mathrm{em}}(M, t)]\, \mathrm{d}\tau$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t+\mathrm{d}t) - \mathcal{E}_{\mathrm{em}}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial w_{\mathrm{em}}}{\partial t}(M, t)\mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau$$



d'où

$$\iiint_{\mathscr{V}} \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t}(M,t)\mathrm{d}\tau \cancel{\mathrm{d}t} = \oiint_{\Sigma} \vec{\Pi}.(-\mathrm{d}\vec{S})\cancel{\mathrm{d}t}$$

En utilisant de théorème d'Ostrogradski

$$\iiint_{\mathscr{V}} \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t}(M,t)\mathrm{d}\tau = -\iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{div}\,\vec{\Pi}\mathrm{d}\tau$$

La relation devant être vérifiée quel que soit $\mathscr{V}$

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{\Pi}$$

Dans le vide, la densité volumique d'énergie w_{em} et le vecteur flux d'énergie $\vec{\Pi}$, appelé vecteur de Poynting vérifient la relation :

$$\frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{\Pi} = 0$$

II.3. Détermination de w_{em} et du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

On part des équations de Maxwell dans le vide :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (M.F.)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (M.A.)$$

En multipliant scalairement l'équation de Maxwell-Faraday (M.F.) par B→ et l'équation de Maxwell-Ampère

(M.A.) par E→ , on fait apparaître, à un facteur multiplicatif près, les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique.

$$\begin{cases} \vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\vec{B}\cdot\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (1) \\ \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\vec{E}\cdot\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$

$$\vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} - \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 E^2\right)$$

D'après la formule d'analyse vectorielle $\mathrm{div}\,(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}$ on peut ecrire

$$\vec{B}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} - \vec{E}.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mathrm{div}\,(\vec{E}\wedge\vec{B})$$

$$\mathrm{div}\,(\vec{E}\wedge\vec{B}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0 E^2\right) = 0$$

On divise par μ0 pour obtenir des termes homogènes à une densité volumique d'énergie

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}B^2+\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2\right)=0$$

En posant $\vec{\Pi}=\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ et $w_{em}=\dfrac{1}{2\mu_0}B^2+\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2$ on obtient

$$\frac{\partial w_{em}}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{\Pi}=0$$

Retenir : $\vec{\Pi}=\dfrac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ $\quad w_{em}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\dfrac{1}{2\mu_0}B^2$

III. Ondes électromagnétiques

III.1. Définition de l'opérateur laplacien vectoriel

Rappel sur le laplacien scalaire

En électrostatique, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}=\vec{0}$ permet de poser $\vec{E}=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$.

Dans le vide ($\rho=0$), $\operatorname{div}\vec{E}=0$ entraîne alors $-\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}})V=0$ soit

$$\Delta V=0$$

où $\Delta V=\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V)$ représente le **laplacien scalaire** de V. Il est l'équivalent à trois dimensions de la courbure (liée à la dérivée seconde d'une fonction) à une dimension.

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}$$

Avec la notation nabla (utilisable uniquement en coordonnées cartésiennes) :

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\,\vec{u}_x+\frac{\partial}{\partial y}\,\vec{u}_y+\frac{\partial}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

$$\Delta V=\nabla^2V$$

Soit V un champ scalaire. On définit le **laplacien scalaire** ΔV par

$$\Delta V=\operatorname{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V)$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta V=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}$$

Définition du laplacien vectoriel

Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel, on définit l'opérateur **laplacien vectoriel** $\vec{\Delta}\vec{A}$ par la relation

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\text{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$$

Il a pour expression en **coordonnées cartésiennes** :

$$\vec{\Delta}\vec{A} = \Delta A_x \vec{u}_x + \Delta A_y \vec{u}_y + \Delta A_z \vec{u}_z$$

ce qui correspond à

$$\vec{\Delta}\vec{A} = \left| \begin{array}{l} \Delta A_x = \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \Delta A_y = \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \Delta A_z = \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{array} \right.$$

III.2. Établissement de l'équation d'onde

Dans le vide $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$, les équations de Maxwell deviennent :

$$\text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- **Équation vérifiée par $\vec{E}$**

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,(\underbrace{\text{div}\,\vec{E}}_{=0}) - \vec{\Delta}\vec{E}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$$

On peut inverser les dérivées spatiales et temporelles (théorème de Cauchy-Schwarz)

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\right) = -\vec{\Delta}\vec{E}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\Delta}\vec{E}$$

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

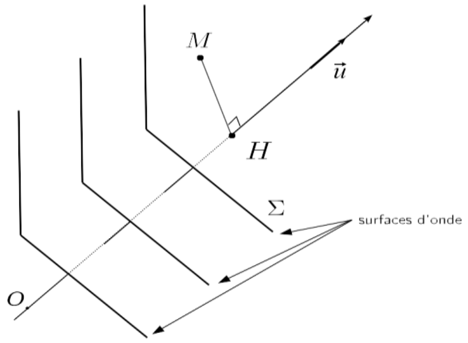
On trouve une équation de propagation de la forme :

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

- **Équation vérifiée par $\vec{B}$**

On peut procéder de même avec le champ

magnétique :



$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\underbrace{(\text{div}\,\vec{B})}_{=0} - \vec{\Delta}\vec{B}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = -\vec{\Delta}\vec{B}$$

D'où, en inversant les dérivées spatiales et temporelles (théorème de Cauchy-Schwarz)

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right) = -\vec{\Delta}\vec{B}$$

$$-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\vec{\Delta}\vec{B}$$

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On retrouve une équation de propagation de la forme :

$$\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \qquad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

On obtient pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$ une généralisation à trois dimensions de l'**équation de D'Alembert**. En coordonnées cartésiennes, chaque composante du champ électrique et du champ magnétique vérifie l'équation de propagation :

$$\Delta E_i - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0$$

avec c **vitesse de propagation des ondes électromagnétiques** dans le vide :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

III.3. Ondes électromagnétiques planes OEMP

On considère une onde électromagnétique caractérisé par les champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. On nomme **surface d'onde Σ** le lieu des points M où, à $t = t_0$ fixé, le signal $\vec{E}(M, t_0)$ (ou $\vec{B}(M, t_0)$) a la même valeur.

Pour une **onde plane**, les surfaces Σ sont des plans, perpendiculaires à une même direction (voir schéma ci-dessous). On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire associé cette direction.

On en déduit l'expression générale de $\vec{E}$:

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}(\overline{OH},t) = \vec{E}(\overrightarrow{OM}.\vec{u},t)$$

Si on choisit la direction $\vec{u}_x$ telle que $\vec{u} = \vec{u}_x$, on aura

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}(x,t)$$

> Lorsqu'une onde est plane, on peut toujours choisir un repère cartésien tel que ses grandeurs vibrantes (ici $\vec{E}$ ou $\vec{B}$) ne dépendent que d'une variable d'espace (soit *x*, soit *y*, soit *z*).

III.4. Ondes électromagnétiques planes progressives OEMPP

Rappels : préciser la nature des signaux dont les expressions sont indiquées ci-dessous :

- $f(x - ct)$ onde plane se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c.
- $f(t - \frac{x}{c})$onde plane se propageant dans le sens des x croissants à la vitesse c.
- $g(z + ct)$ onde plane se propageant dans le sens des z décroissants à la vitesse c.
- $g(t + \frac{y}{c})$ onde plane se propageant dans le sens des y décroissants à la vitesse c.

On considère une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans la direction de $\vec{u}_x$ à la vitesse c. Elle aura pour expression :

$\vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right)$ ou, de manière équivalente, $\vec{E}(x - ct)$

De manière générale, une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans la direction du vecteur unitaire u aura pour expression :

$$\vec{E}\left(t - \frac{\overrightarrow{OM}.\vec{u}}{c}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{E}(\overrightarrow{OM}.\vec{u} - ct)$$

Si on choisit la direction u_x telle que $u = u_x$, on aura

$$\vec{E}\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{ou} \quad \vec{E}(M,t) = \vec{E}(x - ct)$$

On peut vérifier que ce champ est solution de l'équation de d'Alembert

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On peut écrire $\vec{E}\left(t-\frac{x}{c}\right)=E_x\left(t-\frac{x}{c}\right)\vec{u}_x+E_y\left(t-\frac{x}{c}\right)\vec{u}_y+E_z\left(t-\frac{x}{c}\right)\vec{u}_z$

• Calcul de $\vec{\Delta}\vec{E}$:

On calcule $\vec{\Delta}\vec{E}=\Delta E_x\vec{u}_x+\Delta E_y\vec{u}_y+\Delta E_z\vec{u}_z$

avec $\Delta E_x=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_x\left(t-\frac{x}{c}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x\left(t-\frac{x}{c}\right)$ car E_x ne dépend pas de y,

de même $\Delta E_y=\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y$ et $\Delta E_z=\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z$.

On pose $u=t-\frac{x}{c}$. On a $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{c}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}=1$

$\frac{\partial}{\partial x}E_x\left(t-\frac{x}{c}\right)=\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}u}$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_x\left(t-\frac{x}{c}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}^2E_x}{\mathrm{d}u^2}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2E_x}{\mathrm{d}u^2}$

On peut montrer de même que $\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y=\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2E_y}{\mathrm{d}u^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z=\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2E_z}{\mathrm{d}u^2}$.

ainsi $\boxed{\vec{\Delta}\vec{E}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2E_x}{\mathrm{d}u^2}\vec{u}_x+\frac{\mathrm{d}^2E_y}{\mathrm{d}u^2}\vec{u}_y+\frac{\mathrm{d}^2E_z}{\mathrm{d}u^2}\vec{u}_z\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\vec{E}}{\mathrm{d}u^2}}$

• Calcul de $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$:

$\frac{\partial}{\partial t}E_x\left(t-\frac{x}{c}\right)=\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}E_x}{\mathrm{d}u}$

$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x\left(t-\frac{x}{c}\right)=\frac{\mathrm{d}^2E_x}{\mathrm{d}u^2}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}^2E_x}{\mathrm{d}u^2}$

de même $\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2}=\frac{\mathrm{d}^2E_y}{\mathrm{d}u^2}$ et $\frac{\partial^2E_z}{\partial t^2}=\frac{\mathrm{d}^2E_z}{\mathrm{d}u^2}$.

ainsi $\boxed{\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}\vec{u}_x+\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2}\vec{u}_y+\frac{\partial^2E_z}{\partial t^2}\vec{u}_z\right)=\frac{\mathrm{d}^2\vec{E}}{\mathrm{d}u^2}}$

On vérifie bien $\vec{\Delta}\vec{E}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0}$

IV. OEMPPH Onde ÉlectroMagnétique Plane Progressive Harmonique

Grâce à l'analyse de Fourier, toute onde plane peut s'exprimer comme la superposition d'ondes planes progres- sives harmoniques.

IV.1. Expression générale

On note r = OM le vecteur position du point M . Soit E_i une composante quelconque du champ électrique sur la base ($\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$). On a, pour une OEMPPH :

$$E_i=E_{0i}\cos\left(\omega\left(t-\frac{\vec{r}.\vec{u}}{c}\right)+\varphi_i\right)$$

$$E_i=E_{0i}\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}\vec{u}.\vec{r}+\varphi_i\right)$$

On pose

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u} = k\vec{u} \text{ avec } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

appelé **vecteur d'onde**

$$E_i = E_{0i} \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_i\right)$$

Le champ électrique associé à une OEMPPH se propageant dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ a pour expression générale :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \left| \begin{array}{l} E_{0x}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_x) \\ E_{0y}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_y) \\ E_{0z}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_z) \end{array} \right.$$

avec $\vec{k} = k\vec{u} = \frac{\omega}{c}\vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$ le **vecteur d'onde** associé à cette onde.

On pourrait écrire une expression équivalente pour B⃗

(→r, t). Rappels des formules à connaître :

- ω est appelée la **pulsation** de l'onde
  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ avec T la **période** de l'onde et $f = \frac{1}{T}$ sa **fréquence**.
- $\lambda = cT = \frac{c}{f}$ est la **longueur d'onde** : c'est la période spatiale de l'onde. Elle correspond à la distance parcourue par l'onde en une période T. On a la relation :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

IV.2. Notation complexe

On peut rendre la notation du champ électrique E⃗ beaucoup plus compacte à l'aide de la notation complexe.

On pose

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{E}}_0 \left| \begin{array}{l} E_{0x}e^{j\varphi_x} \\ E_{0y}e^{j\varphi_y} \\ E_{0z}e^{j\varphi_z} \end{array} \right.$$

avec $\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}})$.

Cette notation permet de simplifier les calculs.

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

$$\vec{k} \left| \begin{array}{l} k_x \\ k_y \\ k_z \end{array} \right. \qquad \vec{r} \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right. \qquad \vec{k}.\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z \qquad \underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0\, e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \qquad \boxed{\vec{\nabla} \left| \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} = -jk_x \\ \frac{\partial}{\partial y} = -jk_y \\ \frac{\partial}{\partial z} = -jk_z \end{array} \right. = -j\vec{k}}$$

De même, $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} = j\omega}$.

Retenir :

$$\text{Si on pose } \underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0\, e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})} \quad \text{alors} \quad \vec{\nabla} = -j\vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

Remarque : on pourrait également poser

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0\, e^{j(\vec{k}.\vec{r} - \omega t)}$$

$$\text{dans ce cas } \vec{\nabla} = j\vec{k} \text{ et } \frac{\partial}{\partial t} = -j\omega$$

Il faut donc s'adapter à la convention de signe choisie par l'énoncé.

IV.3. Structure d'une OEMPPH dans le vide

a) Retranscription des équations de Maxwell

Équations de Maxwell dans le vide :

$$\text{div}\,\vec{E} = 0 \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

retranscrites à l'aide du vecteur nabla :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

on obtient en notation complexe :

$$-j\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0 \qquad -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}}$$

$$-j\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0 \qquad -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\varepsilon_0 j\omega\underline{\vec{E}}$$

a) Structure transverse

D'après l'équation de Maxwell-Gauss

$$\vec{k}.\underline{\vec{E}} = 0$$

D'où, avec $\vec{k} = k\,\vec{u}$

$$\vec{u}.\underline{\vec{E}} = 0$$

En prenant la partie réelle

$$\text{Re}(\vec{u}.\underline{\vec{E}}) = \vec{u}.\,\text{Re}(\underline{\vec{E}}) = \vec{u}.\vec{E} = 0$$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{E} = 0}$$

Le champ électrique $\vec{E}$ est donc à tout instant perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{u}$.

On démontre de même, à partir de l'équation de Maxwell-flux, $\vec{k}.\underline{\vec{B}} = 0$ que

$$\boxed{\vec{u}.\vec{B} = 0}$$

Le champ électrique $\vec{B}$ est donc à tout instant perpendiculaire à la direction de propagation u.

b) Couplage entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, en simplifiant par —**j** :

$$\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = \omega \underline{\vec{B}}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

En prenant les parties réelles :

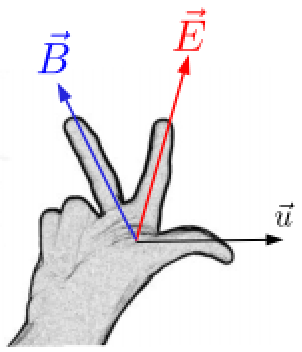
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}}$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\vec{B} = \frac{\frac{\cancel{\omega}}{c}\vec{u} \wedge \vec{E}}{\cancel{\omega}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}}$$

Le trièdre ($\vec{u}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$) est un trièdre direct.



On calcule la norme de $\vec{B}$, en tenant compte du fait que $\vec{u} \perp \vec{E}$:

$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{u}\|\|\vec{E}\|}{c} = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

c) Relation de dispersion

On cherche à établir la relation entre k et ω à partir des équations de Maxwell.

$$\begin{cases} \text{M.F.} & -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -j\omega\underline{\vec{B}} \\ \text{M.A.} & -j\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\varepsilon_0 j\omega\underline{\vec{E}} = \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{M.F.} & \vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = \omega\underline{\vec{B}} \\ \text{M.A.} & -\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = \mu_0\varepsilon_0\omega\underline{\vec{E}} \end{cases}$$

D'après M.F. $\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$. On reporte dans M.A.

$$-\vec{k}\wedge\left(\frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}\right) = \mu_0\varepsilon_0\omega\underline{\vec{E}}$$

D'où, en utilisant la formule du double produit vectoriel

$$\boxed{\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}}$$

$$-\frac{(\vec{k}.\underline{\vec{E}})\,\vec{k} - k^2\underline{\vec{E}}}{\omega} = \mu_0\varepsilon_0\omega\underline{\vec{E}}$$

$$\frac{k^2\underline{\vec{E}}}{\omega} = \mu_0\varepsilon_0\omega\underline{\vec{E}}$$

$$k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

On retrouve la relation $k = \dfrac{\omega}{c}$.

Généralisation : relation de structure

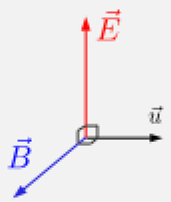
D'après l'analyse de Fourier, toute OEMPP se propageant dans la direction →u peut s'écrire comme une super- position d'OEMPPH se propageant suivant la même direction →u avec des pulsations différentes. Or la structure d'une OEMPPH est indépendante de ω. On peut donc étendre les propriétés établies pour les OEMPPH aux OEMPP.

Une OEMPP dans le vide se propageant dans la direction $\vec{u}$ a une structure transverse

$$\vec{u}.\vec{E} = 0$$

$$\vec{u}.\vec{B} = 0$$

et $(\vec{u},\vec{E},\vec{B})$ forme un trièdre direct avec : $\vec{B} = \dfrac{\vec{u}\wedge\vec{E}}{c}$



qui peut également s'écrire pour une OEMPP harmonique :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$$

V. OEMPPHPR

On a montré que l'onde électromagnétique dans le vide possédait une structure transverse. Lorsque le champ magnétique vibre suivant une direction fixe →u$_P$, appelée direction de polarisation, alors l'onde est polarisée rectilignement.

V.1. Expression

Une OEMPPH**PR polarisée rectilignement suivant la direction** $\vec{u}_p$, se propageant dans la direction $\vec{u}$ a pour expression

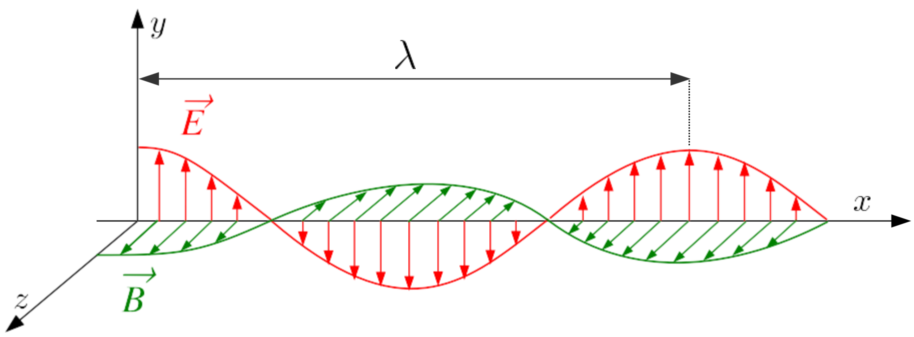
$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)}\vec{u}_p = \underline{E_0} e^{j(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}\vec{u}_p$$

avec $\vec{k} = k\vec{u}$ le vecteur d'onde et $\underline{E_0} = E_0 e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe du champ électrique.

Remarque : on peut toujours choisir une origine des temps telle que $\phi = 0$. Dans ce cas l'amplitude complexe

$\underline{E_0} = E_0$ est réelle.

Exemple : onde polarisée rectilignement suivant la direction $\vec{u}_y$ se propageant dans la direction des x croissants.



Exprimer le champ électromagnétique :

En notation complexe : $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)}\vec{u}_y$ en choisissant une origine des temps telle que $\phi = 0$.

En notation réelle : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$,

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$,

On en déduit :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z.$$

Exemple

- onner l'expression complexe du champ électrique associé aux ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques, d'amplitude E_0 et de pulsation ω, décrites ci-dessous :

a. Onde se propageant dans le sens des x croissants, polarisée rectilignement dans une direction faisant un angle de 60° avec la direction de $\vec{u}_y$.

b. Onde polarisée rectilignement suivant la direction $\vec{u}_y$ et se propageant dans une direction faisant, dans le plan xOz un angle de 30° avec $\vec{u}_x$.

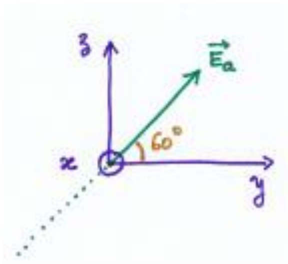
$$\triangleright\ \vec{E}_a = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0\cos(60°)\cos(\omega t - kx) \\ E_z = E_0\sin(60°)\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kx) \\ E_z = \frac{E_0\sqrt{3}}{2}\cos(\omega t - kx) \end{pmatrix}$$

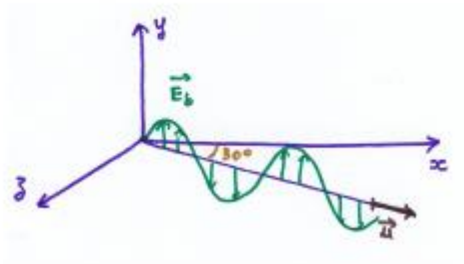
▷ La direction de propagation est $\vec{u} = \cos(30°)\vec{u}_x + \sin(30°)\vec{u}_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_x + \frac{1}{2}\vec{u}_z$.

On a $\vec{k}\cdot\vec{r} = k\vec{u}\cdot\vec{r} = k(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_x + \frac{1}{2}\vec{u}_z).(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z) = k(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z)$.

On peut alors exprimer $\vec{E}_b$:

$$\vec{E}_b = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r}) \\ E_z = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E_0\cos(\omega t - \frac{k}{2}(\sqrt{3}x + z)) \\ E_z = 0 \end{pmatrix}$$





- Donner la direction de propagation ainsi que la direction de polarisation des ondes associées aux champs électriques suivants :

$$\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} E_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - ky) \\ E_y = 0 \\ E_z = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\cos(\omega t - ky) \end{pmatrix} \qquad \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} E_x = 0 \\ E_y = 0 \\ E_z = E_0\cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}(x+y)\right) \end{pmatrix}$$

▷ $\vec{E}_1$: OEMPPHPR se propageant dans le sens des y croissants, et dont la direction de polarisation $\vec{u}_p$ a pour expression :

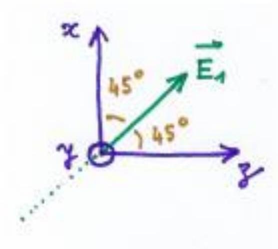
$$\vec{u}_p = \cos(45°)\vec{u}_x + \sin(45°)\vec{u}_z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u}_x + \vec{u}_z) = \frac{(\vec{u}_x + \vec{u}_z)}{\sqrt{2}}$$

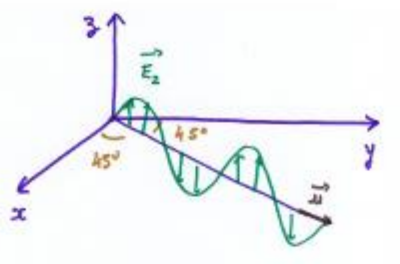
▷ $\vec{E}_2$: OEMPPHPR polarisée suivant la direction $\vec{u}_z$ et se propageant dans la direction $\vec{u}$ telle que

$$\vec{k}.\vec{r} = k\vec{u}.\vec{r} = \frac{k}{\sqrt{2}}(x+y)$$

$$\vec{u}.\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

d'où $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{u}_y$. On en déduit l'angle de 45°que fait $\vec{u}$ avec $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.





V.2. Aspect énergétique d'une OEMPPHPR

La densité volumique d'énergie et le vecteur de Poynting font apparaître des produits : on doit donc, pour les évaluer, revenir à la notation réelle. En effet, la partie réelle d'un produit n'est en général pas égal au produit des parties réelles.

On peut choisir un repère et une origine des temps tels que l'OEMPPHPR s'exprime sous la forme

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y \\ \vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z \end{cases}$$

a) Densité volumique d'énergie électromagnétique

$w_{\text{em}} = w_{\text{el}} + w_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$

avec w_{el} densité volumique d'énergie électrique et w_{mag} densité volumique d'énergie magnétique.

$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$

$w_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0}\frac{E_0^2}{c^2}\cos^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$ car $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$, d'où $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2\mu_0}$.

ainsi :

$$\boxed{w_{\text{el}} = w_{\text{mag}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)}$$

On dit qu'il y a équipartition de l'énergie électromagnétique entre les formes magnétiques et électriques

$$w_{em} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

En valeur moyenne

$$\langle w_{em}\rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \langle\cos^2(\omega t - kx)\rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \times \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\langle w_{em}\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2}$$

b) Vecteur de Poynting

Là encore, on travaille avec les notations réelles des champs.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y \wedge \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{u}_x$$

En valeur moyenne :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\langle\cos^2(\omega t - kx)\rangle\vec{u}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x$$

que l'on peut également exprimer sous la forme :

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\mu_0\varepsilon_0 c}\vec{u}_x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 c^2}{2c}\vec{u}_x = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}c\vec{u}_x = \langle w_{em}\rangle c\vec{u}_x$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x = \langle w_{em} \rangle c\vec{u}_x$$

Le vecteur de Poynting d'une OEMPPHPR a la même direction et le même sens que celui de la propagation de l'onde [a].

a. Ce résultat reste valable pour une OEMPPH avec $E_0^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2$.

Remarque : une OEMPPH seule n'existe pas physiquement, car elle correspondrait à une énergie infinie sa densité volumique d'énergie étant constante dans tout l'espace et sur une durée infinie. C'est un modèle qui n'est valable que localement dans le temps et l'espace. De plus toute onde électromagnétique réelle peut s'écrire comme une superposition d'OEMPPH .